目　录

第一部分　复　变　函　数

第二部分　数学物理方程

Contents

Part I Complex Analysis

第一部分 复 变 函 数

第一章 复数和复变函数

1.1 复数及其运算规则

设有一对有序实数 (a,b)，遵从下列基本运算规则：

$$\text{加法} \qquad (a_1,\, b_1)+(a_2,\, b_2)=(a_1+a_2,\, b_1+b_2), \tag{1.1}$$

$$\text{乘法} \qquad (a,\, b)(c,\, d)=(ac-bd,\, ad+bc), \tag{1.2}$$

则称这一对有序实数 $(a,\, b)$ 定义了一个复数 α，记为

$$\alpha=(a,\, b)=a(1,\, 0)+b(0,\, 1), \tag{1.3}$$

a 称为 α 的实部，b 称为 α 的虚部，

$$a=\operatorname{Re}\alpha, \qquad b=\operatorname{Im}\alpha.$$

根据乘法规则，可得

$$(1,\, 0)(1,\, 0)=(1,0), \qquad (1,\, 0)(a,\, b)=(a,\, b),$$

可见 $(1,\, 0)$ 具有和实数 1 同样的运算效果，因此，就记作

$$(1,\, 0)=1.$$

同样，

$$(0,\, 1)(0,\, 1)=(-1,\, 0)=-1,$$

这样就定义了虚单位 $\mathrm{i}=(0,1)$，

$$\mathrm{i}^2=-1. \tag{1.4}$$

于是，复数 α 又可以记为

$$\alpha=a+\mathrm{i}b. \tag{1.5}$$

所谓两个复数相等，其含意是这两个复数的实部、虚部分别相等.

如果一个复数 α 的实部和虚部同时等于零，则称此复数 α 为零，且记为 $\alpha=0$.

复数不能比较大小.

复数 $\alpha^*\equiv a-\mathrm{i}b$ 与 $\alpha=a+\mathrm{i}b$ 互为共轭. $(\alpha^*)^*=\alpha$. 共轭复数的乘积为实数.

$$(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)=a^2+b^2.$$

复数的减法和除法分别是加法和乘法的逆运算,

$$(a+\mathrm{i}b)-(c+\mathrm{i}d)=(a-c)+\mathrm{i}(b-d), \tag{1.6}$$

$$\frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d}=\frac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{(c+\mathrm{i}d)(c-\mathrm{i}d)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\mathrm{i}\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}. \tag{1.7}$$

练习 1.1 证明复数的加法运算服从下列规律:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha; \qquad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma).$$

练习 1.2 证明复数的乘法运算服从下列规律:

$$\alpha\beta=\beta\alpha; \qquad (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma); \qquad \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

练习 1.3 证明复数的共轭运算服从下列规律:

$$(\alpha^*)^*=\alpha; \qquad (\alpha+\beta)^*=\alpha^*+\beta^*; \qquad (\alpha\beta)^*=\alpha^*\beta^*.$$

1.2 复数的几何表示

一个复数可以用复平面上的一个点表示.

在复平面上作直角坐标系 Oxy ，则复数 $\alpha=a+\mathrm{i}b$ 就可以用横坐标为 a，纵坐标为 b 的点表示. 复数和复平面上的点有一一对

应的关系. 对于任意一个复数，复平面上都有唯一的一个点与之对应；反之，对于复平面上的任意一点，也都有唯一的一个复数与之对应 (见图 1.1) .

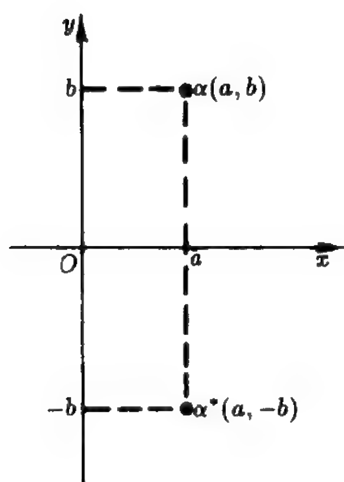


图 1.1　复数 α 和 α^*

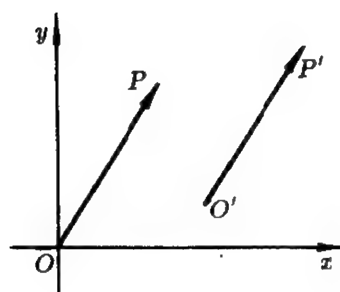


图 1.2　矢量 OP 和 $O'P'$ 代表同一个复数

复数 $\alpha = a + \mathrm{i}b$ 还可以表示成复平面上的一个矢量. 这个矢量在两个坐标轴上的投影分别为 a 和 b . 注意这里的矢量是 **自由矢量** ：将一个矢量平移 (例如将矢量的一个端点移到原点) 仍代表同一个复数 (见图 1.2) .

根据复数的加法规则，可以看出复数加法的几何意义：两个复数相加就是横坐标、纵坐标分别相加. 因此，复数加法满足平行四边形法则 (或称为三角形法则，见图 1.3) .

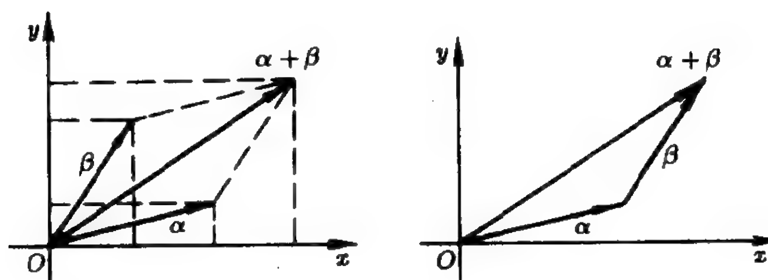


图 1.3　复数加法的平行四边形法则和三角形法则

同样，平行四边形法则 (或三角形法则) 也可以应用于复数相减 $\alpha-\beta\equiv\alpha+(-\beta)$．作法有两种：

1. 将代表 β 的矢量反向 (即表示 $-\beta$)，然后作加法；
2. 由 β 的终点指向 α 的终点作一矢量，即代表 $\alpha-\beta$．

具体作法见图 1.4．

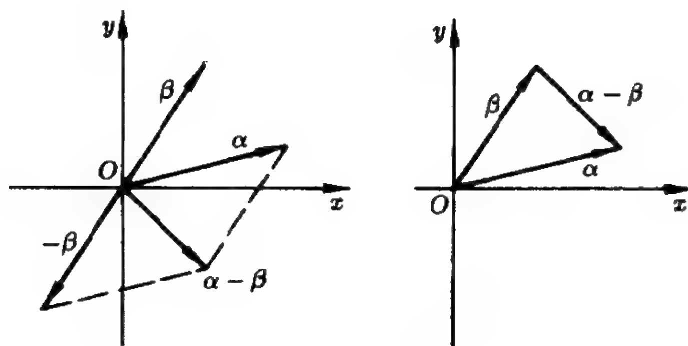


图 1.4　复数减法的平行四边形法则和三角形法则

除了直角坐标之外，一个复数 α 还可以用极坐标 (r,θ) 表示 (见图 1.5)：

$$\alpha=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.8}$$

r,θ 称为复数 α 的模和辐角，分别记为

$$r=|\alpha|,\qquad \theta=\arg\alpha. \tag{1.9}$$

显然，

$$a=r\cos\theta,\qquad b=r\sin\theta.$$

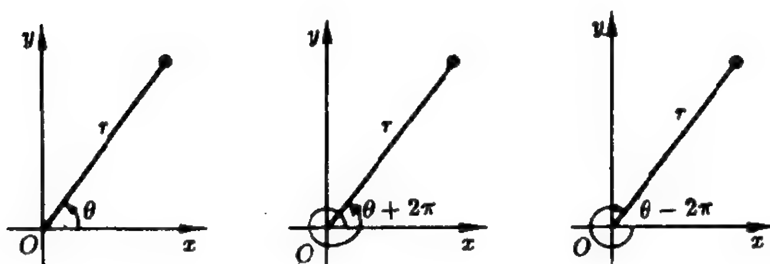


图 1.5　复数的模和辐角及辐角的多值性

相应地，复数 α 的共轭 α^* 可表示为

$$\alpha^* = r(\cos\theta - \mathrm{i}\,\sin\theta).$$

由于三角函数的周期性，所以一个复数的辐角不是唯一的，它还可以加上 2π 的任意整数倍. 这个现象称为辐角的多值性.

通常把 $(-\pi,\pi]$ 之间的辐角值称为辐角的主值.

在极坐标表达式下，复数的乘法和除法运算就很简单. 设

$$\alpha_1 = r_1\left(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\,\sin\theta_1\right), \qquad \alpha_2 = r_2\left(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\,\sin\theta_2\right),$$

于是

$$\begin{aligned}\alpha_1\cdot\alpha_2 &= r_1 r_2\Big[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2\right)\\ &\qquad + \mathrm{i}\,\left(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2\right)\Big]\\ &= r_1 r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right].\end{aligned} \tag{1.10}$$

因此，两个复数相乘，就是它们的模相乘，辐角相加.

同样，可以得到

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_1\cdot\alpha_2^*}{\alpha_2\cdot\alpha_2^*} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1-\theta_2\right) + \mathrm{i}\,\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]. \tag{1.11}$$

两个复数相除，就是它们的模相除，辐角相减.

练习 1.4 证明下列等式：

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|; \qquad |\alpha^*| = |\alpha|; \qquad \alpha\alpha^* = |\alpha|^2.$$

练习 1.5 证明下列关系式，并说明其几何意义：

$$\Big||\alpha| - |\beta|\Big| \le |\alpha+\beta| \le |\alpha| + |\beta|;$$

$$|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2\left[|\alpha|^2 + |\beta|^2\right].$$

还可以进一步定义复指数函数

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta, \tag{1.12}$$

且具有和实指数函数相同的性质：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1.13}$$

则复数 α 又可以表示成

$$\alpha = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}. \tag{1.14}$$

因而复数的乘除可以表示得更简单：

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1} \cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1.10'}$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1} \cdot \frac{1}{r_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\theta_1-\theta_2)}. \tag{1.11'}$$

例 1.1 设 n 为正整数，则

$$\begin{aligned}
&\cos n\theta + \mathrm{i}\,\sin n\theta \\
&= (\cos\theta + \mathrm{i}\,\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cos^{n-k}\theta\,(\mathrm{i}\,\sin\theta)^k \\
&= \sum_{k=0}^{[n/2]}(-)^k \frac{n!}{(2k)!\,(n-2k)!}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta \\
&\quad + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-)^k \frac{n!}{(2k+1)!\,(n-2k-1)!}\cos^{n-2k-1}\theta\sin^{2k+1}\theta,
\end{aligned}$$

其中的 $[n/2]$ 表示不超过 $n/2$ 的最大整数. 比较实部和虚部，即得

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-)^k \frac{n!}{(2k)!\,(n-2k)!}\cos^{n-2k}\theta\sin^{2k}\theta,$$

$$\sin n\theta = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-)^k \frac{n!}{(2k+1)!\,(n-2k-1)!}\cos^{n-2k-1}\theta\sin^{2k+1}\theta.$$

例 1.2 设有 2×2 矩阵 $\boldsymbol{A} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a^* \end{pmatrix}$，其中 b 为实数，且 $aa^* + b^2 = 1$. 试计算 $\boldsymbol{A}^n$.

解 根据已知条件，可设 $a = \cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha\,\cos\beta$, $b = \sin\alpha\,\sin\beta$，于是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha\,\cos\beta & \sin\alpha\,\sin\beta \\ -\sin\alpha\,\sin\beta & \cos\alpha - \mathrm{i}\,\sin\alpha\,\cos\beta \end{pmatrix} \\
&= \cos\alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\alpha\begin{pmatrix} \mathrm{i}\,\cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & -\mathrm{i}\,\cos\beta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

令

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}\mathrm{i}\cos\beta&\sin\beta\\-\sin\beta&-\mathrm{i}\cos\beta\end{pmatrix}.$$

于是，就有

$$\boldsymbol{A}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{E}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{I}.$$

$\boldsymbol{E}$ 是恒等矩阵

$$\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{E},\qquad \boldsymbol{EI}=\boldsymbol{IE}=\boldsymbol{I}.$$

容易证明

$$\boldsymbol{I}^2=-\boldsymbol{E},$$

矩阵 $\boldsymbol{I}$ 就是 2×2 矩阵中的“虚单位”. 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n &= (\cos\alpha\cdot\boldsymbol{E}+\sin\alpha\cdot\boldsymbol{I})^n\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cos^{n-k}\alpha\cdot\boldsymbol{E}^{n-k}\cdot\sin^k\alpha\cdot\boldsymbol{I}^k\\ &=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-)^k\frac{n!}{(2k)!\,(n-2k)!}\cos^{n-2k}\alpha\sin^{2k}\alpha\cdot\boldsymbol{E}\\ &\quad+\sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]}(-)^k\frac{n!}{(2k+1)!\,(n-2k-1)!}\cos^{n-2k-1}\alpha\sin^{2k+1}\alpha\cdot\boldsymbol{I}\\ &=\cos n\alpha\cdot\boldsymbol{E}+\sin n\alpha\cdot\boldsymbol{I}.\end{aligned}$$

最后一步用到了例 1.1 中的结果.

1.3 复数序列

按照一定顺序排列的复数

$$z_n=x_n+\mathrm{i}\,y_n,\qquad n=1,2,3,\cdots,$$

称为复数序列，记为 $\{z_n\}$.

复数序列的性质和实数序列完全相同. 实际上，一个复数序

列完全等价于两个实数序列. 因此，容易将实数序列的有关概念和结论，推广到复数序列中.

聚点 给定序列$\{z_n\}$，若存在复数z，对于任意给定的$\varepsilon>0$，恒有无穷多个z_n满足$|z_n-z|<\varepsilon$，则称z为$\{z_n\}$的一个聚点(或极限点).

一个序列可以有不止一个聚点，例如序列

$$\frac{1}{2},-\frac{2}{3},\frac{3}{4},-\frac{4}{5},\frac{5}{6},-\frac{6}{7},\cdots$$

就有两个聚点，±1.

特别是，对于实数序列x_n的聚点(也必然是实数)，其中数值最大的，称为$\{x_n\}$的上极限，记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$；而数值最小的，称为$\{x_n\}$的下极限，记为$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$. 上面的序列中，$\pm1$就分别是它的上、下极限.

有界序列和无界序列 给定序列$\{z_n\}$，如果存在一个正数M，使对于所有的n，都有$|z_n|<M$，则序列称为有界的；否则就是无界的.

Bolzano–Weierstrass 定理 一个有界的无穷序列至少有一个聚点.

极限 给定序列$\{z_n\}$，如果存在复数z，对于任意的$\varepsilon>0$，总能找到$N(\varepsilon)>0$，使当$n>N(\varepsilon)$时，有$|z_n-z|<\varepsilon$，则称$\{z_n\}$收敛于z，记为

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z.$$

显然，一个序列的极限必然是这个序列的聚点，而且是唯一的聚点.

序列极限存在(序列收敛)的 Cauchy 充要条件 任意给定$\varepsilon>0$，存在正整数$N(\varepsilon)>0$，使对于任意正整数p，有

$$|z_{N+p}-z_N|<\varepsilon.$$

一个无界序列不可能是收敛的.

1.4 复 变 函 数

在这一节里，不准备给出最普遍的复变函数的定义，而只介绍定义在复数平面上的一定区域的复变函数.

为了建立区域的概念，先要定义点集的内点.

如果以某一点为圆心作一个圆，只要半径足够小，使得圆内的所有的点都属于该点集，则称此点为点集的内点.

所谓**区域**，是满足下列两个条件的点集：(1) 全部都由内点组成；(2) 具有连通性，即点集中任意两点，都可以用一条折线连接起来，折线上的点全都属于此点集.

图 1.6(a) 和 (b) 中的图形都是区域，但 (c) 不构成区域.

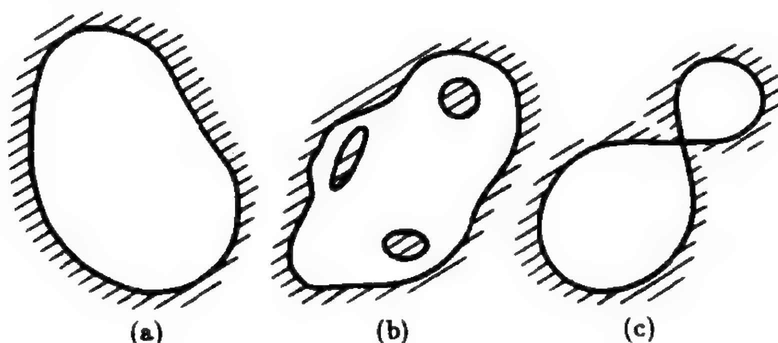


图 1.6　区域 (a) 和 (b) 与非区域 (c)

区域常用不等式表示. 例如，$|z| < r$ 表示以原点为圆心、r 为半径的圆内区域；$0 < \arg z < \pi/2$ 表示第一象限；$\mathrm{Im}\, z < 0$ 表示下半平面，等等. 图 1.7 中给出了几个典型的区域.

与区域有关的概念还有边界点和边界. 所谓区域的边界点，并不属于区域，但是以它为圆心作圆，不论半径如何小，圆内总含有区域的点. 边界点的全体就构成边界.

区域的边界还具有方向. 如果沿着边界走，区域保持在左方，则走向称为边界的正向. 例如，对于环域 $a < |z| < b$，边界是圆周 $|z| = a$ 和 $|z| = b$. 对于内圆 $|z| = a$ 来说，边界正向是顺时针方向；

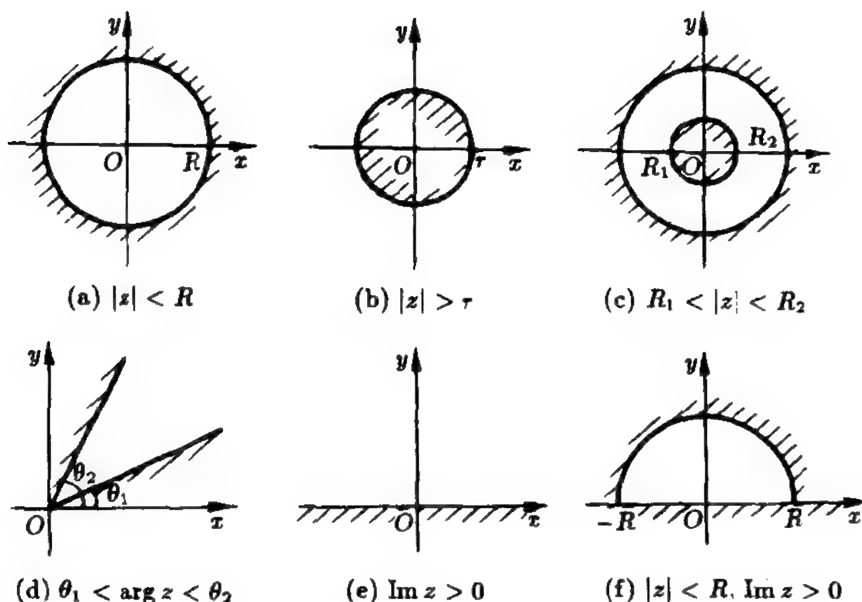


图 1.7　几个典型的区域 (阴影在边界外侧)

对于外圆 $|z|=b$ 来说，边界正向是逆时针方向.

区域 G 加上边界 C 就构成闭区域 $\overline{G}$． $\overline{G}=G+C$．

设有复数平面上的一个区域 G，如果对于 G 内的每一个 z 值，都有一个或多个复数值 w 与之对应，则称 w 为 z 的函数——复变函数，记为

$$w=f(z),$$

定义域为 G．

因为 $z=x+\mathrm{i}y$，所以

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}\,v(x,y),$$

其中 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都是 x 和 y 的实函数.

一个复变函数只不过是两个二元实变函数的有序组合.

1.5　复变函数的极限和连续

和实变函数一样，复变函数也有极限和连续的概念. 这里简单

介绍一下这两个概念和有关结论.

设函数 $f(z)$ 在 z_0 点的邻域内有定义，如果存在复数 A，对于任意的 $\varepsilon > 0$，总能找到一个 $\delta(\varepsilon) > 0$，使当 $|z - z_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(z) - A| < \varepsilon$，则称 $z \to z_0$ 时 $f(z)$ 的极限 $(= A)$ 存在，且表示为

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

设函数 $f(z)$ 在 z_0 点及其邻域内有定义，且 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta(\varepsilon) > 0$，使当 $|z - z_0| < \delta$ 时，恒有 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$，则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续.

可以看出，复变函数中极限和连续概念的表述，在形式上和实变函数中完全相同. 但是，由于所涉及的数的变化范围不同 (一个是在复数平面上变化，一个只限于在实轴上变化)，因此，实际含义并不完全相同.

函数在区域 G 内每一点都连续，称为在 G 内连续.

在闭区域 $\overline{G}$ 中连续的函数具有两个重要性质：

1. $|f(z)|$ 在 $\overline{G}$ 中有界，并达到它的上下界；

2. $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 中一致连续，即对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在与 z 无关的 $\delta(\varepsilon) > 0$，使 $\overline{G}$ 中的任何两个点 z_1 和 z_2，只要满足 $|z_1 - z_2| < \delta$，就有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$.

和实变函数的情形一样，连续函数的和、差、积、商 (在分母不为零的点)，以及连续函数的复合函数仍是连续函数.

1.6 无穷远点

在 1.3 节中介绍过有界序列和无界序列的概念，以及有界序列必有聚点的结论. 对于无界序列 $\{z_n\}$，给定任意正数 M，不存在一个正整数 N，使当 $n > N$ 时，$|z_n| < M$. 换句话说，总有无穷多个 z_n 满足 $|z_n| > M$. 这时可以仿照序列在有限远处的聚点的概念，称无穷远点 (记为 ∞ 点) 为无界序列的一个聚点. 当然在有限

远处无界序列也可能有聚点. 例如 $z=1$ 和 $z=\infty$ 就是序列

$$z_n = 1, 2, 1, 4, 1, 6, 1, 8, \cdots$$

的两个聚点.

更进一步, 如果一个无界序列在有限远处无聚点, 那么, ∞ 点就是它的唯一的一个聚点, 或称无界序列收敛于 ∞ 点.

这样, 我们就完成了对于数的概念的扩充, 即把无穷远点也定义为一个数, 其模大于任何正数, 辐角不定. 在复数平面上也存在相应的一点. 以任意方式无限地远离原点, 即可到达无穷远点. 包括有无穷远点的复数平面称为扩充了的复数平面.

为了更直观地表现无穷远点, 还可以引进复数球面. 过复数平面上的原点 (0, 0) 作一个直径为 1 的球面, 使与复数平面相切, 切点称为南极. 过南极的直径的另一端点称为北极 N . 适当定义球面坐标 (θ,ϕ) , 例如使 $\phi=0$ 和 π 的两个半平面与复数平面相交于正负实轴, 而 $\theta=0$ 和 π 则对应于北极和南极. 这样定义的球面就称为复数球面, 如图 1.8 .

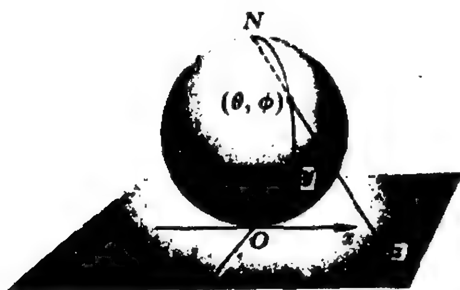


图 1.8　复数球面

对于复数平面上一点 z , 将它和复数球面的北极 N 相连, 此连线和球面必有一交点, 这就是说, 复数球面上的点和复数平面上的点也存在一一对应的关系. 于是, 就可以用复数球面上的这个交点来表示复数 z . 例如南极对应于复数 0 , 赤道对应于复数平面上的单位圆. 让复数平面上的点无限地远离原点, 就得到无穷远点在复数球面上的对应点 —— 北极 N .

练习 1.6　试求出复平面上的点 (a, b) 和复数球面上的点 (θ, ϕ) 之间的函数关系.

对于无穷远点, 还可以用变换 (或映射) 的语言定义. 例如变

换 $w=1/z$ 就建立了复数 z 和复数 w 之间的一一对应关系. 复数 $z=0$ 对应于 $w=\infty$ ，而 $z=\infty$ 对应于 $w=0$.

*1.7 正十七边形问题

作为本章的结束，我们介绍一个饶有兴趣的问题，即正十七边形的几何作图问题. 为了确定起见，假设正十七边形的边长为 a ，内接于单位圆. 显然， $a=2\sin(\pi/17)$. 可以采用复数方法求出 a 的代数表达式，因而也就解决了正十七边形的几何作图问题.

设 $x=e^{2\pi i/17}$ ，由于 $x^0,x^1,x^2,\cdots,x^{16}$ 都是方程 $x^{17}-1=0$ 的根，因此有

$$x^0+x^1+x^2+\cdots+x^{16}=0,$$

或 $x^1+x^2+x^3+\cdots+x^{16}=-1$. 令

$$\begin{aligned}s &= x^1+x^9+x^{9^2}+x^{9^3}+\cdots+x^{9^7}\\ &= x^1+x^9+x^{13}+x^{15}+x^{16}+x^8+x^4+x^2,\\ s' &= x^3+x^{3^3}+x^{3^5}+\cdots+x^{3^{15}}\\ &= x^3+x^{10}+x^5+x^{11}+x^{14}+x^7+x^{12}+x^6.\end{aligned}$$

在得到这两式时用到了 $x^{17}=1$ 以及

$$\begin{aligned}9^2 &= 4\times 17+13,\\ 9^3 &= 42\times 17+15,\\ &\vdots\\ 3^3 &= 1\times 17+10,\\ 3^5 &= 14\times 17+5,\\ &\vdots\end{aligned}$$

显然

$$s+s'=-1,$$

将 s 和 s' 直接相乘，即可验证

$$ss' = -4.$$

在复平面上标出 $x^0, x^1, \cdots, x^{16}$ 的位置. 可以看出，这些点均匀地分布在单位圆上，而且，x^1 与 x^{16}，x^9 与 x^8，x^{13} 与 x^4 以及 x^{15} 与 x^2 都互为共轭，这说明 s 一定为实数，并且从 x^1，x^2，x^4 和 x^8 各点的具体位置可以进一步断定 s 为正. 因此

$$s = \frac{1}{2}\left(\sqrt{17} - 1\right), \qquad s' = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{17} + 1\right).$$

再进一步将 s 和 s' 拆成两组数之和：

$$p = x^1 + x^{13} + x^{16} + x^4, \qquad p' = x^9 + x^{15} + x^8 + x^2,$$

$$q = x^3 + x^5 + x^{14} + x^{12}, \qquad q' = x^{10} + x^{11} + x^7 + x^6.$$

容易验证

$$p + p' = s, \qquad pp' = -1,$$

$$q + q' = s', \qquad qq' = -1.$$

所以

$$p = \frac{1}{2}\left(s + \sqrt{s^2 + 4}\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(s' + \sqrt{s'^2 + 4}\right).$$

再令

$$r = x^1 + x^{16}, \qquad r' = x^{13} + x^4,$$

显然，又有

$$r + r' = p, \qquad rr' = q,$$

所以

$$r = x^1 + x^{16} = 2\cos\frac{2\pi}{17} = \frac{1}{2}\left(p + \sqrt{p^2 - 4q}\right).$$

最后，就求得

$$a = \sqrt{2 - r}.$$

用几何作图法可以作出 s, s', p, q 和 r，因而也就求出了正十七边形的边长 a.

第二章 解析函数

2.1 导　数

设 $w=f(z)$ 是区域 G 内的单值函数，如果在 G 内的某点 z，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \tag{2.1}$$

存在，则称函数 $f(z)$ 在 z 点可导，而此极限值，记为 $f'(z)$，即称为 $f(z)$ 在 z 点的导数.

需要强调，这里所说的 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\Delta w/\Delta z)$ 存在，就意味着 Δz 以任意方式趋于 0 时，$\Delta w/\Delta z$ 都趋于同样的有限值. 反过来说，如果当 Δz 以不同方式趋于 0，$\Delta w/\Delta z$ 趋于不同的值的话，则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}(\Delta w/\Delta z)$ 是不存在的.

特别是，考虑 $\Delta z\to 0$ 的两种特殊方式，就可以得到函数可导的必要条件.

- $\Delta x\to 0$，$\Delta y=0$，
$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x};$$
- $\Delta x=0$，$\Delta y\to 0$，
$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\mathrm{i}\Delta y}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

因此

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.} \tag{2.2}$$

这两个方程称为 Cauchy-Riemann 方程.

Cauchy-Riemann 方程，是函数可导的必要条件，但不是充分条件. 这是容易理解的，因为它只是保证了当 Δz 以平行于实轴和虚

轴这两种特殊方式趋于 0 时 $\Delta w/\Delta z$ 逼近同一个值，但并不足以保证当 Δz 以任意方式趋于 0 时 $\Delta w/\Delta z$ 逼近同一个值.

但是，可以证明，如果 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 的四个偏导数 $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$ 和 $\partial v/\partial y$ 连续，且满足 Cauchy-Riemann 方程，则函数 $f(z)$ 可导.

练习 2.1 证明： Cauchy–Riemann 方程等价于

$$\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

练习 2.2 证明：

$$\begin{aligned}\left|f'(z)\right|^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2.\end{aligned}$$

和实数情形一样，如果函数 $f(z)$ 在 z 点可导，则在 z 点必连续；但是函数在某点连续，并不能推出函数在该点可导. 甚至有这样的情况：函数在某区域内处处连续，却处处不可导.

由于导数的定义在形式上和实数中一样，只是把自变量 x 换成了 z. 因此，在高等数学中的各种求导数的公式都可以搬用到复数中来. 例如

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

上面关于导数的定义，原则上只适用于有限远处. 若函数在 ∞ 点及其邻域内有定义，形式上也可以套用有限远处的求导公式. 这相当于把有限远处的导数值连续地延拓到 ∞ 点.

导数的几何意义 设 $w = f(z)$ 在 z 点可导，则

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = f'(z) \qquad \text{或} \qquad \mathrm{d}w = f'(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2.3}$$

根据复数乘法的几何意义可以看出(见图 2.1)， $f'(z)$ 的模 $|f'(z)|$ ，表示把微元 $\mathrm{d}z$ 映射为 $\mathrm{d}w$ 的伸缩率 (放大倍数) ，而 $f'(z)$ 的辐角 $\arg f'(z)$ ，则给出映射的偏转角，即 $\mathrm{d}w$ 与 $\mathrm{d}z$ 的辐角差.

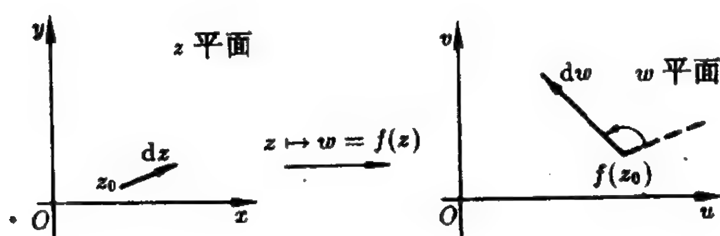


图 2.1　导数的几何意义

$|\mathrm{d}w| = \left|f'(z)\right| \cdot |\mathrm{d}z|$, $\arg \mathrm{d}w = \arg f'(z) + \arg \mathrm{d}z$

2.2　解析函数

在区域 G 内每一点都可导的函数，称为 G 内的解析函数. 例如， z^n 就是全平面上的解析函数.

显然，函数 $w = f(z)$ 在 G 内解析的必要条件是在 G 内处处满足 Cauchy-Riemann 方程. Cauchy-Riemann 方程反映了解析函数的实部与虚部之间的联系.

解析函数的实部和虚部不是独立的. 知道了其中之一，例如实部 $u(x,y)$ ，根据 Cauchy-Riemann 方程，就可以唯一地 (可差一个可加常数) 确定虚部. 这是因为

$$\mathrm{d}v = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

是全微分，因此，通过积分

$$\int^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\right),$$

可以唯一地确定 $v(x,y)$.

同样，已知解析函数的虚部 $v(x,y)$ ，也可以唯一地 (也是可差一个可加常数) 确定其实部 $u(x,y)$.

例 2.1　已知 $u(x,y) = x^2 - y^2$ ，求 $f(z)$.

解　$\mathrm{d}v = -\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y = 2(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$ ，所以 $v = 2xy + C$ ，

$$f(z) = \left(x^2 - y^2\right) + \mathrm{i}(2xy + C) = z^2 + \mathrm{i}C.$$

这个问题，还可以有另一种解法，即在 $u(x,y)$ 中直接代入

$$x=\frac{z+z^*}{2},\quad y=\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}},$$

而后就能将 $u(x,y)$ 化成 $[f(z)+f^*(z)]/2$ 的形式，

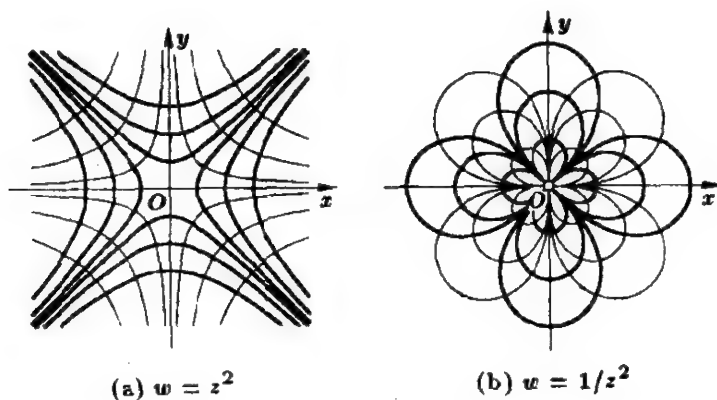
$$u(x,y)=\left(\frac{z+z^*}{2}\right)^2-\left(\frac{z-z^*}{2\mathrm{i}}\right)^2=\frac{1}{2}\left[z^2+\left(z^2\right)^*\right],$$

同样也能求出 $f(z)=z^2+\mathrm{i}C$．

解析函数的实部、虚部之间的这种互相依赖关系，还可以形象化表现出来．如果在平面上作一族曲线，$u(x,y)=$ 常数，那么，这一族曲线的切线的方向矢量便是 $(\partial u/\partial y,\ -\partial u/\partial x)$．同样，再作一族曲线，$v(x,y)=$ 常数，它们的切线的方向矢量当然也就是 $(\partial v/\partial y,\ -\partial v/\partial x)$．由 Cauchy–Riemann 方程，可以求得这两族方向矢量之间的标积

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y},\quad -\frac{\partial u}{\partial x}\right)\begin{pmatrix}\partial v/\partial y\\ -\partial v/\partial x\end{pmatrix}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{2.4}$$

这表明，这两族曲线是互相正交的．图 2.2 中给出了两个这样的例子．它们分别是函数 $w=z^2$ 和 $w=1/z^2$．图中的粗实线表示实部 $u(x,y)=$ 常数，细实线表示虚部 $v(x,y)=$ 常数．



(a) $w=z^2$　　(b) $w=1/z^2$

图 2.2

进一步的问题是：任意一个二元函数，是否都可以用来作解析函数的实部或虚部呢？回答是否定的．这是因为 3.2 节中将证明，

作为解析函数的实部和虚部， $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ ，它们的二阶偏导数一定存在并且连续，因此，根据 Cauchy-Riemann 方程，有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}.$$

这说明， $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 都必须满足二维 Laplace 方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.}\tag{2.5}$$

即解析函数的实部和虚部都必须是调和函数.

函数的解析性，是一个很高的要求，这表现为解析函数具有一系列的重要性质. 讨论解析函数的各种特殊性质，就是复变函数论的中心课题.

函数的解析性，总是和一定的区域联系在一起的. 有时我们也说函数在某点解析，这应该理解为函数在该点及其邻域内是处处可导的.

如果一个函数在某点 z_0 无定义，或者在 z_0 虽有定义但不可导，或者在 z_0 虽可导但不解析，则 z_0 称为函数的奇点. 例如， $z=0$ 就是函数 $w=1/z$ 的奇点.

如果要讨论函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 点是否解析，则需作变换 $t=1/z$ ，然后讨论函数 $f(1/t)$ 在 $t=0$ 点是否解析即可.

练习 2.3 证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big[f(z)+g(z)\big]=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}+\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z};$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big[f(z)g(z)\big]=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}g(z)+f(z)\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z};$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)},\quad g(z)\neq 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}f\big(g(z)\big)=f'\big(g(z)\big)g'(z).$$

练习 2.4 举例说明中值定理不适用于解析函数：若函数 $f(z)$ 在 G 中

解析，z_1 和 z_2 以及连结两点的线段均在 G 中，在此线段上不一定存在 z_0 点，使得

$$\frac{f(z_1)-f(z_2)}{z_1-z_2}=f'(z_0).$$

练习 2.5 假设函数 $f(z)$ 在区域 G 内的任何一点都满足 $f'(z)=0$，证明 $f(z)$ 在 G 内为常数.

练习 2.6 若函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，且 $\operatorname{Im} f(z)=0$，证明 $f(z)$ 在 G 内为常数.

练习 2.7 若函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 G 内解析，且 $au(x,y)+bv(x,y)=c$，a,b 和 c 是不为 0 的实常数，证明 $f(z)$ 必为常数.

如果 a,b 和 c 是不为 0 的复常数，这个结论还成立吗？

2.3 初 等 函 数

本节介绍一些基本的解析函数，例如幂函数 z^n，指数函数 e^z，三角函数 $\sin z, \cos z, \cdots$，双曲函数 $\sinh z, \cosh z, \cdots$，等等. 它们都可以看成是相应实变函数在复数域中的推广. 这里将着重讨论这些函数作为复变函数所特有的那些性质.

幂函数 z^n

当 $n=0,1,2,\cdots$ 时，z^n 在全平面解析，且当 $n=1,2,\cdots$ 时，$z=\infty$ 是奇点.

当 $n=-1,-2,-3,\cdots$ 时，z^n 除 $z=0$ 外处处解析，在 $z=\infty$ 也解析，

$$(z^n)'=nz^{n-1}.$$

指数函数 e^z

$$\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y).$$

由实指数函数及纯虚数指数函数的性质，容易看出，“指数函数相乘等于指数相加”这个运算法则，对于复指数函数仍然成立.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{z_1}\cdot\mathrm{e}^{z_2}&=\mathrm{e}^{x_1+\mathrm{i}y_1}\cdot\mathrm{e}^{x_2+\mathrm{i}y_2}=\mathrm{e}^{x_1}\cdot\mathrm{e}^{x_2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y_2}\\&=\mathrm{e}^{x_1+x_2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y_1+y_2)}=\mathrm{e}^{(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2)}=\mathrm{e}^{z_1+z_2}.\end{aligned}$$

e^z 在全平面解析，

$$(e^z)' = e^z.$$

但 e^z 在无穷远点无定义. 例如，当 z 沿正实轴、负实轴或虚轴趋于 ∞ 时， e^z 逼近不同的值. 所以， $z=\infty$ 是指数函数 e^z 的奇点.

复指数函数特有的一个性质是周期性，其周期为 $2\pi i$，

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^{x+i(y+2\pi)} = e^x\left[\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi)\right] \\ &= e^x\left[\cos y + i\sin y\right] = e^{x+iy} = e^z. \end{aligned}$$

练习 2.8 如果 z 沿不同辐角方向趋于无穷远点，试讨论函数 e^z 的变化趋势.

又设常数 $\alpha\neq 0$，试设计一个无穷序列 $\{z_n\}$，使 z 依此序列趋于无穷远点时，函数 e^z 趋于 α.

三角函数 $\sin z, \cos z, \cdots$

复三角函数 $\sin z, \cos z$ 可以用复指数函数定义，

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}. \tag{2.6}$$

由于 e^{iz} 与 e^{-iz} 在全平面解析，所以，$\sin z$, $\cos z$ 也在全平面解析，

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

$z=\infty$ 是它们的唯一奇点.

和实三角函数一样，$\sin z$ 和 $\cos z$ 都是周期函数，周期为 2π.

和实三角函数不同， $\sin z$ 和 $\cos z$ 的模可以大于 1. 例如，

$$\begin{aligned} i\sin i &= \frac{e^{-1}-e^{1}}{2} = -1.1752012\cdots, \\ \cos i &= \frac{e^{-1}+e^{1}}{2} = 1.5430806\cdots. \end{aligned}$$

其他三角函数， $\tan z, \cot z, \sec z, \csc z$ 可以用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 定义，形式和实数时一样，

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

根据这些定义，容易证明，实三角函数的各种恒等式对于复三角函数仍然成立. 这里就不一一列举了.

练习 2.9 证明下列恒等式:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1;$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2;$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2.$$

双曲函数 $\sinh z, \cosh z, \cdots$

双曲函数 $\sinh z, \cosh z$ 也是通过复指数函数定义的.

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{2.7a}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \tag{2.7b}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}. \tag{2.7c}$$

由定义可以直接证明，双曲函数和三角函数是可以互化的，

$$\sinh z = -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}z, \qquad \cosh z = \cos \mathrm{i}z, \qquad \tanh z = -\mathrm{i}\tan \mathrm{i}z.$$

因此，双曲函数的性质完全可以由三角函数推出. 这里只想特别指出两点：一是周期性，双曲函数 $\sinh z, \cosh z$ 的周期是 $2\pi\mathrm{i}$；二是导数公式

$$(\sinh z)' = \cosh z, \quad (\cosh z)' = \sinh z, \quad (\tanh z)' = \operatorname{sech}^2 z. \tag{2.8}$$

练习 2.10 证明下列公式:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1;$$

$$1 - \tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z;$$

$$|\sinh y| \le |\sin(x + \mathrm{i}y)| \le \cosh y;$$

$$|\sinh y| \le |\cos(x + \mathrm{i}y)| \le \cosh y;$$

$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2;$$

$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2.$$

2.4 多值函数

上面讲的都是单值函数，即给定一个自变量值，只有一个函数值与之对应．在初等函数中，除了这些函数外，还有它们的反函数，即根式函数，对数函数，反三角函数，等等，它们都是多值函数．多值函数的概念及其应用，在复变函数中占有重要地位．本节只介绍根式函数及对数函数，并通过这两种函数阐述多值函数的一些基本概念．别的多值函数都可以用这两种多值函数表达．

1. 根式函数 $\sqrt{z-a}$

首先给出根式函数的定义，或者说给出开方运算的定义．给定一个自变量值 z，我们把凡是满足等式 $w^2=z$ 的 w 值，就定义为根式函数 $\sqrt{z}$ 的函数值，或者说是 z 的平方根．它是幂函数 $z^2=w$ 即 $w=z^2$ 的反函数．下面我们将看到，对应于一个自变量值 z，根式函数 $\sqrt{z}$ 可取两个值．

为了更清楚地看出多值函数的性质，现在仔细分析一下函数

$$w=\sqrt{z-a}. \tag{2.9}$$

如果采用极坐标表达式

$$w=\rho e^{i\phi}, \qquad z-a=re^{i\theta},$$

代入则有 $\rho^2 e^{i\cdot 2\phi}=re^{i\theta}$．所以 $\rho^2=r, 2\phi=\theta+2n\pi$，

$$\rho=\sqrt{r}, \qquad \phi=\frac{\theta}{2}+n\pi, \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

因此，对于给定的一个 z 值，有两个 w 值与之对应：

$$w_1(z)=\sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad (\text{相当于上面的}\, n=0,\pm2,\cdots),$$

$$w_2(z)=\sqrt{r}e^{i(\pi+\theta/2)}=-\sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad (\text{相当于}\, n=\pm1,\pm3,\cdots).$$

这里，函数的多值性来源于辐角的多值性，准确地说，来源于宗量 $z-a$(而不是自变量 z) 辐角的多值性．多值性的表现则是函数 w 的

辐角. 为了确定起见，我们以后就把函数 $w=\sqrt{z-a}$ 明确表示成

$$|w|=\sqrt{|z-a|}, \qquad \arg w=\frac{1}{2}\arg(z-a). \tag{2.10}$$

为了更进一步揭示多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的性质，现在不妨规定好 z 平面上某一点 $\arg(z-a)$ 的值，而后研究 z 沿一定曲线连续变化时，相应的 w 值的连续变化. 当 z 沿一定简单闭合曲线 (即自身不相交的闭合曲线) 变化一周回到原处时，我们发现，可能出现两种结果. 一种结果是，闭合曲线内不包含 a 点，例如图 2.3 中的 C_1， z 沿 C_1 变化一周回到原处时， $\arg(z-a)$ 也还原，因此对应的函数值不变. 另一种结果是，闭合曲线内含有 a 点，例如图 2.3 中的 C_2，当 z 沿 C_2 变化一周回到原处时， $\arg(z-a)$ 增加 2π， $\arg w$ 随之增加 π，因而 w 值并不还原.

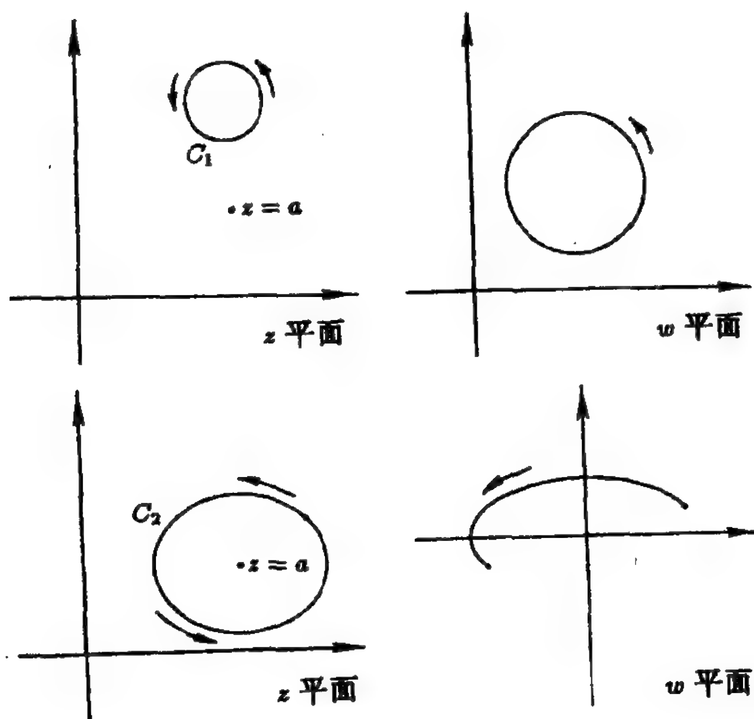


图 2.3　z 沿闭合曲线一周回到原处时，函数值 $w=\sqrt{z-a}$ 的不同变化

从上面的分析中可以看出， a 点在多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 中具有特殊的地位：当 z 绕 a 点转一圈回到原处时，对应的函数值不还

原；而当 z 不绕 a 点转一圈回到原处时，函数值还原．a 点称为多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的枝点．

同样可以看出，$z=\infty$ 也是多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的枝点．这是因为，如果作一个足够大的闭合曲线，当 z 沿这个闭合曲线变化一周回到原处时，w 值一定不还原（只要这个闭合曲线足够大，就一定会把 a 点包含在内）．而这样的闭合曲线，同时又可以看成是绕 ∞ 点一圈，这样也就是说，当 z 绕 ∞ 点一周回到原处时，函数值也不还原，因此，∞ 点也是 $w=\sqrt{z-a}$ 枝点．

这样看来，为了完全确定多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的函数值与自变量 z 值之间的对应关系，我们可以采用两种办法．

比较简单的办法是规定宗量 $z-a$ 的辐角变化范围．当宗量 $z-a$ 的辐角限制在某个周期内时，$w=\sqrt{z-a}$ 的辐角也就唯一地确定了，因而 w 值也就唯一地确定．例如，规定 $0\leq\arg(z-a)<2\pi$ 或 $2\pi\leq\arg(z-a)<4\pi$，等等．

作为一个例子，设 $w=\sqrt{z-1}$，规定 $0\leq\arg(z-1)<2\pi$，求 $w(2), w(\mathrm{i}), w(0), w(-\mathrm{i})$．

解 $\arg w=\dfrac{1}{2}\arg(z-1)$．因为 $0\leq\arg(z-1)<2\pi$，所以

$$\begin{aligned}
\arg(z-1)\big|_{z=2} &= 0, & w(2) &= 1,\\
\arg(z-1)\big|_{z=\mathrm{i}} &= \frac{3}{4}\pi, & w(\mathrm{i}) &= \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/8},\\
\arg(z-1)\big|_{z=0} &= \pi, & w(0) &= \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2}=\mathrm{i},\\
\arg(z-1)\big|_{z=-\mathrm{i}} &= \frac{5}{4}\pi, & w(-\mathrm{i}) &= \sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/8}.
\end{aligned}$$

显然，在辐角规定 $0\leq\arg(z-a)<2\pi$ 下，w 的辐角一定限制在 $0\leq\arg w<\pi$，即被限制在上半平面．在这样的限制下，$w=\sqrt{z-a}$ 值与自变量 z 值之间存在一一对应的关系．如果规定 $2\pi\leq\arg(z-a)<4\pi$，则 $\pi\leq\arg w<2\pi$，w 将限制在下半平面，w 值与自变量 z 值又有新的一一对应关系．在 $4\pi\leq\arg(z-a)<6\pi$，$6\pi\leq\arg(z-a)<8\pi,\cdots$ 或 $-2\pi\leq\arg(z-a)<0$，$-4\pi\leq\arg(z-a)<$

$-2\pi,\cdots$ 的规定之下，还会重复出现这些结果．由于它们并不给出新结果，所以也就不必讨论了．

这样看来，只要适当规定宗量的辐角变化范围，就可以将多值函数单值化．辐角变化的各个周期，给出多值函数的各个单值分枝．每个单值分枝都是单值函数，整个多值函数就是它的各个单值分枝的总和．在上面的讨论中，多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 有两个单值分枝，分别是 w 的上半平面和下半平面：

$$0\le\arg(z-a)<2\pi\text{ 给出单值分枝 I ： }0\le\arg w<\pi,$$

$$2\pi\le\arg(z-a)<4\pi\text{ 给出单值分枝 II ： }\pi\le\arg w<2\pi.$$

将多值函数划分为若干个(甚至无穷个)单值分枝，其实质就是限制 z 的变化方式，例如在上面的例子中，就是限制 z 不得绕 $z=a$ 点或 ∞ 点转圈．这种规定可以用几何方法形象化地表现出来 (见图 2.4)．在 z 平面上平行于实轴从 $z=a$ 点向右作一割线，一直延续到 ∞ 点．如果规定在割线上岸 $\arg(z-a)=0$ ，就给出单值分枝 I ；如果规定在割线上岸 $\arg(z-a)=2\pi$ ，就给出单值分枝 II．这两个单值分枝合起来，就得到一个完整的 w 平面，即整个多值函数 w．割线的作用，就是限制 z 的变化方式．由于割线连结了多

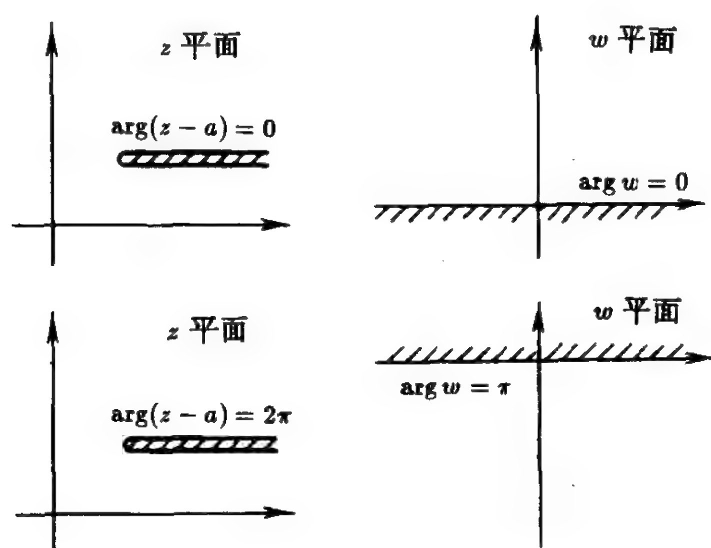


图 2.4　多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的两个单值分枝

值函数的两个枝点， $z=a$ 和 ∞ ，因此， z 不再能够绕一个分枝点转一圈了 (这时，同时围绕两个分枝点转一圈还是允许的)．

应当指出，单值分枝的划分，或者说，宗量辐角变化范围的规定不是唯一的．例如，也可以规定

$$-\pi \le \arg(z-a) < \pi \quad 和 \quad \pi \le \arg(z-a) < 3\pi,$$

或

$$-3\pi/2 \le \arg(z-a) < \pi/2 \quad 和 \quad \pi/2 \le \arg(z-a) < 5\pi/2.$$

割线的作法多种多样，甚至不必是直线．只要割线连结了多值函数的分枝点，同时适当规定割线一侧 (例如上岸或下岸) 的宗量辐角值 (或者等价地，规定在某一点的宗量辐角值或函数值) 即可．

将多值函数划分为单值分枝，其优点是，每个单值分枝都是单值函数，因而可以像普通的单值函数那样讨论它们的解析性．单值函数的分枝点是奇点，它不对应于哪一个单值分枝．在枝点附近，也不存在一个只对应于一个单值分枝的邻域．这种划分的缺点是有一定的局限性．因为它限制了宗量的辐角变化范围，就不能用来讨论一些比较复杂的问题．

为了克服这个缺点，另一种完全确定函数值与自变量值对应关系的办法是：规定函数 w 在某一点 z_0 的值，并明确说明 z 的连续变化路线．当 z 沿这曲线连续变化时，函数 w 也随之连续变化．

仍以函数 $w=\sqrt{z-1}$ 为例．规定 $w(2)=1$ ，讨论 z 沿 C_1 或 C_2 连续变化到原点时，函数 w 之值． C_1 和 C_2 是以 $z=1$ 为圆心、1 为半径的上半圆周和下半圆周．

显然，当 z 沿 C_1 移动到 $z=0$ 时， $\Delta\arg(z-1)=\pi$ ，所以

$$\begin{aligned}\Delta\arg w &= \frac{1}{2}\Delta\arg(z-1) = \frac{\pi}{2},\\ w(0) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}.\end{aligned}$$

当 z 沿 C_2 移动到 $z=0$ 时， $\Delta\arg(z-1)=-\pi$ ，所以

$$\begin{aligned}\Delta\arg w &= \frac{1}{2}\Delta\arg(z-1) = -\frac{\pi}{2},\\ w(0) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2} = -\mathrm{i}.\end{aligned}$$

采用这种办法，z 的变化路线不受限制，因而就可以从一个单值分枝运动到另一个单值分枝. 在几何图形上，这相当于将两个割开的 z 平面粘接起来，第一个面的割线下岸 ($\arg(z-1)=2\pi$) 和第二个面的割线上岸 ($\arg(z-1)=2\pi$) 相连，第一个面的割线上岸 ($\arg(z-1)=0$) 和第二个面的割线下岸 ($\arg(z-1)=4\pi$) 相连. 这就构成了二叶 Riemann 面 (见图 2.5). 对于函数 $w=\sqrt{z-1}$ 或 $\sqrt{z-a}$ 来说，二叶 Riemann 面上的 z 点和 w 平面上的点是一一对应的.

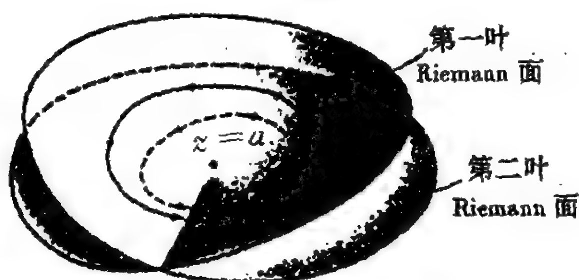


图 2.5　多值函数 $w=\sqrt{z-a}$ 的 Riemann 面

上面讨论了多值函数 $w=\sqrt{z-a}$，对于更复杂一些的根式函数，例如 $w=\sqrt[3]{z-a}$ 或 $\sqrt[3]{(z-a)(z-b)}$，等等，也可以类似地讨论. 只是需要注意找出多值函数的全部枝点，并且正确地确定割线的作法. 在一般情况下，割线可能不止一条，也不一定需要用一条割线把全部枝点都连接起来.

2. 对数函数 $\ln z$

对数函数 $w=\ln z$ 的定义是 $\mathrm{e}^w=z$，也就是说，给定自变量 z 的一个数值，凡是满足 $\mathrm{e}^w=z$ 的所有 w 值均称为对数函数 $w=\ln z$ 的函数值. 它是指数函数 $w=\mathrm{e}^z$ 的反函数. 令 $w=u+\mathrm{i}v$，$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，就得到 $\mathrm{e}^u\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}v}=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 所以

$$u=\ln r=\ln|z|,\quad v=\theta+2n\pi\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

以后我们就把对数函数 $w=\ln z$ 明确表示为

$$w = \ln z = \ln|z| + \mathrm{i}(\theta + 2n\pi) = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z. \tag{2.11}$$

因此，对数函数 $w = \ln z$ 也是多值的，其多值性的来源是宗量 z 辐角的多值性，多值性的表现则是函数值 w 的虚部. 对应每一个 z 值，有无穷多个 w 值，它们的实部相同，虚部相差 2π 的整数倍. 图 2.6 给出了对数函数 $w = \ln z$ 的示意图.

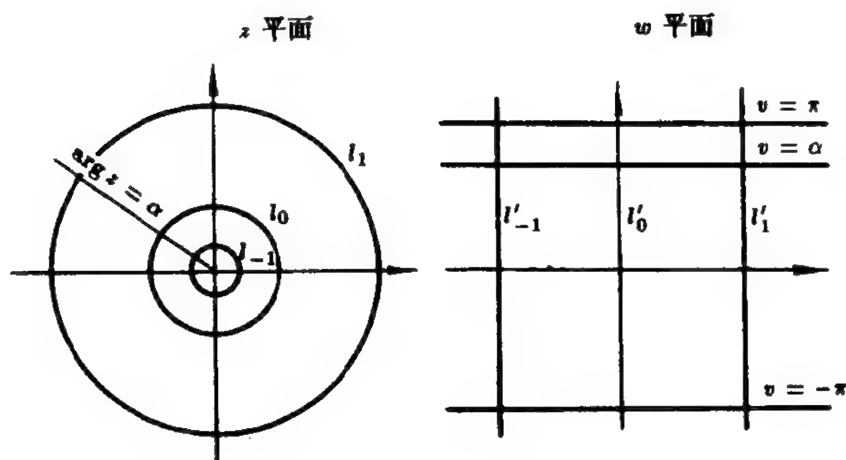


图 2.6 多值函数 $w = \ln z$

$w = \ln z$ 的枝点是 $z = 0$ 和 ∞. 作割线连接 0 与 ∞，并规定割线一侧的 $\arg z$ 值，即可得到 $w = \ln z$ 的单值分枝.

$w = \ln z$ 有无穷多个单值分枝. 每个单值分枝内，都有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln z) = \frac{1}{z}. \tag{2.12}$$

相应地， $w = \ln z$ 的 Riemann 面是无穷多叶的，见图 2.7 .

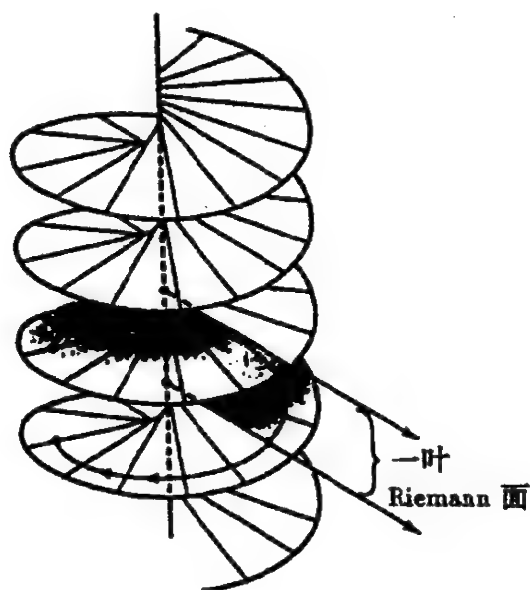


图 2.7 $w = \ln z$ 的 Riemann 面

练习 2.11 证明：如果 $f(z)$ 是 G 内的解析函数，且 $f(z)$ 的模或辐角为常数，则 $f(z)$ 必为常数.

3. 其他多值函数

初等函数中还有反三角函数和一般的幂函数

$$\arcsin z = \frac{1}{\mathrm{i}} \ln\left(\mathrm{i}z+\sqrt{1-z^2}\right), \tag{2.13}$$

$$\arccos z = \frac{1}{\mathrm{i}} \ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right), \tag{2.14}$$

$$\arctan z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \ln \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, \tag{2.15}$$

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln z} \quad (\alpha\text{为任意复数}), \tag{2.16}$$

它们也都是多值函数. 而且，不过是对数函数或对数函数与根式函数的组合，因此它们的多值性可以根据这两种基本的多值函数来讨论. 对于 $\arctan z$ 和 z^α 来说，只涉及到对数函数，因而它们的多值性就只需重复上面的讨论. 对于 $\arcsin z$ 和 $\arccos z$ 来说，由于同时涉及到两种多值函数，因而比较麻烦. 这里就不一一讨论了.

*2.5 解析函数的变换性质

容易理解，函数的解析性是讨论复变函数的微积分的最基本要求. 但也容易以为，函数的解析性似乎只是对复变函数的非常简单的限制. 事实上并非如此. 解析性对于函数施加了很强的限制. 这从 Cauchy-Riemann 方程已经可以看出一些端倪. 从函数的解析性出发，可以导出函数的许多重要特性. 复变函数理论的主要研究对象，就是解析函数. 我们将在以后的各章中，逐步介绍解析函数的方方面面. 这一节，就侧重于从几何的角度来讨论解析函数的应用. 这本来是解析函数理论的很重要的一个方面，但由于篇幅的限制，本书只能作一个初步的介绍.

复变函数代表了一个变换，或称映射. 在变换 $\zeta = f(z)$ 之下，z 平面上的一点就变换为 ζ 平面上的相应一点. 如果函数 $\zeta = f(z)$ 是连续的，z 点邻域内的一点当然也应该变为相应的 ζ 点的邻域内的一点. 但是，z 平面上的一个区域，是否也变换为 ζ 平面上

的一个区域，区域的边界是否还变换为区域的边界，并不是任何复变函数都能够保证做到的．我们可以举出许多反例．例如，函数 $\zeta=\mathrm{Re}\,z$ 就把整个 z 平面变换为 ζ 平面上的实轴，后者根本就不构成一个区域．这里，我们不加证明地介绍一个结论：**解析函数可以保证 z 平面上的一个区域还变换为 ζ 平面上的一个区域，区域的边界还变换为区域的边界，甚至边界的方向也保持不变．** 换句话说，**边界的内部区域仍然变换为相应的边界的内部区域．**

设 $\zeta=f(z)$ 在区域 G 内解析，z_0 为 G 内一点．$\zeta=f(z)$ 代表了一个变换 (映射)．它把 z 平面上的区域 G 映射为 ζ 平面上的区域 G^*，把 z_0 点映射为相应的 $\zeta_0=f(z_0)$ 点．在 2.1 节中曾经提到，当 $f'(z_0)\neq 0$ 时，$|f'(z_0)|$ 是把 z_0 处的微元 $\mathrm{d}z$ 映射为 ζ_0 处的微元 $\mathrm{d}\zeta$ 的伸缩率 (放大倍数)，而 $\arg f'(z_0)$(这里不妨限制在主值范围内)，则给出映射的偏转角，即 $\mathrm{d}\zeta$ 与 $\mathrm{d}z$ 的辐角差．可以设想，如果在 z 平面上有两条曲线，l_1 和 l_2，相交于 z_0，那么，在 ζ 平面上，必然也有相应的两条曲线，l_1' 和 l_2'，相交于 ζ_0 点．由于

$$f'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

的数值，包括 $|f'(z_0)|$ 和 $\arg f'(z_0)$，和 z 趋于 z_0 的方式无关，因此，和 l_1 与 l_2 相比，l_1' 与 l_2' 应该偏转了同样大小的角度．这就是说，在解析函数所代表的变换之下，两条曲线之间的夹角保持不变 (见图 2.8)．正是因为这个原因，解析函数所代表的变换 (映射) 就称为保角变换 (保角映射)．当然，在不同点处，即使 $f'(z)$ 均不为 0，变换都具有保角性，但由于它的数值不同，因而各处的伸缩率和偏转角均不同，所以，区域的几何形状就会发生变化．我们正是

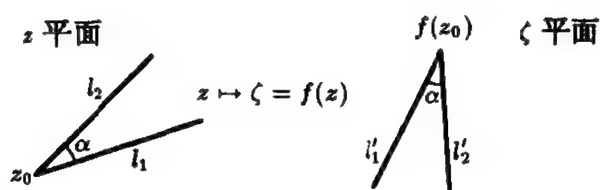


图 2.8　解析函数所代表的变换的保角性

要选择合适的保角变换，把 z 平面上的形状比较复杂的区域变换为 ζ 平面上的形状比较简单的区域．例如，把 z 平面上的两个不相交的圆所围成的区域变换为 ζ 平面上的同心圆所围成的区域．

解析函数所代表的变换的保角性，是有条件的，这就是只在 $f'(z) \neq 0$ 处才一定有保角性．在 $f'(z) = 0$ 的点，由于 $\arg f'(z)$ 没有确定值，因而变换可能是保角的，也可能是不保角的．巧妙地利用变换在 $f'(z) = 0$ 处的不保角性，更可以把 (z 平面上的) 复杂图形变换为 (ζ 平面上的) 简单图形．例如，可以把把多边形变为圆．

下面介绍几个初等函数代表的保角变换．

例 2.2　函数 $\zeta = az$(常数 $a \neq 0$) 在全平面解析，因此代表了一个在全平面都保角的变换．它是把 z 平面变为 ζ 平面的放大 (准确说，是放大加旋转的) 变换，放大倍数为 $|a|$，同时旋转 $\arg a$．由于 $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}z =$ 常数a，所以任何几何图形在这个变换下的形状都保持不变，只是大小和方位发生变化．

例 2.3　函数 $\zeta = z + b\,(b =$ 常数) 也在全平面解析，因此也代表了一个全平面上的保角变换．它是一个平移变换．将 ζ 平面和 z 平面上的对应点或图形相比较，只是简单地整体平移．

例 2.4　函数 $\zeta = 1/z$ 在扩充了的 z 平面上除 $z = 0$ 点外处处解析，因此它代表了一个 $z = 0$ 点可能除外的保角变换．它把 z 平面上的单位圆内变换为 ζ 平面上的单位圆外，相应地， $z = 0$ 变为 $\zeta = \infty$(见图 2.9)．从直观上也可以判断，这个变换在 $z = 0$ 也保角：在 $z = 0$ 点相交的两条直线，变换到 ζ 平面上后，则是相交于

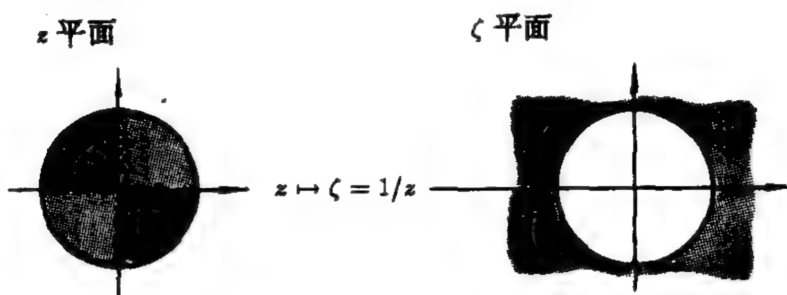


图 2.9　变换 $\zeta = 1/z$

$\zeta = \infty$ 点的两条直线，交角不变.

练习 2.12　证明：在变换 $\zeta = 1/z$ 之下，z 平面上的圆

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Dy + E = 0$$

仍为 ζ 平面上的圆.

例 2.5　变换 $\zeta = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 称为分式线性变换，它不外乎是上述三个变换的组合：

$$\zeta = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)\frac{1}{cz+d},$$

因此，它也是一个全平面上的保角变换. 特别是，在分式线性变换下，圆仍保持为圆. 由于

$$\zeta = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\frac{z+b/a}{z+d/c},$$

有意义的常数只有三个. 另一方面，也正好是三个点决定一个圆. 所以，通过指定 z 平面一个圆周上的三个点以及 ζ 平面的对应位置，就可以完全确定一个分式线性变换. 图 2.10 给出了两个特殊的分式线性变换.

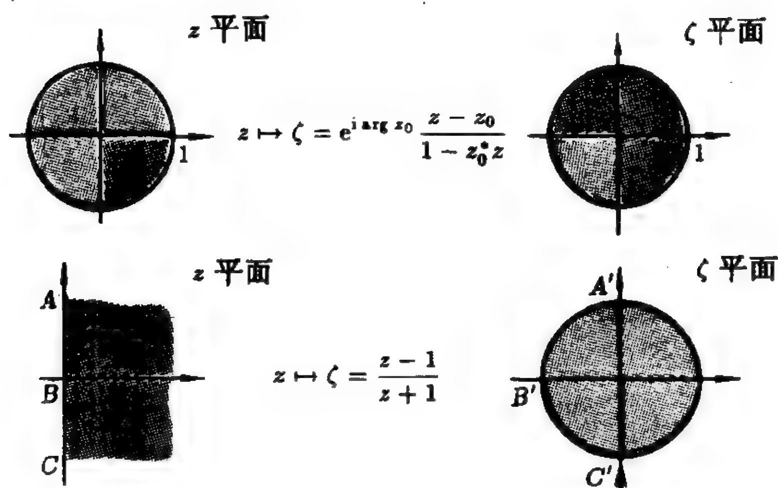


图 2.10　分式线性变换

例 2.6　函数 $\zeta = z^n$ 也在全平面解析. 但是，它不同于前面的几个变换：它把 z 平面上的扇形区域 $0 < \arg z < 2\pi$ 变为 ζ 平面上

的 $0<\arg\zeta<2n\pi$，因而把一叶 z 平面变换为 n 叶 ζ 平面. 它把 z 平面上的扇形区域 $0<\arg z<2\pi/n$ 变为平面上的 $0<\arg\zeta<2\pi$. 注意，后者不是整个 ζ 平面，而是沿正实轴割开的 ζ 平面. 这个变换在 $z=0$ 点并不保角. 图 2.11 给出了 $n=2$ 的特殊情形.

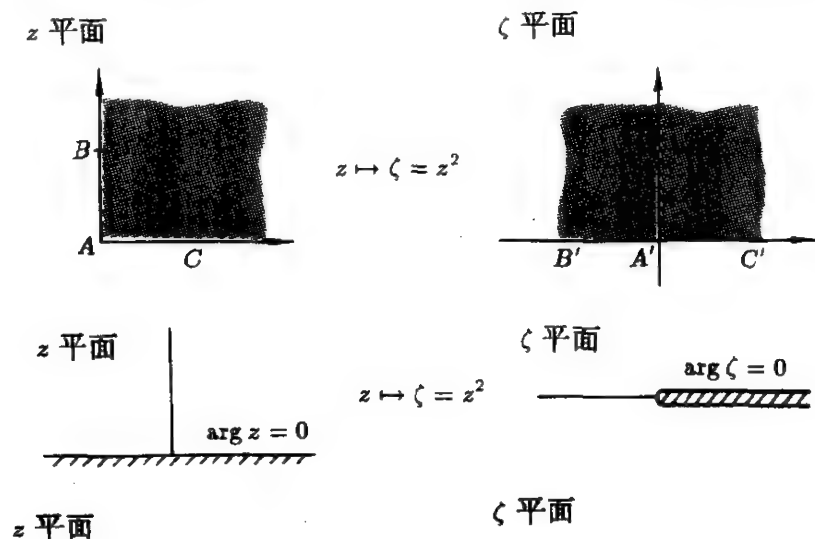


图 2.11　变换 $\zeta=z^2$. 注意在 $z=0$ 点不保角

例 2.7　函数 $\zeta=\mathrm{e}^z$ 也代表了一个全平面上的保角变换 (见图 2.12). 特别是，它把 z 平面上的带形区域 $0<\operatorname{Im}z<2\pi$(或其他平行于实轴且宽度为 2π 的任意带形区域) 变换为整个 ζ 平面.

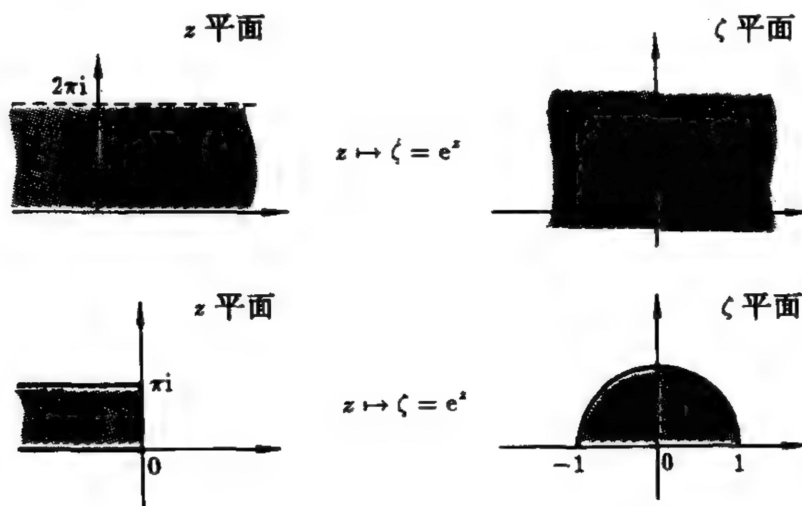


图 2.12　变换 $\zeta=\mathrm{e}^z$

将保角变换应用于解决实际问题，不仅涉及到区域形状的变换，而且还要涉及到数学表述形式 (例如微分方程) 的变换. 可以想像，只有在区域的形状既变得很简单，微分方程的形式也没有变得更复杂的条件下，保角变换才具有真正的实用价值.

就本课程而言，我们特别有兴趣于讨论二维 Laplace 算符

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \tag{2.17}$$

在解析函数 $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta = f(z)$ 所代表的变换 $(x, y) \mapsto (\xi, \eta)$ 下的变化. 根据偏微商的链式法则，可以得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}\right] \\
&= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}\right] \\
&\quad + \frac{\partial \eta}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right] \\
&= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
&\quad + 2\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}.
\end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial \eta}, \\
\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\
&\quad + 2\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right] \frac{\partial}{\partial \xi} + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right] \frac{\partial}{\partial \eta} \\ &\quad + 2\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}.\end{aligned}$$

再利用练习 2.2 中的结果及 (2.4) 和 (2.5) 式，就能得到

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= \left|f'(z)\right|^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right].\end{aligned} \tag{2.18}$$

这个结果表明：在解析函数 $\zeta = f(z)$ 所代表的保角变换之下，二维 Laplace 方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] u(x,y) = 0, \tag{2.19}$$

在 $f'(z) \neq 0$ 的点，仍保持为二维 Laplace 方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right] u\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big) = 0; \tag{2.20}$$

二维 Poisson 方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] u(x,y) = \rho(x,y), \tag{2.21}$$

在变化后也仍然是二维 Poisson 方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right] u\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big) = \varrho(\xi,\eta), \tag{2.22}$$

其中

$$\varrho(\xi,\eta) = \frac{1}{|f'(z)|^2}\rho\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big). \tag{2.23}$$

练习 3.13 证明：在解析函数 $\zeta=\xi+\mathrm{i}\eta=f(z)$ 所代表的保角变换之下，面积元的变化公式是

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|f'(z)\right|^{-2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

因此，如果把 Poisson 方程设想为平面静电场的方程，非齐次项是面电荷密度，则电荷守恒，

$$\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\varrho(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.$$

同样，在解析函数 $\zeta=f(z)$ 所代表的保角变换之下，二维 Helmholtz 方程

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]u(x,y)+k^2u(x,y)=0 \tag{2.24}$$

在 $f'(z)\neq 0$ 的点，也保持为二维 Helmholtz 方程，

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right]&u\big(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\big)\\&+\frac{k^2}{|f'(z)|^2}u\big(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\big)=0.\end{aligned} \tag{2.25}$$

这样，在应用了保角变换后，就可以把形状比较复杂的区域内的 Laplace 方程、 Poisson 方程或 Helmholtz 方程的求解问题，转换为形状比较简单的区域 (例如，圆) 内的求解问题. 在本书的数学物理方程部分将讨论这些方程的求解问题.

第三章　复 变 积 分

3.1　复 变 积 分

复变积分是复数平面上的线积分. 设 C 是复平面上的曲线,函数 $f(z)$ 在 C 上有定义. 如图 3.1 ,把曲线 C 任意分割为 n 段, 分点为

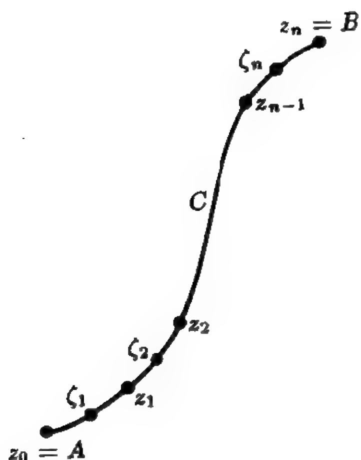


图　3.1

$$z_0 = A, z_1, z_2, \cdots, z_n = B,$$

ζ_k 是 $z_{k-1} \to z_k$ 段上的任意一点, 作和数

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\,(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

若当 $n \to \infty$, 使得 $\max|\Delta z_k| \to 0$ 时, 此和数的极限存在, 且与 ζ_k 的选取无关, 则称此极限值为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分, 记为

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k. \tag{3.1}$$

一个复变积分实际上是两个实变线积分的有序组合

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_C (u + \mathrm{i}v)\,(\mathrm{d}x + \mathrm{i}\,\mathrm{d}y) \\ &= \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\int_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y).\end{aligned} \tag{3.2}$$

因此, 根据实变线积分的知识, 可以知道, 如果 C 是分段光滑曲线, $f(z)$ 是 C 上的连续函数, 则复变积分一定存在.

和实变积分相似, 复变积分具有下列性质:

1. 如果积分 $\int_C f_1(z)\mathrm{d}z, \int_C f_2(z)\mathrm{d}z, \cdots, \int_C f_n(z)\mathrm{d}z$ 都存在，则

$$\int_C \left[f_1(z)+f_2(z)+\cdots+f_n(z)\right]\mathrm{d}z$$
$$=\int_C f_1(z)\,\mathrm{d}z+\int_C f_2(z)\,\mathrm{d}z+\cdots+\int_C f_n(z)\,\mathrm{d}z;$$

2. 若 $C=C_1+C_2+\cdots+C_n$ ，则

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z+\cdots+\int_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C f(z)\,\mathrm{d}z;$$

3. $\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z=-\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ ，其中 C^- 表示 C 的逆向；

4. $\int_C af(z)\,\mathrm{d}z=a\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ ，其中 a 为常数；

5. $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right|\le\int_C |f(z)|\,|\mathrm{d}z|$ ；

6. $\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right|\le Ml$ ，其中 M 为 $|f(z)|$ 在 C 上的上界， l 为 C 的长度.

显然，复变积分的数值，不仅依赖于被积函数和积分路径的端点，而且还依赖于积分路径. 对于给定的一个被积函数，当端点固定时，对于不同的积分路径，积分值一般是不同的.

例 3.1 求 $\int_C \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z$ ， C 为 (i) 沿实轴由 $0\to1$ ，再平行于虚轴 $1\to1+\mathrm{i}$ ； (ii) 沿虚轴由 $0\to\mathrm{i}$ ，再平行于实轴 $\mathrm{i}\to1+\mathrm{i}$ ； (iii) 沿直线 $0\to1+\mathrm{i}$.

解 对于 (i) ，

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \mathrm{i}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}+\mathrm{i};$$

对于 (ii) ，

$$\int_C \mathrm{Re}\,z\,\mathrm{d}z=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2};$$

对于 (iii)，

$$\int_C \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (1+\mathrm{i})t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}).$$

3.2 单连通区域的 Cauchy 定理

Cauchy 定理讨论的是积分值与积分路径之间的关系. 这和涉及的区域有关. 下面区别这两种区域：

- 单连通区域：在区域中作任何简单的闭合围道，围道内的点都属于该区域；
- 复连通区域，或称多连通区域.

图 3.2 给出了这两种区域的示意图.

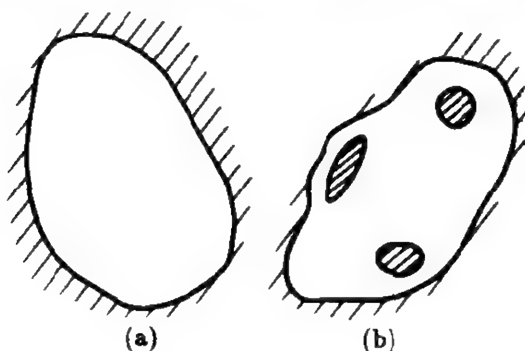


图 3.2 单连通区域与复连通区域

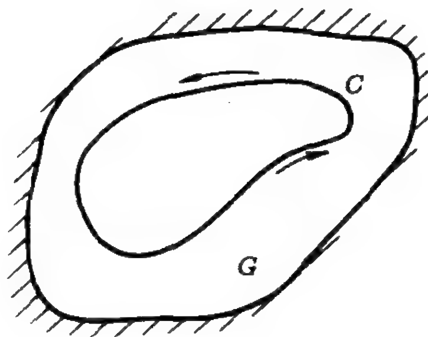


图 3.3 单连通区域的 Cauchy 定理

单连通区域的 Cauchy 定理 如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 $\overline{G}$ 中解析，则沿 $\overline{G}$ 中任何一个分段光滑的闭合围道 C(见图 3.3) 有

$$\boxed{\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,} \tag{3.3}$$

这里的 C 也可以是 $\overline{G}$ 的边界.

证 为简单起见，下面在更强的条件下证明这个定理①. 附

① 严格的证明见参考书目 [3]，第四章，§2；或 L. A. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill Book Co., 1979 (中译本：《复分析》，张立，张靖译，上海科技出版社，1984)，第四章.

加的条件是 $f'(z)$ 在 $\overline{G}$ 中连续. 以后 (3.5 节) 将会看到，只要 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 中解析，即 $f'(z)$ 存在，则 $f''(z)$ 也存在， $z \in \overline{G}$ ，因而 $f'(z)$ 连续，即四个偏导数 $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$ 和 $\partial v/\partial y$ 连续. 在此条件下可以应用 Green 公式

$$\oint_C \left[P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y\right] = \iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

于

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_C \left[u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\right] + \mathrm{i}\oint_C \left[v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y\right],$$

而将上面的闭合围道积分化为面积分

$$\begin{aligned}
\oint_C \left(u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\right) &= -\iint\limits_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\
\oint_C \left(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y\right) &= \iint\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

但根据 Cauchy-Riemann 方程，右端两个积分中的被积函数均为 0，故有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \quad \square$$

从上面的证明可以看出，由于 Green 公式的要求，这里所说的单连通区域，只能是一个有界区域，即不能是包含 ∞ 点在内的 (无界) 区域. 以后我们会看到，即使 $f(z)$ 在 ∞ 点解析，它绕 ∞ 点一周的积分也可以并不为 0 .

Cauchy 定理还可以减弱为：若 $f(z)$ 在单连通区域 G 内解析，在闭区域 $\overline{G} = G + C$ 中连续. 证明从略.

思考题 对于任一解析函数的实部或虚部，Cauchy 定理仍成立吗？如果成立，试证明之. 如果不成立，试说明理由，并举一例.

由 Cauchy 定理立即可以得到下面的推论：

推论 若 $f(z)$ 在单连通区域 $\overline{G}$ 中解析，则复变积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 与路径无关.

证 如图 3.4 所示，取 $\overline{G}$ 中由 A 到 B 的任意两条曲线 C_1 和 C_2，则按 Cauchy 定理，有

$$\oint_{C_1+C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

所以

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z. \quad \square$$

既然在单连通区域中解析函数的积分与路径无关，因此，如果固定起点 z_0，而令终点 z 为变点，则作为积分上限的函数

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z),$$

是单连通区域 G 内的单值函数，称为 $f(z)$ 的不定积分.

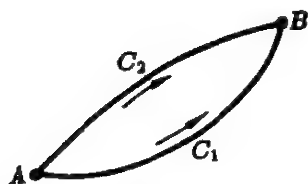


图 3.4

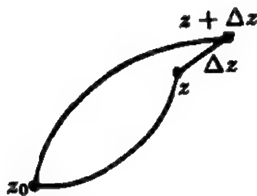


图 3.5

定理 如果函数 $f(z)$ 在单连通区域 G 内解析，则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z \tag{3.4}$$

也在 G 内解析，并且

$$F'(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z = f(z). \tag{3.5}$$

证 只要直接求出 $F(z)$ 的导数即可. 为此，设 z 是 G 内一点，$z+\Delta z$ 是它的邻点，如图 3.5，则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta, \quad F(z+\Delta z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

因为积分与路径无关，所以

$$\frac{\Delta F}{\Delta z}=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

由此可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta-f(z)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left[f(\zeta)-f(z)\right]\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}\left|f(\zeta)-f(z)\right|\cdot\left|\mathrm{d}\zeta\right|.\end{aligned}$$

由于 $f(z)$ 是连续的，故对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|\zeta-z|<\delta$ 时， $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$，所以

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right| \leq \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z|=\varepsilon,$$

即得

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta z}=f(z).$$

这样就证明了 $F(z)$ 在 G 内可导，并且 $F'(z)=f(z)$． □

在复变函数中，除了不定积分外，也还有原函数的概念．

原函数 如果函数 $\Phi(z)$ 的导数 $\Phi'(z)=f(z)$，则 $\Phi(z)$ 称为 $f(z)$ 的原函数．上面定义的 $f(z)$ 的不定积分就是 $f(z)$ 的一个原函数．对于给定的一个函数 $f(z)$ 来说，原函数不是唯一的．任意两个原函数之间只相差一个常数．这是因为，如果 $\Phi_1(z)$ 与 $\Phi_2(z)$ 都是 $f(z)$ 的原函数，则

$$\Phi_1'(z)=f(z),\qquad \Phi_2'(z)=f(z).$$

所以， $\left[\Phi_1(z)-\Phi_2(z)\right]'=0$，

$$\Phi_1(z)-\Phi_2(z)=C. \tag{3.6}$$

知道了被积函数的原函数，可使复变积分的计算大为简化，因为例如，设 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 的一个原函数，则 $f(z)$ 的不定积分

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z=\Phi(z)+C.$$

但是，显然有

$$F(z_0)=\Phi(z_0)+C=0,\qquad C=-\Phi(z_0).$$

所以

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z=\Phi(z)-\Phi(z_0). \tag{3.7}$$

例 3.2 计算积分 $\int_a^b z^n\mathrm{d}z$ ，n 为整数.

解 当 n 为自然数时，z^n 在全平面解析，$\dfrac{1}{n+1}z^{n+1}$ 是它的一个原函数. 因此，对于 z 平面上的任意一条积分路线，均有

$$\int_a^b z^n\mathrm{d}z=\frac{1}{n+1}\left[b^{n+1}-a^{n+1}\right]. \tag{3.8}$$

当 $n=-2,-3,-4,\cdots$ 时，z^n 在不包含 $z=0$ 点在内的任意一个区域内解析，其原函数仍可取为 $\dfrac{1}{n+1}z^{n+1}$. 因此，仍有

$$\int_a^b z^n\mathrm{d}z=\frac{1}{n+1}\left[b^{n+1}-a^{n+1}\right]. \tag{3.8$'$}$$

当 $n=-1$ 时，z^{-1} 也是在不包含 $z=0$ 在内的任一区域内解析，但其原函数应为 $\ln z$. 因此，在不包含 $z=0$ 的任一单连通区域内，

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}z}{z}=\ln b-\ln a. \tag{3.9}$$

这里需要特别注意的是，在一个单连通区域内，上面的积分当然是与路径无关的. 但是对于不同的单连通区域，同样的起点与终点也还会给出不同的积分值. 从计算的过程看，这里的原函数是多值函数，因此积分值与由 a 变化到 b 的方式有关. 当限制在不含 $z=0$ 的一个单连通区域内时，就是把 $\ln z$ 限制在某一个单值分枝

内，故积分值 $\ln b-\ln a$ 是唯一确定的. 而对于不同的单连通区域，就可能对应于 $\ln z$ 的不同单值分枝，因而积分值也就可能不同.

3.3 复连通区域的 Cauchy 定理

上一节讨论的是单连通区域的 Cauchy 定理，要求被积函数在单连通区域内解析. 如果被积函数在区域内有奇点，则单连通区域的 Cauchy 定理不适用. 为了保证被积函数的解析性而把奇点排除在讨论的区域之外，我们便会遇到复连通区域.

复连通区域的 Cauchy 定理 如果 $f(z)$ 是复连通区域 $\overline{G}$ 中的单值解析函数，则

$$\boxed{\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z,} \tag{3.10}$$

其中 $C_0,C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是构成复连通区域 $\overline{G}$ 的边界的各个分段光滑闭合曲线，$C_1,C_2,\cdots,C_n$ 都包含在 C_0 的内部，而且所有的积分路径走向相同.

证 如图 3.6，不妨取 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n$ 均为逆时针方向. 作适当的割线把 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 和 C_0 连结起来，从而得到一个单连通区域 $\overline{G'}$，$f(z)$ 在单连通区域 $\overline{G'}$ 内是解析的，因而可以应用单

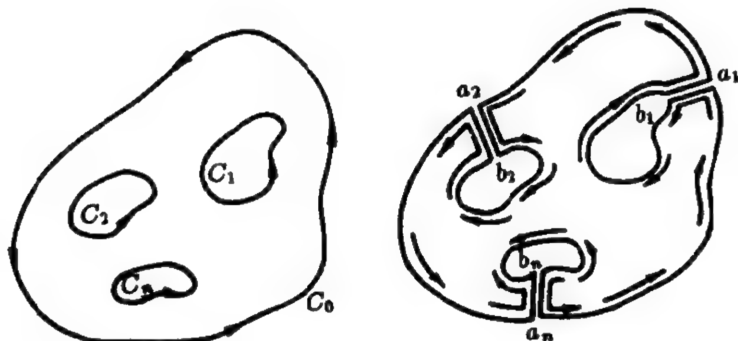


图 3.6 复连通区域的 Cauchy 定理

连通区域的 Cauchy 定理，

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{a_1}^{b_1} f(z)\,\mathrm{d}z+\oint_{C_1^-} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{b_1}^{a_1} f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$+\int_{a_2}^{b_2} f(z)\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2^-} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{b_2}^{a_2} f(z)\,\mathrm{d}z+\cdots$$

$$+\int_{a_n}^{b_n} f(z)\,\mathrm{d}z+\oint_{C_n^-} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{b_n}^{a_n} f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

但由于 $f(z)$ 在 $\overline{G'}$ 内单值，故沿同一割线两岸的积分值互相抵消，

$$\int_{a_i}^{b_i} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{b_i}^{a_i} f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

所以

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z+\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i^-} f(z)\,\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z=-\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i^-} f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z.\quad\square$$

和单连通区域的情形一样，显然这个定理的条件也可以减弱为在复连通区域 G 内解析，在闭区域 $\overline{G}$ 中连续.

例 3.3 计算 $\oint_C z^n\mathrm{d}z$ 值，n 为整数，C 的走向为逆时针方向.

解 当 n 为自然数时，显然，按照单连通区域的 Cauchy 定理

$$\oint_C z^n\mathrm{d}z=0.$$

当 n 为负整数时，如果 C 内不含 $z=0$，则也有

$$\oint_C z^n\mathrm{d}z=0.$$

如果 C 内含有 $z=0$，则按复连通区域的 Cauchy 定理，有

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} z^n \mathrm{d}z$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\mathrm{i}\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = -1; \\ 0, & n = -2, -3, -4, \cdots. \end{cases}$$

总结上面的结果，就有

$$\oint_C z^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = -1,\ \text{且}C\text{内含有}z = 0; \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases} \tag{3.11}$$

或者，更一般地，

$$\oint_C (z-a)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n = -1,\ \text{且}C\text{内含有}z = a; \\ 0, & \text{其他情形}. \end{cases} \tag{3.12}$$

3.4 Cauchy 积分公式

前面讨论的 Cauchy 定理，从一个侧面反映了解析函数的一个基本特性：解析函数在它的解析区域内，各点的函数值是密切相关的. Cauchy-Riemann 方程可以说是这种关联的微分形式，而 Cauchy 定理则是它的积分形式. 这种关联性在 Cauchy 积分公式中也清楚地表现出来.

有界区域的 Cauchy 积分公式 设 $f(z)$ 是区域 $\overline{G}$ 中的单值解析函数，$\overline{G}$ 的边界 C 是分段光滑曲线，a 为 G 内一点，则

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z,} \tag{3.13}$$

其中积分路线沿 C 的正向.

证 根据上一节的结果，

$$\oint_C \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i},$$

故有

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(a)}{z-a}dz.$$

所以

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz-f(a)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right|.$$

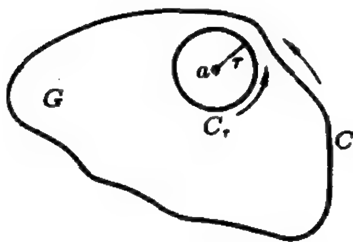


图 3.7 有界区域的 Cauchy 积分公式

在 G 内作圆 $|z-a|=r$(见图 3.7)，根据复连通区域的 Cauchy 定理,

$$\oint_C\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz=\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz,$$

所以

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz-f(a)\right|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{|z-a|=r}\frac{|f(z)-f(a)|}{|z-a|}|dz|$$
$$=\frac{1}{2\pi}\oint_{|z-a|=r}|f(z)-f(a)|\,d\theta.$$

因为 $f(z)$ 在 a 点连续，故任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $|z-a|<\delta$ 时，必有 $|f(z)-f(a)|<\varepsilon$. 因此，只要上面的 $r<\delta$，即有

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz-f(a)\right|\leq\frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon\cdot 2\pi.$$

但是左方的值与 ε 无关，故必有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-a}dz=f(a).\quad\square$$

无界区域的 Cauchy 积分公式 上面的证明只能适用于有界区域，因为在证明过程中用到了

$$\oint_C\frac{dz}{z-a}=2\pi i.$$

但是，很容易推出无界区域的结果. 此时，需要假设 $f(z)$ 在简单

闭合围道 C 上及 C 外 (包括无穷远点) 单值解析，而来计算

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z,$$

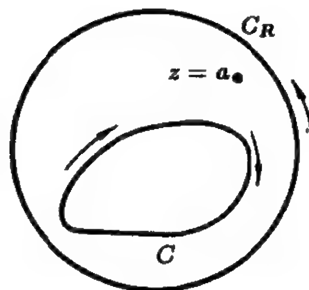


图 3.8　无界区域的 Cauchy 积分公式

其中 a 为 C 外一点，积分路线 C 的走向是顺时针方向，即绕无穷远点的正向，如图 3.8．现在，在 C 外再作一个以原点为圆心， R 为半径的大圆弧 C_R ，这样，对于 C 和 C_R 所包围的复连通区域，根据有界区域的 Cauchy 积分公式，有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=f(a),$$

这里积分路线 C_R 的走向是逆时针方向．只要 R 足够大，这个结果当然与 R 的具体大小无关，于是，可令 $R\to\infty$ ，而得到

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z=f(a)-\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C_R} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z\right]. \tag{3.14}$$

为了计算沿大圆弧 C_R 的积分的极限值，需要用到下列引理．

引理 3.1　设 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内连续，当 $\theta_1\le\arg z\le\theta_2$ ， $z\to\infty$ 时， $zf(z)$ 一致地趋近于 K ，则

$$\boxed{\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z=\mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1),} \tag{3.15}$$

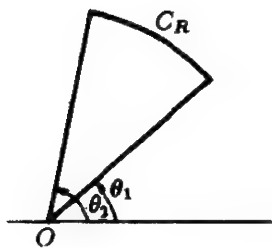


图　3.9

其中 C_R 是以原点为圆心， R 为半径、夹角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧， $|z|=R,\ \theta_1\le\arg z\le\theta_2$ (见图 3.9)．

证　因为 $\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)$ ，所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z-\mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1)\right| &= \left|\int_{C_R}\left[f(z)-\frac{K}{z}\right]\,\mathrm{d}z\right| \\ &= \left|\int_{C_R}\left[zf(z)-K\right]\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \le \int_{C_R}\left|zf(z)-K\right|\cdot\frac{|\mathrm{d}z|}{|z|}.\end{aligned}$$

由于当 $\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$， $z \to \infty$ 时， $zf(z)$ 一致地趋近于 K，这意味着任给 $\varepsilon > 0$，存在 (与 $\arg z$ 无关的) $M(\varepsilon) > 0$，使当 $|z| = R > M$ 时， $|zf(z) - K| < \varepsilon$． 所以

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z - \mathrm{i}K\big(\theta_2 - \theta_1\big)\right| \le \varepsilon(\theta_2 - \theta_1),$$

即

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}K\big(\theta_2 - \theta_1\big). \quad \square$$

把这个引理应用到 (3.14) 式，就有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = f(a) - K, \tag{3.16}$$

其中

$$K = \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{f(z)}{z-a} = f(\infty). \tag{3.17}$$

当 $K = 0$ 时，就得到了 **无界区域的 Cauchy 积分公式**：如果 $f(z)$ 在简单闭合围道 C 上及 C 外解析，且当 $z \to \infty$ 时， $f(z)$ 一致地趋于 0，则 Cauchy 积分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z \tag{3.18}$$

仍然成立，此处 a 为 C 外一点，积分路线 C 为顺时针方向．

3.5 解析函数的高阶导数

从 Cauchy 积分公式，可以推断出一个重要结论：如果 $f(z)$ 在 $\overline{G}$ 中解析，则在 G 内 $f(z)$ 的任何阶导数 $f^{(n)}(z)$ 均存在，并且

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,} \tag{3.19}$$

其中 C 是 $\overline{G}$ 的正向边界， z 为 G 内任意一点，如图 3.10．

证 首先求 $f'(z)$. 因为

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$
$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{1}{h}\oint_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-z-h}-\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right]\mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta,$$

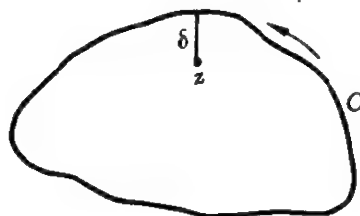


图 3.10 高阶导数公式

取极限 $h\to 0$，左端为 $f'(z)$，而右端被积函数的极限即为 $f(\zeta)/(\zeta-z)^2$. 为了证明在积分号下求极限是合法的，可以研究

$$\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta-\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta=h\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 C 上连续，故在 C 上有 $|f(\zeta)|\le M$. 设 z 到 C 的最短距离为 δ， l 为 C 的长度，则有

$$\left|\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta-\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right|\le h\cdot\frac{Ml}{\delta^2(\delta-h)}\to 0.$$

因此，积分号下求极限合法，

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta.$$

同样，可以求出

$$\begin{aligned}f''(z)&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(z+h)-f'(z)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{1}{h}\oint_C\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z-h)^2}-\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\right]\mathrm{d}\zeta\\&=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{2\zeta-2z-h}{(\zeta-z-h)^2(\zeta-z)^2}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{2!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^3}\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

如此继续，即可求出 $f^{(n)}(z)$. □

这个结果说明，一个复变函数，在一个区域中只要一阶导数存在，则它的任何阶导数都存在，并且都是这个区域内的解析函数. 而在实变函数中并非如此. 我们并不能由 $f'(x)$ 的存在推断出 $f''(x)$ 的存在. 这是因为，复变函数中 $f(z)$ 在一区域中处处可导 (即解析) 是一个很高的要求. 实变函数中 $f'(x)$ 的存在只包含当 x 在数轴上 (一定区间内) 变化时对 $f(x)$ 的要求，而复变函数中 $f'(z)$ 的存在则包含了在二维平面区域上对 $f(z)$ 的要求.

在这个证明过程中， $f(z)$ 的解析性只是体现在： (1) $f(z)$ 可用 Cauchy 积分公式表示；(2)$f(z)$ 在 C 上连续. 因此，重复上面的步骤，就可以证明：在一条分段光滑的 (闭合或不闭合) 曲线 C 上连续的函数 $\phi(\zeta)$ 所构成的积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{\phi(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \tag{3.20}$$

(称为 Cauchy 型积分) 是曲线外点 z 的解析函数， $f(z)$ 的导数可以通过在积分号下对 z 求导数得到，

$$f^{(p)}(z)=\frac{p!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{\phi(\zeta)}{(\zeta-z)^{p+1}}\mathrm{d}\zeta. \tag{3.21}$$

3.6 Cauchy 积分公式的几个重要推论

除了解析函数的高阶导数公式以外，从 Cauchy 积分公式还可以导出许多其他重要推论，进一步揭示出解析函数的重要特性.

Morera 定理[①] 设 $f(z)$ 在区域 $\overline{G}$ 中连续，如果对于 $\overline{G}$ 中的任何闭合围道 C，都有

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0,$$

则 $f(z)$ 在 G 内解析.

---

① 有时也把这个定理看成是 Cauchy 定理的逆定理.

证 因为对于 $\overline{G}$ 中的任何闭合围道 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，故积分 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$ 与路径无关，因此，在

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \big[f(\zeta) - f(z)\big]\mathrm{d}\zeta$$

中，积分路径可取为直线. 由 $f(z)$ 的连续性，即可得到

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \le \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\varepsilon\cdot|\Delta z| = \varepsilon \to 0.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z = f(z),$$

即 $F(z)$ 解析，其导数为 $f(z)$. 但根据 3.5 节 (高阶导数的存在性) 即知， $f(z)$ 在 G 内也必解析. □

Cauchy 不等式 设函数 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{G}$ 中解析，则 $f(z)$ 在边界 C 上连续， $|f(z)|$ 在 C 上必有上界、而且达到上界 M . 因此

$$\left|f^{(n)}(z)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{Ml}{d^{n+1}}, \tag{3.22}$$

其中 l 是边界 C 的长度， d 是 z 点到边界的最短距离.

特别是，当边界是以 z 为圆心， R 为半径的圆周时，

$$\boxed{\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!M}{R^n}.} \tag{3.23}$$

这就是 Cauchy 不等式. □

最大模定理 若 $f(z)$ 是闭区域 $\overline{G}$ 中的解析函数，则模 $|f(z)|$ 的最大值在 $\overline{G}$ 的边界上.

证 设 M 为 $|f(z)|$ 在边界 C 上的上界，则根据 (3.32) 式，对于解析函数 $\big[f(z)\big]^m$(m 为正整数)，有

$$|f(z)|^m \le \frac{1}{2\pi}\frac{M^m l}{d}, \qquad |f(z)| \le M\left(\frac{l}{2\pi d}\right)^{1/m}.$$

此式对任意 m 均成立，故可取极限 $m \to \infty$ ，由此即得

$$\boxed{|f(z)| \le M.} \quad \square \tag{3.24}$$

Liouville 定理 如果 $f(z)$ 在全平面解析，而且当 $z \to \infty$ 时，$|f(z)|$ 有界，则 $f(z)$ 是一个常数.

证 以任意有限点 z 为圆心，R 为半径作圆 C_R ，则根据 Cauchy 不等式，有

$$|f'(z)| \le \frac{M_R}{R},$$

M_R 是 $|f(z)$ 在圆周 C_R 上的上界. 因为 $z \to \infty$ 时 $|f(z)|$ 有界，故 $R \to \infty$ 时 M_R 有界，

$$\lim_{R\to\infty} \frac{M_R}{R} = 0.$$

所以

$$|f'(z)| = 0 \quad 即 \quad f'(z) = 0,$$

由此即证得

$$\boxed{f(z) = 常数.} \quad \square \tag{3.25}$$

注意，这里事先对函数在无穷远点是否解析，并未作任何限定. Liouville 定理告诉我们，在满足定理的条件下，函数在无穷远点也一定解析.

均值定理 解析函数 $f(z)$ 在解析区域 G 内任意一点 a 的函数值 $f(a)$ ，等于以 a 为圆心，完全位于 G 内的任一圆周上的函数值的平均，即

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(a + R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{d}\theta.} \tag{3.26}$$

证 在 Cauchy 积分公式

$$f(a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} \mathrm{d}z$$

中，取 C 为以 a 为圆心，R 为半径的圆 (但要求完全在 G 内)，故

在 C 上， $z-a=Re^{i\theta}$ ，所以

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a+Re^{i\theta}\right)\mathrm{d}\theta. \quad \square$$

*3.7 Poisson 公式

Cauchy 积分公式告诉我们，对于区域 $\overline{G}$ 中的解析函数 $f(z)$，边界上的数值就完全决定了函数在 G 内任意一点的值. 考虑一个特殊的情形，即 $f(z)$ 在上半平面解析，这时，就有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C 是上半平面内的一个简单闭合围道，且 z 为 C 内任意一点. 现在取一个特殊的围道，它由实轴上的线段 $[-R, R]$ 和以原点为圆心，R 为半径的半圆弧 C_R 组成 (见图 3.11) . 只要 R 足够大，则 z 点必然在围道内. 令 $\zeta=\xi+i\eta$，就有

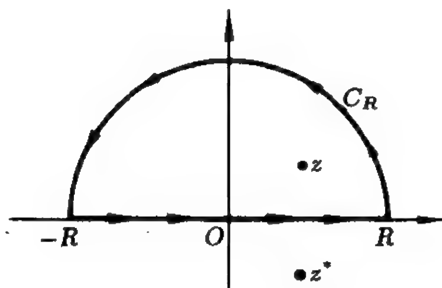


图 3.11　上半平面的 Poisson 公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

现在讨论 $R\to\infty$ 的极限情形. 上式右端第一项的积分将变为无穷积分，如果 $f(z)$ 满足进一步的要求：当 z 在上半平面趋于 ∞ 时 $f(z)$ 一致地趋于 0，那么，根据 3.4 节中的引理 3.1，第二项的积分一定趋于 0 . 这样，就得到

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi. \tag{3.27}$$

于是，只要 $f(z)$ 在上半平面解析，并且当 z 在上半平面趋于 ∞ 时一致地趋于 0，那么，根据它在实轴上的值，就可以唯一地决定它在上半平面任意一点的数值. 更进一步，令 $z=x+iy$, $f(z)=u+iv$，

还可以单独地写出 $f(z)$ 的实部与虚部：

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)+yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi, \tag{3.28}$$

$$v(x,y)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)u(\xi,0)-yv(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi. \tag{3.29}$$

可是，从 2.2 节我们还知道，解析函数的实部和虚部不是互相独立的．由解析函数的实部就可以求出虚部 (反之亦然)，从而可以确定解析函数本身．因此，可以设想，如果只知道解析函数的实部在实轴上的数值，也有可能求出解析函数的虚部在实轴上的数值，从而完全决定函数在上半平面内任意一点 z 的值．为此，考虑 z 的共轭点 z^*．它一定在下半平面，所以

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z^*}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-x+\mathrm{i}y}\mathrm{d}\xi=0, \tag{3.30}$$

或者也分别比较等式两端的实部与虚部，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)u(\xi,0)+yv(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi=0, \tag{3.31}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)-yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi=0. \tag{3.32}$$

将 (3.28) 和 (3.32) 式相加减，就得到

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)v(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \tag{3.33a}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yu(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi. \tag{3.33b}$$

将 (3.29) 和 (3.31) 式相加减，又能得到

$$v(x,y)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \tag{3.34a}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yv(\xi,0)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi. \tag{3.34b}$$

(3.33) 和 (3.34) 诸式的特点是，只根据 $f(z)$ 的实部或虚部之一在实

轴上的数值，便可以完全确定它的实部和虚部在上半平面内任意一点的值. 更进一步，当然也就给出 $f(z)$ 本身在上半平面内任意一点的值

$$f(z) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,0)}{\xi-(x+\mathrm{i}y)}\mathrm{d}\xi \tag{3.35a}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\xi,0)}{\xi-(x+\mathrm{i}y)}\mathrm{d}\xi. \tag{3.35b}$$

而且，将 (3.33) 和 (3.34) 的各式适当组合，或者直接将 (3.27) 和 (3.30) 两式相减，还能得到

$$f(z) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi \tag{3.36a}$$

$$= \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\xi-x)f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\mathrm{d}\xi. \tag{3.36b}$$

(3.33) ~ (3.36) 诸式均称为上半平面的 Poisson 公式. 这些结果说明：如果 $f(z)$ 在上半平面解析，并且当 z 在上半平面趋于 ∞ 时一致地趋于 0，根据它 (或者它的实部或虚部) 在实轴上的数值，就可以唯一地决定它 (包括它的实部和虚部) 在上半平面任意一点的数值.

思考题 我们在 2.2 节中曾经指出，由解析函数的实部 (虚部) 就可以求出虚部 (实部)，但可差一个可加常数. 可是在上面的 (3.33a)、(3.34a) 和 (3.35a)、(3.35b) 诸式中并不出现可加常数，为什么？

下面导出另外一种 Poisson 公式，圆内区域内的 Poisson 公式. 设函数 $f(z)$ 在圆 $|z| \le a$ 中解析，则对于圆内任意一点 $z = re^{\mathrm{i}\phi}, r < a$ (见图 3.12)，根据 Cauchy 积分公式，有

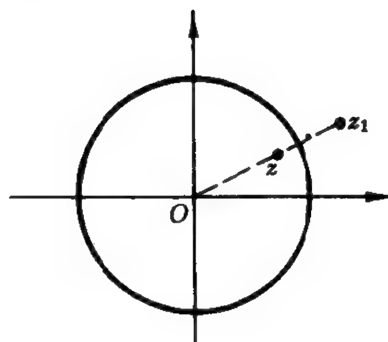


图 3.12 圆内的 Poisson 公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=a}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{a-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)}}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\theta)}}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}f(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta. \tag{3.37}$$

另一方面，对于圆外的点 $z_1=a^2/z^*=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi},\ r_1=a^2/r$ ，也应该有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=a}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_1}\mathrm{d}\zeta$$

$$=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a-r_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\theta)}}{a^2+r_1^2-2ar_1\cos(\phi-\theta)}f(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r-a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\theta)}}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}f(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta$$

$$=0. \tag{3.38}$$

将 (3.37) 和 (3.38) 两式相减，就得到圆内区域的 Poisson 公式

$$f(z)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}\mathrm{d}\theta. \tag{3.39}$$

或者令 $f(z)$ 的实部和虚部分别是 $u(r,\theta)$ 和 $v(r,\theta)$ ，则对它们也有

$$u(r,\phi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{u(a,\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}\mathrm{d}\theta, \tag{3.40}$$

$$v(r,\phi)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{v(a,\theta)}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\theta)}\mathrm{d}\theta. \tag{3.41}$$

第四章　无 穷 级 数

无穷级数，特别是幂级数，是解析函数的最重要的表达形式之一. 事实上，除了代数函数，许多初等函数和特殊函数都是用幂级数定义的.

本章的部分内容，具有复习的性质. 在复变函数理论中，复数级数的许多基本概念，和高等数学中的实数级数是完全相似的. 对于这部分内容，我们将不加证明地叙述一下有关结论.

4.1　复 数 级 数

一个复数级数[①]，

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \tag{4.1}$$

如果它的部分和

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n \tag{4.2}$$

所构成的序列 $\{S_n\}$ 收敛，则称级数 $\sum u_n$ 收敛，而序列 $\{S_n\}$ 的极限 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$，称为级数 $\sum u_n$ 的和；否则，级数 $\sum u_n$ 是发散的.

级数的收敛性，和它的部分和序列的收敛性是完全一致的. 因此，根据序列收敛的充要条件，可以写出级数收敛的充要条件——Cauchy 充要条件：任意给定 $\varepsilon > 0$，存在正整数 n，使对于任

① 令 u_n 的实部和虚部分别为 α_n 与 β_n，则

$$\sum u_n = \sum \alpha_n + \mathrm{i} \sum \beta_n.$$

因此，一个复数级数 $\sum u_n$ 完全等价于两个实数级数 $\sum \alpha_n$ 和 $\sum \beta_n$，反之亦然.

意正整数 p，有

$$\boxed{|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.} \tag{4.3}$$

特别是，令 $p=1$，就得到级数收敛的必要条件

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n=0.} \tag{4.4}$$

从级数收敛的概念可以看出，在不改变求和次序的前提下，可以将收敛级数并项．例如，

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots. \tag{4.5}$$

如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 绝对收敛．绝对收敛的级数一定是收敛的，因为

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|.$$

反之，一个收敛的级数，却不一定是绝对收敛的．

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 是一个实数级数，而且是一个正项级数，所以，高等数学中的任何一种正项级数的收敛判别法都可以用来判别一个复数级数是否绝对收敛．下面列出最常用的几个判别法．

比较判别法　若 $|u_n|<v_n$，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 收敛（即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$绝对收敛）．若 $|u_n|>v_n$，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}v_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 发散．

比值判别法　若存在与 n 无关的常数 ρ，则当 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|<\rho<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；当 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|>\rho>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 发散．

对于实际工作中常用的许多级数，分式 $|u_{n+1}/u_n|$ 的形式往往要比 u_n 的形式简单得多，因此应用比值判别法可以很快地判断 $\sum|u_n|$ 的收敛性．这是比值判别法的明显优点．但是，这里的 ρ 必须存在．如果不能直接给出 ρ 的具体大小的话，那么至少应当确切地证明出 ρ 的存在性．这可能还是比较麻烦的．更方便的当然是使用它的极限形式，即 d'Alembert 判别法．

d'Alembert 判别法 如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_{n+1}/u_n| = l < 1$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 绝对收敛；如果 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_{n+1}/u_n| = l > 1$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 发散.

d'Alembert 判别法是根据 $|u_{n+1}/u_n|$ 的上下极限来判断级数的绝对收敛性，一般说来，求上下极限总要比求比值判别法中的 ρ 来得简单. 但是 d'Alembert 判别法仍然有缺点，这就是用来判别收敛和发散的是两个标准，即用 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_{n+1}/u_n|$ 判断级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 的收敛，而用 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_{n+1}/u_n|$ 判断级数的发散. 因此对于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_{n+1}/u_n| \geq 1$ 及 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_{n+1}/u_n| \leq 1$ 的情形就不能作出判断，除非 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_{n+1}/u_n| = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_{n+1}/u_n| = \lim\limits_{n\to\infty}|u_{n+1}/u_n|$. Cauchy 判别法的优点就是根据同一判据 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_n|^{1/n}$ 来判断级数是否绝对收敛.

Cauchy 判别法 如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_n|^{1/n} < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 收敛；如果 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|u_n|^{1/n} > 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散.

当然，现在对于 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_{n+1}/u_n| = 1$ 的情形仍然无能为力. 对于这种情形，可以有更强的判别法，例如 Gauss 判别法. 第十六章中会用到这种判别法.

绝对收敛级数具有下列性质：

1. 改换次序. 例如，

$$\begin{aligned} & u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots \\ & = u_0 + u_1 + u_2 + u_4 + u_3 + u_6 + u_8 + u_5 + \cdots. \end{aligned} \tag{4.6}$$

2. 特别是，可以把一个绝对收敛级数拆成几个子级数，每个子级数仍绝对收敛. 例如，

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n+1}. \tag{4.7}$$

3. 两个绝对收敛级数之积仍然绝对收敛，

$$\sum_k u_k \cdot \sum_l v_l = \sum_{k,l} u_k v_l. \tag{4.8}$$

这里的乘积是一个二重级数

$$\begin{aligned} & u_0v_0 + u_0v_1 + u_0v_2 + u_0v_3 + \cdots \\ + & u_1v_0 + u_1v_1 + u_1v_2 + u_1v_3 + \cdots \\ + & u_2v_0 + u_2v_1 + u_2v_2 + u_2v_3 + \cdots \\ + & u_3v_0 + u_3v_1 + u_3v_2 + u_3v_3 + \cdots \\ + & \cdots. \end{aligned}$$

其绝对收敛性意味着可以按照任意顺序求和，其值不变. 例如可按 $k+l=n$ 的大小顺序排列，

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \sum_{n=0}^{\infty} w_n, \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}. \tag{4.9}$$

如果限于这种求和次序，则乘法的条件还可以放宽成：$\sum u_k, \sum v_l$ 都收敛，且其中之一绝对收敛；或 $\sum u_k, \sum v_l$ 和 $\sum w_n$ 都收敛.

练习 4.1 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 皆为正项级数，试举反例，说明下列各种说法不正确：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 若 $a_{2n} < a_{2n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ 发散.

练习 4.2 指出下列运算中的谬误：

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + - \cdots \\ & = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots\right) \\ & = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right) \\ & = 0. \end{aligned}$$

4.2 二重级数

关于二重级数问题，需要作一些补充讨论.

所谓二重级数，指的是排列成

$$\begin{aligned}
&a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + \cdots + a_{1n} + \cdots \\
+ &a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + \cdots + a_{2n} + \cdots \\
+ &a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} + \cdots + a_{3n} + \cdots \\
+ &\cdots \\
+ &a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + a_{m4} + \cdots + a_{mn} + \cdots \\
+ &\cdots
\end{aligned} \tag{4.10}$$

的方阵，这个方阵的右端和下端都是无限的. 方阵的每一项用 a_{kl} 表示，其中的第一个指标 k 表示行，第二个指标 l 表示列.

现在求出方阵的前 m 行 n 列共 $m \times n$ 项之和

$$S_{mn} = \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le l \le n}} a_{kl}, \tag{4.11}$$

由 S_{mn} 就可以构成这个二重级数的部分和序列. 容易理解，如果部分和序列收敛，

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} S_{mn} = S \tag{4.12}$$

则称此二重级数收敛. S 就是这个二重级数之和，

$$S = \sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}. \tag{4.13}$$

这时，任给一个 $\varepsilon > 0$ ，总可以找到一个正整数 N ，当 $m, n > N$ 时，恒有

$$\left|S_{mn} - S\right| < \varepsilon. \tag{4.14}$$

例 4.1 二重级数

$$\begin{aligned}
&1 + 1 + 1 + 1 + \cdots \\
+ &1 - 1 - 1 - 1 - \cdots \\
+ &1 - 1 + 0 + 0 + \cdots \\
+ &1 - 1 + 0 + 0 + \cdots \\
+ &\cdots
\end{aligned} \tag{4.15}$$

的 $S_{mn}=2,\quad m,n>1$，所以，这个二重级数之和为 $S=2$.

除了这种求和方式之外，当然还可以考虑其他求和方式. 例如，考虑到上面的部分和

$$S_{mn}=\sum_{\substack{1\le k\le m\\1\le l\le n}}a_{kl}=\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\right]=\sum_{l=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{m}a_{kl}\right],$$

因此，可以还有累次求和，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}\right]=\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}S_{mn}\right]$$

和

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_{kl}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}S_{nm}\right].$$

前者是先按列求和，再将各列之和相加 (可称为逐列求和)；后者的求和次序则相反 (可称为逐行求和). 需要注意，即使二重级数收敛，某些行或列的和也不一定存在，因此累次求和的和也不一定存在. 例如，上面的二重级数 (4.15) 式就是如此，它的第一列和第二列的列级数都不收敛，第一行和第二行的行级数也不收敛.

反过来说，如果逐行和逐列求和的和都存在，这两个和数也不一定相等 (即和数与求和次序有关). 例如，二重级数

$$a_{kl}=\frac{1}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{l}-\frac{1}{k+2}\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{l}$$

的部分和是

$$S_{mn}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]-\frac{m+1}{m+2}\left[1-\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^{n}\right],$$

所以

$$\lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}S_{mn}\right]=-\frac{1}{2},\qquad\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}S_{nm}\right]=\frac{1}{2}.$$

即使逐列求和和逐行求和的和数相等，二重级数也不一定收敛. 例如，Kelvin 在讨论两个带电球之间的相互作用力时，就曾经

得到通项为

$$a_{kl}=(-)^{k+l}\frac{kl}{(k+l)^2}$$

的二重级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}\right]=\sum_{l=1}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_{kl}\right]=\frac{1}{6}\left[\ln 2-\frac{1}{4}\right],$$

但 $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty}a_{kl}$ 并不收敛，部分和序列是在

$$\frac{1}{6}\left[\ln 2-\frac{5}{8}\right]\quad 和\quad \frac{1}{6}\left[\ln 2+\frac{1}{8}\right]$$

之间振荡.

前面在讨论级数乘法时，还涉及另一种求和方式，即 (4.9) 式的求和方式. 从方阵 (4.10) 式来看，这相当于按 (次) 对角线求和. 这个和数，也不一定等于逐列或逐行求和的和数，或是按照 (4.13) 式求出的和. 例如，将二重级数 (4.15) 式按对角线求和，得到的和数为 4 .

二重级数的和与求和方式的问题，从原则上说，与级数是否绝对收敛有关. 如果二重级数绝对收敛，那么，级数各项的先后次序可以重新排列，因而不同求和方式得到相同的和数.

4.3 函数级数

设 $u_k(z)\quad(k=1,2,\cdots)$ 在某区域 G 中有定义. 如果对于 G 中一点 z_0 ，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z_0)$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 z_0 点收敛. 反之，如果 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k(z_0)$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k(z)$ 在 z_0 点发散.

如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在区域 G 内每一点都收敛，则称级数在 G 内收敛. 其和函数 $S(z)$ 是 G 内的单值函数.

如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在一个与 z 无关的 $N(\varepsilon)$, 使当 $n>N(\varepsilon)$ 时， $\left|S(z)-\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)\right|<\varepsilon$ ，则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 G 内一

致收敛.

显然，一致收敛的概念总是和一定的区域联系在一起的. 级数的一致收敛性是它在一定区域内的性质.

要判断一个级数是否一致收敛，除了直接运用定义以外，常用 Weierstrass 的 M 判别法：若在区域 G 内 $|u_k(z)| < a_k$ ， a_k 与 z 无关，而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 G 内绝对而且一致收敛.

练习 4.3 设 x 为实数，证明：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 绝对收敛，但不一致收敛；

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-)^n}{n+x^2}$ 一致收敛，但不绝对收敛.

一致收敛级数具有下列重要性质：

1. **连续性** 如果 $u_k(z)$ 在 G 内连续，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 在 G 内一致收敛，则其和函数 $S(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ 也在 G 内连续.

证 设 z_0 为 G 内一点，

$$
\begin{aligned}
&|S(z) - S(z_0)| \\
&\qquad = |S(z) - S_n(z) + S_n(z) - S_n(z_0) + S_n(z_0) - S(z_0)| \\
&\qquad \le |S(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S(z_0) - S_n(z_0)|.
\end{aligned}
$$

根据级数 $\sum u_k(z)$ 的一致收敛性可知，任给 $\varepsilon > 0$ ，总可以找到 $N(\varepsilon)$ ，使当 $n > N(\varepsilon)$ 时，

$$
|S(z) - S_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |S(z_0) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.
$$

又因 $S_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(z)$ 是 G 内的连续函数，故对于同一个 $\varepsilon > 0$ ，总存在 $\delta > 0$ ，使当 $|z - z_0| < \delta$ 时，

$$
|S_n(z) - S_n(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.
$$

综合以上结果，就得到：对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，只要

$|z-z_0|<\delta$，就有

$$|S(z)-S(z_0)|<\varepsilon.$$

$S(z)$ 在 z_0 点连续．由于 $z_0 \in G$ 任意，所以 $S(z)$ 在 G 内连续． □

这个性质告诉我们，如果级数的每一项都是连续函数，则一致收敛级数可以逐项求极限 (或者说，“求极限”与“求级数和”可以交换次序)，

$$\boxed{\lim_{z\to z_0}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{z\to z_0}u_k(z).} \tag{4.16}$$

2. **逐项求积分**　设 C 是区域 G 内的一条分段光滑曲线，如果 $u_k(z)$ $(k=1,2,\cdots)$ 是 C 上的连续函数，则对于 C 上一致收敛的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 可以逐项求积分

$$\boxed{\int_C\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{\infty}\int_C u_k(z)\mathrm{d}z.} \tag{4.17}$$

证　根据性质 1 知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 是曲线 C 上的连续函数，故积分 $\int_C\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)\mathrm{d}z$ 存在，而有

$$\begin{aligned}\int_C\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)\mathrm{d}z &= \int_C\sum_{k=1}^{n}u_k(z)\mathrm{d}z+\int_C R_n(z)\mathrm{d}z\\ &=\sum_{k=1}^{n}\int_C u_k(z)\mathrm{d}z+\int_C R_n(z)\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

其中 $R_n(z)=S(z)-S_n(z)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k(z)$．根据级数的一致收敛性，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N(\varepsilon)>0$，只要 $n>N(\varepsilon)$，就有

$$|S(z)-S_n(z)|=|R_n(z)|<\varepsilon.$$

因此

$$\left|\int_C R_n(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_c|R_n(z)|\cdot|\mathrm{d}z|<\varepsilon l,$$

l 是 C 的全长. 两端取极限，即得

$$\lim_{n\to\infty}\int_C R_n(z)\mathrm{d}z=0.$$

所以

$$\int_C\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)\mathrm{d}z=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_C u_k(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{\infty}\int_C u_k(z)\mathrm{d}z.\quad\square$$

3. **逐项求导数** (Weierstrass **定理**)　设 $u_k(z)\,(k=1,2,\cdots)$ 在 $\overline{G}$ 中单值解析，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 $\overline{G}$ 中一致收敛，则此级数之和 $f(z)$ 是 G 内的解析函数，$f(z)$ 的各阶导数可以由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 逐项求导数得到，

$$\boxed{f^{(p)}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k^{(p)}(z),}\tag{4.18}$$

求导数后的级数在 G 内的任一闭区域中一致收敛.

证　证明共分三部分.

(1) 证明 $f(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在 G 内解析.

因为 $u_k(z)$ 解析，故根据 Cauchy 积分公式

$$u_k(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{u_k(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,$$

$$\begin{aligned}f(z)&=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\sum_{k=1}^{\infty}\oint_C\frac{u_k(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta-z}\qquad\text{(因为级数一致收敛)}\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

由性质 1，知 $f(\zeta)$ 是 C 上的连续函数，故 $f(z)$ 解析.

(2) 证明可以逐项求导数.

设 $\overline{G'}$ 为 G 内任一闭区域，C' 是它的边界，则 $f(z)$ 在 $\overline{G'}$ 中

解析，故有

$$
\begin{aligned}
f^{(p)}(z) &= \frac{p!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} \mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{p!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta) \frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} \frac{u_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} \mathrm{d}\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z).
\end{aligned}
$$

(3) 证明级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}$ 在 $\overline{G}'$ 中一致收敛.

如图 4.1 所示，在 G 内总可以再取一个闭区域 $\overline{G}''$，使得 $\overline{G}'$ 包含在 $\overline{G}''$ 内. 令 $\overline{G}'$ 的边界 C' 到 $\overline{G}''$ 的边界 C'' 的最短距离为 δ. 取 z 为 $\overline{G}'$ 内一点，ζ 为 C'' 上的变点.

由上面的性质 2，可以断定，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta)$ 在边界 C'' 上一致收敛，即对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，总存在 $N(\varepsilon)$，使当 $n > N(\varepsilon)$ 时，恒有

$$
\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} u_k(\zeta) \right| < \varepsilon,
$$

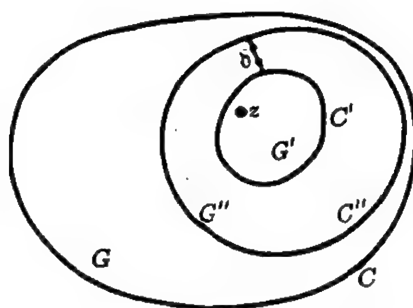


图 4.1　Weierstrass 定理

q 是任意正整数. 于是，

$$
\begin{aligned}
\left| \sum_{k=n+1}^{n+q} u_k^{(p)}(\zeta) \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{p!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C''} \frac{u_k(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} \mathrm{d}\zeta \right| \\
&= \left| \frac{p!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C''} \sum_{k=n+1}^{n+q} u_k(\zeta) \frac{\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z)^{p+1}} \right| \\
&\leq \frac{p!}{2\pi} \oint_{C''} \left| \sum_{k=n+1}^{n+q} u_k(\zeta) \right| \frac{|\mathrm{d}\zeta|}{|\zeta - z|^{p+1}} \\
&< \frac{p!}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\delta^{p+1}} l'', \qquad l'' \text{ 为 } C'' \text{ 的长度}.
\end{aligned}
$$

所以 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^{(p)}(z)$ 在 (G 内的任一闭区域)$\overline{G}'$ 中一致收敛. □

4.4 幂 级 数

幂级数通常是指通项为幂函数的函数项级数，例如，

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots. \tag{4.19}$$

这是一种特殊形式的函数项级数，也是最基本、最常用的一种函数项级数. 本章先讨论只有正幂次项的幂级数，下一章还将讨论含有负幂次项的幂级数.

Abel(第一) 定理 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 z_0 收敛，则在以 a 点为圆心，$|z_0-a|$ 为半径的圆内绝对收敛，而在 $|z-a| \le r$ $(r < |z_0-a|)$ 中一致收敛.

证 因为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在 z_0 收敛，故一定满足必要条件

$$\lim_{n\to\infty} c_n(z_0-a)^n = 0.$$

因此存在正数 q，使 $|c_n(z_0-a)^n| < q$. 所以，

$$|c_n(z-a)^n| = |c_n(z_0-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n < q\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n.$$

因当 $\left|\dfrac{z-a}{z_0-a}\right| < 1$ 即 $|z-a| < |z_0-a|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\dfrac{z-a}{z_0-a}\right|^n$ 收敛，故

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ 在圆 } |z-a| < |z_0-a| \text{ 内绝对收敛.}} \tag{4.20}$$

而当 $|z-a| \le r < |z_0-a|$ 时，

$$|c_n(z-a)^n| \le q\,\frac{r^n}{|z_0-a|^n},$$

常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{r^n}{|z_0-a|^n}$ 收敛，故

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ 在圆 } |z-a| \le r\ (r < |z_0-a|) \text{ 中一致收敛.}} \tag{4.21}$$

推论 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在某点 z_1 发散，则在圆 $|z-a| = |z_1-a|$ 外处处发散.

证 用反证法. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在圆 $|z-a| = |z_1-a|$ 外某一点 z_2 收敛，则按 Abel 定理，级数必然在圆 $|z-a| = |z_2-a|$ ($|z_2-a| > |z_1-a|$) 内收敛，与原设矛盾. 故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 在圆 $|z-a| = |z_1-a|$ 外处处发散. □

由于一个级数在 z 平面上的任意一点，总是要么收敛，要么发散，二者必居其一. 因此，对于幂级数来说，就出现了这样的情况：在 z 平面上一部分点幂级数收敛，在另外一部分点幂级数发散. 这些收敛点与发散点之间存在一个分界线. 根据 Abel 定理，这个分界线一定是圆. 这个圆，就称为幂级数的 **收敛圆** . 收敛圆的半径称为 **收敛半径** . 作为特殊情况，收敛半径可以是 0 (这时，收敛圆退化为一个点. 除 $z=a$ 点外，幂级数在全平面处处发散)，也可以是 ∞(这时收敛圆就是全平面. 幂级数在全平面收敛，但在 ∞ 点可能收敛，也可能发散) .

在讨论幂级数的性质时，首先应当求出收敛圆 (收敛半径) .

求幂级数的收敛半径的办法，常用的有两个：

1. 根据 Cauchy 判别法，当

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(z-a)^n|^{1/n} < 1 \quad \text{即} \quad |z-a| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n}}$$

时级数绝对收敛；当

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n(z-a)^n|^{1/n} > 1 \quad \text{即} \quad |z-a| > \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n}}$$

时级数发散. 因此，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径是

$$\boxed{R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{c_n}\right|^{1/n}.} \tag{4.22}$$

2. 根据 d'Alembert 判别法，如果

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| = |z-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

存在，则当

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| < 1 \quad 即 \quad |z-a| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

时级数绝对收敛；当

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-a)^{n+1}}{c_n(z-a)^n}\right| > 1 \quad 即 \quad |z-a| > \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

时级数发散．因此，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径是

$$\boxed{R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|.} \tag{4.23}$$

这两个求收敛半径的公式各有优缺点． Cauchy 公式是普遍成立的，而 d'Alembert 公式则是有条件的 (要求极限 $\lim_{n\to\infty}|c_n/c_{n+1}|$ 存在)．但当后者能适用时，往往计算更简单些．

练习 4.4 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，试讨论下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)z^n$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}z^n, \quad a_n \neq 0$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}z^n, \quad a_n \neq 0$.

由于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的每一项都是 z 的解析函数， Abel 定理告诉我们，幂级数在其收敛圆内任一闭区域中一致收敛，因此，根据 4.3 节，在收敛圆内，幂级数代表了一个解析函数 (或者说，幂级数的和函数在收敛圆内解析)，可以对幂级数逐项积分或逐项求导数，

$$
\begin{aligned}
\int_{z_0}^{z} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \, \mathrm{d}z
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{z_0}^{z} (z-a)^n \, \mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} \left[(z-a)^{n+1} - (z_0-a)^{n+1} \right],
\end{aligned} \tag{4.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \right] &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\mathrm{d}(z-a)^n}{\mathrm{d}z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} (n+1)(z-a)^n.
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

前面说过，幂级数在收敛圆内一定收敛，在收敛圆外一定发散，那么，对于收敛圆上的点，情况如何呢？回答是，在收敛圆上，级数可以收敛，可以发散，也可以在一部分点收敛，在另一部分点发散．例如，

$z + \dfrac{z^2}{2} + \cdots + \dfrac{z^n}{n(n+1)} + \cdots$　　在 $|z| = 1$ 上处处收敛；

$1 + z + \cdots + z^n + \cdots$　　在 $|z| = 1$ 上处处发散；

$1 + \dfrac{z}{1} + \cdots + \dfrac{z^n}{n} + \cdots$　　在 $|z| = 1$ 上除 $z = 1$ 外均收敛，而在 $z = 1$ 点发散．

但是，不论哪种情况，幂级数的收敛圆上总肯定有奇点．特别要说明的是，即使在奇点，幂级数仍然可能是收敛的．读者容易求出上面三个级数的和函数，可以验证 $z = 1$ 点是它们的奇点．

4.5　含参量的积分的解析性

4.3 节中有关函数级数解析性的结论，也可以用来讨论含参量的定积分和无穷积分的解析性．为此，先讨论含参量的定积分所表示的函数．

定理 4.1 设

1. $f(t,z)$ 是 t 和 z 的连续函数， $t\in[a,b]$ ， $z\in\overline{G}$ ，

2. 对于 $[a,b]$ 中的任何 t 值， $f(t,z)$ 是 $\overline{G}$ 中的单值解析函数，

则 $F(z)=\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$ 在 G 内是解析的，且

$$F'(z)=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t. \tag{4.26}$$

证 因为 $f(t,z)$ 在 $\overline{G}$ 中解析，故对于 G 内的任何一点 z ，Cauchy 积分公式成立，

$$f(t,z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(t,\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta.$$

代入 $F(z)$ 的定义，并交换积分次序 (因为 $f(t,z)$ 连续)，得

$$F(z)=\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(t,\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{1}{\zeta-z}\left[\int_a^b f(t,\zeta)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\zeta.$$

这是一个 Cauchy 型积分， $\int_a^b f(t,z)\mathrm{d}t$ 连续，故 $F(z)$ 为 G 内的解析函数，且

$$\begin{aligned}F'(z) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{1}{(\zeta-z)^2}\left[\int_a^b f(t,\zeta)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_a^b \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(t,\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta\right]\mathrm{d}t=\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t. \quad \square\end{aligned}$$

显然，这个结论也适用于 $\int_C f(t,z)\mathrm{d}t$. 这时应当要求 C 是分段光滑曲线，当 t 在 C 上变动， $z\in\overline{G}$ 时， $f(t,z)$ 是 t 和 z 的连续函数. 证明的方法与上面相同.

根据定理 4.1 ，并应用 Weierstrass 定理，便可以推出含参量的无穷积分所表示的函数的解析性.

定理 4.2 设

1. $f(t,z)$ 是 t 和 z 的连续函数， $t>a$ ， $z\in\overline{G}$ ，

2. 对于任何 $t\geq a$ ， $f(t,z)$ 是 $\overline{G}$ 中的单值解析函数，

3. 积分 $\int_a^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$ 在 $\overline{G}$ 中一致收敛，即任给 $\varepsilon>0$，存在 $T(\varepsilon)$，当 $T_2>T_1>T(\varepsilon)$ 时，有

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} f(t,z)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon,$$

则 $F(z)=\int_a^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$ 在 G 内是解析的，且

$$F'(z)=\int_a^{\infty}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t. \tag{4.27}$$

证 任取一个无界序列 $\{a_n\}$

$$a_0=a<a_2<a_3<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\infty.$$

令 $u_n(z)=\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t,z)\mathrm{d}t$，则根据定理 4.1，可知 $u_n(z)$ 是 G 内的单值解析函数. 又因为

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(z)$$

在 $\overline{G}$ 中一致收敛，故根据 Weierstrass 定理，知

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(z)=\int_a^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$$

在 G 内解析，且

$$F'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n'(z)=\int_a^{\infty}\frac{\partial f(t,z)}{\partial z}\mathrm{d}t.\quad\square$$

对于含参量的瑕积分也可以类似地处理.

在应用这个定理时,需要判断无穷积分(或瑕积分)是否一致收敛. 常用的一个判别法是:如果存在函数 $\phi(t)$，使得 $|f(t,z)|<\phi(t)$，$z\in\overline{G}$，而且 $\int_a^{\infty}\phi(t)\mathrm{d}t$ 收敛，则 $\int_a^{\infty} f(t,z)\mathrm{d}t$ 在 $\overline{G}$ 中绝对而且一致收敛.

作为含参量的无穷积分的一个例子，下面讨论积分

$$F(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\,\mathrm{d}t. \tag{4.28}$$

这个积分中的被积函数显然满足定理 4.2 的前两个条件，而且因为对于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ ，有

$$\left|\cos 2zt\right| = \sqrt{\cosh^2 2yt - \cos^2 2xt} \le \cosh 2|yt| \le \mathrm{e}^{2|yt|}.$$

所以，对于 z 平面上的任意一个闭区域中， $|\mathrm{Im}\, z| < y_0$ ，于是，

$$\left|\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\right| < \mathrm{e}^{-t^2+2y_0t},$$

而积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2+2y_0t}\mathrm{d}t$$

收敛，所以含参量的无穷积分 (4.28) 一致收敛，因此，这个积分作为 z 的函数，在 z 平面上的任意一个区域内解析. 更进一步，就有

$$\begin{aligned}
F'(z) &= -\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} 2t\, \sin 2zt\, \mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^{-t^2}\sin 2zt\Big|_0^\infty - 2z\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\,\mathrm{d}t \\
&= 2zF(z).
\end{aligned}$$

解这个微分方程，就可以得到 $F(z)=Ce^{-z^2}$ ，其中常数 C 是

$$C = F(0) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

这样，最后就得到

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2zt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-z^2}. \tag{4.29}$$

*4.6 Euler 求和公式

对于收敛级数，无论从理论上或实用上，重要的问题当然是如何求出它的和或和函数. 从原则上说，这就要求出该级数的部分和，或者是把该级数和一些已知级数联系起来. 这需要对级数进行具体的分析，而且也只有在少数简单的情况下才能够实现. 在后面几章中，我们也还要陆续介绍一些级数求和的技巧. 但在一般情况

下，我们往往只能进行数值求和，将级数的前若干项相加，从而求出级数和的近似值，只要精度满足要求就可以.

在将级数数值求和 (不妨限于数项级数，对于函数级数，可以逐点求和) 时，级数的收敛速度显然是一个重要的制约因素. 如果级数收敛得很快，不多几项相加就可以达到要求的精度，那么问题当然就十分简单. 可是，实际上往往会面临另一种情形，即级数收敛得很慢. 例如，要求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+-\cdots \tag{4.30}$$

的和，如果允许误差不超过 10^{-4}，便至少要将前 10^8 项相加. 这种收敛得慢的级数，往往是交错级数，

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n w_n,\qquad w_n>0, \tag{4.31}$$

而且

$$w_n>w_{n+1},\qquad \left|\frac{w_n}{w_{n+1}}\right|\to 1,$$

纯粹靠级数的各项彼此抵消而逐渐逼近于和数.

为了要将 (4.31) 数值求和，可以先造一个幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n w_n z^n, \tag{4.32}$$

这个幂级数的收敛半径当然是 1 . 级数 (4.31) 的和 (记为 S) 就是幂级数 (4.32) 在收敛圆上 $z=1$ 点处的值 $f(1)$. 用 $1+z$ 乘以级数 (4.32)，就得到

$$\begin{aligned}(1+z)f(z)=&\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n w_n z^n(1+z)\\ =&w_0(1+z)-w_1 z(1+z)+w_2 z^2(1+z)\\ &-w_3 z^3(1+z)+w_4 z^4(1+z)+-\cdots\\ =&w_0+(w_0-w_1)z-(w_1-w_2)z^2+(w_2-w_3)z^3\\ &-(w_3-w_4)z^4+-\cdots,\end{aligned}$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z} w_0 + \frac{z}{1+z} \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n z^n \Delta w_n, \tag{4.33}$$

其中 $\Delta w_n = w_n - w_{n+1}$ 是将级数 (4.31) 中各项去掉交错因子 $(-)^n$ 后相邻两项之差，即序列 $\{w_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 的一级差分．现在 (4.33) 式中出现的新级数仍然是交错级数的形式，于是，还可以重复上面的步骤，

$$f(z) = \frac{1}{1+z} \left(w_0 + \frac{z}{1+z} \Delta w_0 \right) + \left(\frac{z}{1+z} \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n z^n \Delta^2 w_n, \tag{4.34}$$

其中 $\Delta^2 w_n = w_n - 2w_{n+1} + w_{n+2}$ 是序列 $\{w_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 的二级差分．如此继续，就能得到

$$\begin{aligned} f(z) = & \frac{1}{1+z} \left[w_0 + \frac{z}{1+z} \Delta w_0 \right. \\ & \left. + \left(\frac{z}{1+z} \right)^2 \Delta^2 w_0 + \cdots + \left(\frac{z}{1+z} \right)^{k-1} \Delta^{k-1} w_0 \right] \\ & + \left(\frac{z}{1+z} \right)^k \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n z^n \Delta^k w_n. \end{aligned} \tag{4.35}$$

这里，我们不去讨论这种做法的合法性，或者说，不去证明级数 (4.35) 的收敛性．回到原始的问题，令 $z = 1$，即得

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2} w_0 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \Delta w_0 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 \Delta^2 w_0 + \cdots \\ & + \left(\frac{1}{2} \right)^k \Delta^{k-1} w_0 + \left(\frac{1}{2} \right)^k \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \Delta^k w_n. \end{aligned} \tag{4.36}$$

注意 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-)^n \Delta^k w_n$ 仍然是一个各项绝对值递降的交错级数，这样，就得到了 Euler 的求和公式

$$\begin{aligned} S = & \frac{1}{2} w_0 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \Delta^2 w_0 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 \Delta^3 w_0 \\ & + \cdots + \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \Delta^{k-1} w_0 + R_k, \end{aligned} \tag{4.37}$$

其中余项

$$|R_k| < \left(\frac{1}{2} \right)^k \left| \Delta^k w_0 \right|. \tag{4.38}$$

由于 Euler 求和公式中要求各级差分越小越好，而一般交错级数开头若干项的数值变化较快，因此，在实用上，总是先将前若干项直接求和，再对剩下的级数采用 Euler 求和，这样效果会更好.

现在就用这个方法求级数 (4.30) 和的近似值. 首先有 (准确到 10^{-7})

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + S' \\
&= 1 - 0.7071068 + 0.5773503 - 0.5000000 + S' \\
&= 0.3702435 + S', \\
S' &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+5}}.
\end{aligned}
$$

然后，将级数 S' 的各项写出，并求出各级差分 (见表 4.1) . 按照 Euler 求和公式，可以得到

$$
\begin{aligned}
S' &= \frac{1}{2} \times 0.4472136 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 0.0389653 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 0.0086815 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 0.0028088 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 0.0011271 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times 0.0005218 + R_7 \\
&= 0.2346523 + R_7, \\
|R_7| &< \left(\frac{1}{2}\right)^7 \times 0.0002673 = 0.0000021.
\end{aligned}
$$

所以，最后就有

表 4.1

n	w_n	Δw_n	$\Delta^2 w_n$	$\Delta^3 w_n$	$\Delta^4 w_n$	$\Delta^5 w_n$	$\Delta^6 w_n$
4	0.4472136	0.0389653	0.0086815	0.0028088	0.0011271	0.0005218	0.0002673
5	0.4082483	0.0302838	0.0058727	0.0016817	0.0006053	0.0002545	
6	0.3779645	0.0244111	0.0041910	0.0010764	0.0003508		
7	0.3535534	0.0202201	0.0031146	0.0007256			
8	0.3333333	0.0171055	0.0023890				
9	0.3162278	0.0147165					
10	0.3015113						

$$S \approx 0.3702435 + 0.2346523 = 0.6048958.$$

实际的准确值是

$$(1-\sqrt{2})\zeta(1/2) = 0.604898\cdots,$$

其中 $\zeta(z)$ 是 Riemann ζ 函数. 大家看到，误差只有 2×10^{-6} ，和 R_7 的估计值一致. 如果直接将级数 (4.30) 的各项相加，则必须计算 2.5×10^{11} 项，才能达到这个精度.

*4.7 发散级数与渐近级数

迄今为止，我们的注意力都集中在级数的收敛性上. 讨论如何判断级数收敛，收敛级数具有那些性质，甚至还具体讨论如何求级数的和. 但是，绝不要认为发散级数毫无用处. 在历史上，许多著名的数学家都研究或使用过发散级数问题，例如， Stirling 在他的 Methodus Differentialis (微分法) 中就曾经给出了

$$\begin{aligned}\ln m! = & \left(m+\frac{1}{2}\right)\ln\left(m+\frac{1}{2}\right) - \left(m+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{B}_{2n}(1/2)}{(2n-1)(2n)}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{-(2n-1)}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

其中的 $\mathrm{B}_n(t)$ 是 Bernoulli 多项式

$$\frac{ze^{tz}}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!}z^n. \tag{4.40}$$

Stirling 只用级数的前几项就能计算 lg(1000!) 到 10 位小数. 但这个级数是发散的，只不过级数的头几项是非常迅速地减小的，所以不多几项就可以给出足够好的近似. Euler 还曾经讨论下面几个级数的“和”:

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\cdots; \tag{4.41}$$

$$1-2+3-4+5-6+-\cdots; \tag{4.42}$$

$$1-2+2^2-2^3+2^4-2^5+2^6+-\cdots; \tag{4.43}$$

$$1-2!+3!-4!+5!-6!+-\cdots. \tag{4.44}$$

利用 Euler 求和方法，可以求出它们的“和”分别是

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{3} \quad \text{和} \quad 0.4008\cdots.$$

至于物理学家更不排斥发散级数. 事实上，物理学中广泛使用的所谓渐近展开常常就是发散级数. 近代物理学更是不止一次地在克服了发散困难后而发展到一个更高的水平. 问题是，从数学上说，必须在收敛级数的和的概念的基础上，建立起发散级数的“和”的概念.

不妨再仔细分析一下级数 (4.41)，它的部分和序列

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n = \frac{1}{2}\left[1-(-1)^N\right]$$

当然是不收敛的，所以不能用部分和序列的极限来定义它的和. 但是可以造一个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^n, \tag{4.45}$$

它的收敛区域是 $|z|<1$. 上面的级数 (4.41) 就可以看成是将幂级数 (4.45) 不合法地取极限 $z\to 1$ 的结果. 基于这样的理解，应当先求出幂级数 (4.45) 的和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^n = \frac{1}{1+z},$$

然后就把这个和函数在 $z\to 1$ 时的极限值

$$\lim_{z\to 1}\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}$$

定义为级数 (4.41) 的“和”. 容易验证，这样定义的“发散级数的和”和上面用 Euler 求和公式得到的结果一致. 事实上，这个发散级数在 Fourier 的 Theorie Analytique de la Chaleur (中译本：《热的解析理论》，武汉出版社 1993 年出版) 一书中就曾经得到过. 他在计算 Fourier 展开时，得到 (见该书中译本第 170 ~ 171 页)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\frac{\sinh x}{\sinh \pi} &= \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots\right)\\ &\quad - \left(\sin x - \frac{1}{2^3}\sin 2x + \frac{1}{3^3}\sin 3x - \cdots\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\sin x-\frac{1}{2^5}\sin 2x+\frac{1}{3^5}\sin 3x-\cdots\right)\\
&-\left(\sin x-\frac{1}{2^7}\sin 2x+\frac{1}{3^7}\sin 3x-\cdots\right)+\cdots\\
=&\frac{\sin x}{1+\dfrac{1}{1}}-\frac{\sin 2x}{2+\dfrac{1}{2}}+\frac{\sin 3x}{3+\dfrac{1}{3}}+\cdots.
\end{aligned}
$$

但结果

$$
\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^5}-+\cdots=\frac{n}{1+n^2}
$$

在 $n=1$ 时并不成立．上述展开中 $\sin x$ 的展开系数 a_1 不可能表示成这样的发散级数，这个发散级数也不可能收敛到后面的和．实际上，正确的结果是

$$
a_1=\frac{1}{\sinh\pi}\int_0^{\pi}\sinh x\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},
$$

恰恰又和前面的不合法的计算得到的结果一致．

可以类似地讨论另外几个发散级数，只不过由级数 (4.43) 和 (4.44) 造出的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-)^n 2^n z^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-)^n (n+1)!\,z^n$ 的收敛半径分别是 1/2 和 0 ，而级数 (4.43) 和 (4.44) 的“和”则是这两个幂级数的和函数在收敛圆外的 $z=1$ 点的值．

以上讨论的是几个典型的发散级数．在一种特殊的限制条件下，这些发散级数也可以用于合法的计算．这里要注意，级数

$$
1+0-1+1+0-1+1+0-1+\cdots \tag{4.46}
$$

决不同于级数 (4.41)．级数 (4.46) 的“和”是 2/3．在一般情形下，非收敛级数的正当用途常常是渐近级数．上面的求“和”规则只不过是在这种背景下更复杂的运算过程的缩写．

对于发散级数建立了这样的基本认识后，就可以着手介绍渐进级数 (或称渐进展开) 的概念了．为此，先要介绍有关的几个符号与术语．

1. 记号 O 和 o．设 $f(z)$ 和 $\phi(z)$ 在 z_0 点的邻域内有定义，且 $\phi(z)\neq 0$，若 $z\to z_0$ 时，

$$\frac{f(z)}{\phi(z)}\text{有界},$$

则记为

$$f(z) = O\left(\phi(z)\right), \qquad \text{当}\, z \to z_0;$$

若

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{\phi(z)} = 0,$$

则记为

$$f(z) = o\left(\phi(z)\right), \qquad \text{当}\, z \to z_0.$$

2. 渐近序列. 设函数序列 $\{\phi_n(z)\}$ 在 z_0 点的邻域内有定义，且 $\phi(z)_n \neq 0$(z_0 点可以除外)，若对于所有的 n，有

$$\phi_{n+1}(z) = o\left(\phi_n(z)\right), \qquad \text{当}\, z \to z_0,$$

则称函数序列 $\{\phi_n(z)\}$ 为 $z \to z_0$ 时的渐近序列.

3. 渐近级数. 若当 $z \to z_0$ 时，对于每一个 m 值，都有

$$f(z) - \sum_{n=0}^{m} a_n \phi_n(z) = o\left(\phi_m(z)\right), \tag{4.47}$$

则称 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(z)$ 是函数 $f(z)$ 相对于渐近序列 $\{\phi_n(z)\}$ 的渐近级数，记为

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(z). \tag{4.48}$$

渐近级数的定义说明，z 越接近 z_0，有限和 $\sum\limits_{n=0}^{m} a_n \phi_n(z)$(称为 $z \to z_0$ 时 $f(z)$ 的渐近近似) 越逼近于 $f(z)$. 它区别于通常的级数展开，例如 Taylor 展开

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \cdots,$$

后者是 z 点固定，而级数的项数越多越准确，

$$\lim_{N \to \infty} \left[f(z) - \sum_{n=0}^{N} u_n(z) \right] = 0.$$

特别是，在渐近级数的定义中，并未要求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\phi_n(z)$ 收敛. 渐近展开级数可以 (而且常常) 不是收敛级数. 因此，对于一定的 z ，并不能通过多取项数 (即增大 N) 来无限制地改善近似程度. 例如，对于指数积分

$$\mathrm{Ei}(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad x > 0, \tag{4.49}$$

用分部积分的方法可以得到

$$\begin{aligned} -\mathrm{Ei}(-x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x} - \int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \cdots \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \cdots + \frac{(-)^{n-1}n!}{x^n}\right] \\ &\quad + (-)^{n+1}(n+1)!\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.50}$$

容易证明，它的余项

$$\int_x^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{n+2}}\,\mathrm{d}t < \frac{1}{x^{n+2}}\int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^{n+2}},$$

因此， (4.50) 式的确给出了 $-\mathrm{Ei}(-x)$ 在 $x\to\infty$ 时的渐近展开. 然而，由级数的相邻两项的比

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{x} = \infty,$$

根据 Cauchy 判别法，立即知道这个级数发散. 而且，对于一定的 x ， $-\mathrm{Ei}(-x)$ 的渐近近似中应当取 $N\approx x$ 项，可以得到最佳逼近，因为在此之前，级数各项的绝对值递降，而在此之后，绝对值反而递增.

渐近展开不同于 Taylor 展开或 Laurant 展开，还在于渐近级数通常都有一定的辐角限制，即渐近展开只在一定的辐角范围内成立 ①. 对于同一个函数，在不同的辐角范围内，渐近展开的形式当然不同；即使在两个不同区域的公共区域内，两个渐近展开也可以有明显不同的结果.

---

① 这时关于 O 和 o 的定义以及渐近序列的概念都应作相应的修改.

在 $\arg z$ 的一定范围内，一个函数最多只有一个渐近展开；也就是说，渐近展开，如果存在，是唯一的，系数由

$$a_m = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\phi_m(z)}\left[f(z) - \sum_{n=0}^{m-1} a_n\phi_n(z)\right] \tag{4.51}$$

决定. 但是，不同的函数在同一个区域内可以有相同形式的渐近展开. 例如，如果当 $|\arg z| < \alpha < \pi/2$，而 $|z| \to \infty$ 时有

$$J(z) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n\phi_n(z) + \cdots,$$

则对于函数 $J(z) + e^{-z}$，同样有

$$J(z) + e^{-z} \sim \sum_{n=0}^{N} a_n\phi_n(z) + \cdots.$$

如果要讨论扇形区域 $\alpha < \arg z < \beta$ 中，$z \to \infty$ 时的渐近展开，最简单的渐近序列是 $\{\phi(z)z^{-n}\}$，其中 $\phi(z)$ 在 $z \to \infty$ 时的行为已知 (它就决定了扇形区域的辐角范围)，

$$f(z) \sim \phi(z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \tag{4.52}$$

而把

$$\frac{f(z)}{\phi(z)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \tag{4.53}$$

称为渐近幂级数.

渐近幂级数和收敛幂级数具有非常相似的运算性质. 例如，当 $z \to \infty$ 时，在 $\alpha < \arg z < \beta$ 中有

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \qquad g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n},$$

则根据渐近级数的定义，可以证明：

1. $Af(z) \sim A\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$，　　A 为常数；

2. $f(z) + g(z) \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^{-n}$；

3. $f(z)\cdot g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^{-n}$;

4. $\dfrac{1}{f(z)}\sim\dfrac{1}{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}d_nz^{-n}$,

其中 $d_1=\lim\limits_{z\to\infty}z\left[\dfrac{1}{f(z)}-\dfrac{1}{a_0}\right]=-\dfrac{a_1}{a_0^2}$,

$$d_2=\lim_{z\to\infty}z^2\left[\frac{1}{f(z)}-\frac{1}{a_0}-\frac{d_1}{z}\right]=\frac{a_1^2-a_0a_2}{a_0^3},$$

$\vdots$

此外，若 $|z|>R$时 $f(z)$连续，则当 $|z|>R$时

$$F(z)=\int_z^{\infty}\left[f(t)-a_0-a_1t^{-1}\right]\mathrm{d}t;$$

若在区域 G： $|z|>R,\ \alpha<\arg z<\beta$ 中 $f(z)$ 解析，且在 G 所含的任一闭扇形中，当 $z\to\infty$ 时，对 $\arg z$ 一致地有

$$f(z)\sim a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+a_3z^{-3}+\cdots,$$

则在 G 所含的任一闭扇形中，当 $z\to\infty$ 时，对 $\arg z$ 一致地有

$$f'(z)\sim -a_1z^{-2}-2a_2z^{-3}-3a_3z^{-4}+\cdots.$$

有关求渐近展开的具体方法，请参阅有关著作，例如

- A. Erdélyi, Asymptotic Expansions, Dover, New York, 1956.
- N. G. de Bruijn, Asymptotic Methods in Analysis, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1958.
- H.Jeffreys, Asymptotic Approximation, Clarendon, Oxford, 1962.
- R. B. Dingle, Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation, Academic Press, London, 1973.

第五章　解析函数的局域性展开

5.1　解析函数的 Taylor 展开

前面我们看到，一个幂函数在它的收敛圆内代表一个解析函数. 现在，我们要提一个相反的问题：如何把一个解析函数表示成幂级数？

定理 5.1 (Taylor)　设函数 $f(z)$ 在以 a 为圆心的圆 C 内及 C 上解析，则对于圆内的任何 z 点， $f(z)$ 可用幂级数展开为 (或者说， $f(z)$ 可在 a 点展开为幂级数)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \tag{5.1}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \tag{5.2}$$

C 取逆时针方向[①].

证　根据 Cauchy 积分公式，对于圆 C 内任意一点 z，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{5.3}$$

但是，

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n. \tag{5.4}$$

此级数在 $\left|\dfrac{z-a}{\zeta-a}\right| \leq r < 1$ 的区域中一致收敛，因此可以逐项积分，

---

① 以后的围道积分，除特别说明的以外，均为逆时针方向.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^{n+1}}\right] f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-a)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad \square$$

对于这个定理，需要作以下说明：

1. 定理的条件可以放宽，只要 $f(z)$ 在 C 内解析即可. 这时对于给定的 z，总可以以 a 为圆心作一圆 C'，把 z 包围在圆内. $f(z)$ 在 C' 内及 C' 上是解析的，于是有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

2. 这里 Taylor 展开的形式和实变函数中的 Taylor 公式相同，但是条件不同. 在实变函数中，$f(x)$ 的任何阶导数存在，还不足以保证 Taylor 公式存在 (或 Taylor 公式收敛). 在复变函数中，解析的要求 (实际上是很高的要求) 就足以保证 Taylor 级数收敛.

3. **收敛范围** 设 b 是 $f(z)$ 的离 a 点最近的奇点，则 $f(z)$ 在圆 $|z-a|<|b-a|$ 内处处解析，$f(z)$ 可以在圆内展开为 Taylor 级数 (或者说，Taylor 级数在圆 $|z-a|<|b-a|$ 内收敛). 这就是说，$f(z)$ 的 Taylor 级数收敛半径不小于 $|b-a|$. 另一方面，收敛半径一般也不能大于 $|b-a|$. 否则，b 点就包含在收敛圆内，因而幂级数在收敛圆内处处解析，与 b 点为奇点的假设矛盾 (除非 b 点是可去奇点，见 5.5 节). 所以，一般说来，收敛半径 $R=|b-a|$. 函数 $f(z)$ 的奇点完全决定了 Taylor 级数的收敛半径. 例如

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^{2n}, \qquad |z|<1. \tag{5.5}$$

函数的奇点 $z=\pm\mathrm{i}$ 就决定了 Taylor 级数的收敛半径 $R=|\pm\mathrm{i}|=1$．

而在实数范围内， Taylor 级数的收敛半径与函数性质之间的联系就难以讨论．比如

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n x^{2n}, \qquad -1<x<1,$$

我们就难以理解收敛半径为何是 1，因为函数 $1/(1+x^2)$ 在整个实轴上都是连续可导、并且任何阶导数都是存在的！

4. **Taylor 展开的唯一性** 给定一个在圆 C 内解析的函数，则它的 Taylor 展开是唯一的，即展开系数 a_n 是完全确定的．

证 假定有两个 Taylor 级数在圆 C 内都收敛到同一个解析函数 $f(z)$，

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots \\ &= a_0'+a_1'(z-a)+a_2'(z-a)^2+\cdots+a_n'(z-a)^n+\cdots. \end{aligned}$$

取极限 $z\to a$，则由于级数在 C 内的任一闭区域中一致收敛，故有

$$a_0=a_0'.$$

逐项微商，再取极限 $z\to a$，又得

$$a_1=a_1'.$$

如此继续，即可证得

$$a_n=a_n', \qquad n=0,1,2,\cdots. \quad \square$$

Taylor 展开的唯一性告诉我们：(1) 不论用什么方法，得到的 $f(z)$ 在同一个圆内的 Taylor 展开是唯一的．因此，不一定要用求导数的办法定展开系数． (2) 如果在同一点展开的两个 Taylor 级数相等，则可以逐项比较系数．这里要强调，必须是在同一点展开的两个 Taylor 级数相等，才可以逐项比较系数．同一个函数在不同点展开得到的两个 Taylor 级数，即使有公共的收敛区域，也不能直接比较展开系数．

5.2 Taylor 级数求法举例

求 Taylor 级数的方法很难一一罗列. 这里只介绍一些普通常见的方法.

作为整个问题的出发点，对于基本初等函数，应当利用系数公式求出展开系数. 由于公式的形式和实变函数中完全相同，因此，可以把实变函数中的结果原封不动地改写成复数形式.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty, \tag{5.6}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad |z| < \infty, \tag{5.7}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad |z| < \infty, \tag{5.8}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1. \tag{5.9}$$

对于其他函数，总是尽量利用这些已知的结果. 例如

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-z^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n z^{2n}, \quad |z| < 1. \tag{5.10}$$

有理函数总可以用部分分式的方法化为更简单的形式，例如

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-3z+2z^2} &= -\frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-2z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} - 1\right) z^n, \quad |z| < \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

有些函数可以表示成更简单的函数的导数或积分，从而可以容易地求出其 Taylor 级数. 例如

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \qquad |z| < 1. \tag{5.12}$$

如果一个函数可以表示成两个 (或几个) 函数的乘积，而每一部分的 Taylor 展开比较容易求出时，则可以采用级数相乘的方法. 例如

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-3z+2z^2} &= \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-2z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} 2^l z^l \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} 2^l z^{k+l} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} 2^l \right) z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} - 1\right) z^n, \qquad |z| < \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

由于幂级数在收敛圆内绝对收敛，故级数相乘是合法的，乘积在两收敛圆的公共区域内仍绝对收敛.

在上述这些方法都不太适用时，还可以采用待定系数法.

例 5.1 求 $\tan z$ 在 $z=0$ 的 Taylor 展开.

解 由于 $\tan z$ 是奇函数，故其在 $z=0$ 的 Taylor 展开应只有奇次幂，

$$\tan z = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} = \frac{\sin z}{\cos z},$$

$$\sin z = \cos z \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1},$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l}{(2l)!} z^{2l} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} z^{2k+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^{n-k}}{(2n-2k)!} a_{2k+1} \right) z^{2n+1}.
\end{aligned}$$

比较系数，即得

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-)^k}{(2n-2k)!} a_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!}.$$

所以

$$
\begin{aligned}
&n=0: && && a_1=1;\\
&n=1: && \frac{1}{2}a_1-a_3=\frac{1}{6}, && a_3=\frac{1}{3};\\
&n=2: && \frac{1}{24}a_1-\frac{1}{2}a_3+a_5=\frac{1}{120}, && a_5=\frac{2}{15};\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
$$

因此，有

$$\tan z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\frac{17}{315}z^7+\cdots.$$

从 $\tan z$ 的奇点可以判断，级数的收敛半径应为 $\pi/2$.

应用待定系数法，能得到系数之间的递推关系，从而逐个求出展开系数，但一般很难求出级数的通项公式 (即展开系数 a_n 的解析表达式). 然而，如果我们只需要求出级数中的某一项或某几项系数，待定系数法还是可取的方法之一.

多值函数的 Taylor 展开 对于多值函数，在适当规定了单值分枝后，即可像单值函数那样作 Taylor 展开.

例 5.2 求多值函数 $(1+z)^\alpha$ 在 $z=0$ 的 Taylor 展开，规定 $z=0$ 时 $(1+z)^\alpha=1$.

解 我们可直接求出函数 $(1+z)^\alpha$ 在 $z=0$ 点的各阶导数值，

$$
\begin{aligned}
f(0)&=1,\\
f'(0)&=\alpha\ (1+z)^{\alpha-1}\Big|_{z=0}=\alpha,\\
f''(0)&=\alpha(\alpha-1)\ (1+z)^{\alpha-2}\Big|_{z=0}=\alpha(\alpha-1),\\
&\ \ \vdots\\
f^{(n)}(0)&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)\ (1+z)^{\alpha-n}\Big|_{z=0}\\
&=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
(1+z)^{\alpha} &= 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\cdots \\
&\quad +\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n+\cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}z^n, \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\binom{\alpha}{0}=1 \quad 和 \quad \binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}
$$

称为普遍的二项式展开系数.

级数的收敛区域，还要视割线的作法而定. 收敛半径等于 $z=0$ 到割线的最短距离，所以，最大可能的收敛区域是 $|z|<1$, $R=1$.

例 5.3 求多值函数 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 的 Taylor 展开，规定 $\ln(1+z)\big|_{z=0}=0$.

解 在上述规定下，函数 $\ln(1+z)$ 可表示为定积分，因此

$$
\begin{aligned}
\ln(1+z) &= \int_0^z \frac{1}{1+z}\mathrm{d}z=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n z^n \mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\int_0^z z^n\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+1}z^{z+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{n}z^n. \qquad (5.15)
\end{aligned}
$$

收敛区域也要看割线怎么作. 收敛半径等于 $z=0$ 到割线的最短距离，最大可能的收敛区域是 $|z|<1$， $R=1$.

在无穷远点的 Taylor 展开 如果函数 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 点解析，则也可以在 $z=\infty$ 点展开成 Taylor 级数.

什么叫做 $f(z)$ 在 ∞ 点的 Taylor 展开呢？就像 $f(z)$ 在 ∞ 点解析的概念那样，所谓 $f(z)$ 在 ∞ 点展开成 Taylor 级数，就是作变换 $z=1/t$ ，而将 $f(1/t)$ 在 $t=0$ 点展开成 Taylor 级数. 因为 $f(1/t)$ 在 $t=0$ 点解析，故

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n + \cdots, \quad |t| < r; \qquad (5.16a)$$

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots, \qquad |z| > \frac{1}{r}. \quad (5.16b)$$

值得注意的是，$f(z)$ 在 ∞ 点的 Taylor 级数中只有常数项及负幂项，没有正幂项，而收敛范围为 $|z| > 1/r$，也就是说，级数在以 ∞ 为圆心的某个圆内收敛.

5.3 解析函数的 Laurent 展开

一个函数除了可在解析点作 Taylor 展开外， 有时还需要将它在奇点附近展开成幂级数. 这时就得到 Laurent 展开.

定理 5.2 (Laurent) 设函数 $f(z)$ 在以 b 为圆心的环形区域 $R_1 \le |z-b| \le R_2$ 上单值解析，则对于环域内的任何 z 点，$f(z)$ 可以用幂级数展开为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n, \qquad R_1 < |z-b| < R_2, \qquad (5.17)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta, \qquad (5.18)$$

C 是环域内绕内圆一周的任意一条闭合曲线 (见图 5.1).

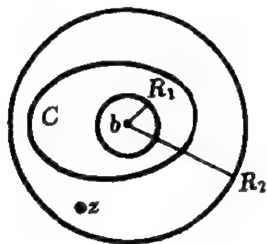


图 5.1 Laurent 展开

证 将环域的内外边界分别记为 C_1 和 C_2，则根据复连通区域的 Cauchy 积分公式，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta.$$

对于 C_2 上的积分，可以直接利用以前的结果，

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-b)^n, \quad |z-b| < R_2,$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

对于 C_1 上的积分

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(z-b)-(\zeta-b)} \mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{z-b} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-b}{z-b}\right)^k \mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z-b)^{-k-1} \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} f(\zeta)(\zeta-b)^k \mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

令 $-k-1=n,\ k=-(n+1)$，则

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta &= \sum_{n=-1}^{-\infty} (z-b)^n \cdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (z-b)^n, \qquad |z-b| > R_1, \end{aligned}$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

把两部分合并起来，就有

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n, \quad R_1 < |z-b| < R_2, \\ a_n &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta. \end{aligned}$$

这里把系数 a_n 公式中的积分围道统一写成了 C.（为什么能这样做？）这个结果称为函数 $f(z)$ 在环域 $R_1 < |z-b| < R_2$ 内的 Laurent 展开，其中的级数称为 Laurent 级数. □

对于上面的结果，也需要作一些补充讨论：

1. 和 Taylor 展开一样，本定理的条件也可以放宽为 $f(z)$ 在 $R_1 < |z-b| < R_2$ 内单值解析.

2. 对于 Laurent 展开来说，系数 (即使是正幂项的系数)

$$a_n \neq \frac{1}{n!} f^{(n)}(b).$$

3. $f(z)$ 在内圆 C_1 中不解析. 一般说来，在 C_1 上是有奇点的. 至于 b 点，可能是 $f(z)$ 的奇点，也可能是 $f(z)$ 的解析点.

如果 b 点是 C_1 内的唯一奇点，则 C_1 可以无限缩小，收敛范围就变成 $0 < |z-b| < R$. 这时就得到 $f(z)$ 在孤立奇点 b 的邻域内的 Laurent 展开.

同样，外圆 C_2 的半径也可以为 ∞ ，甚至在 ∞ 点也收敛.

4. Laurent 展开既有正幂项，又有负幂项. 正幂项在圆 C_2 内 ($|z-b| < R_2$) 绝对收敛，在 C_2 内的任意一个闭区域中一致收敛，称为 Laurent 级数的正则部分；负幂项在圆 C_1 外 ($|z-b| > R_1$) 绝对收敛，在 C_1 外的任意一个闭区域中一致收敛，称为 Laurent 级数的主要部分. 两部分合起来，就构成 Laurent 级数，在环域 $R_1 < |z-b| < R_2$ 内绝对收敛，在环域内的任意一个闭区域中一致收敛.

当 $R_1 = 0$ 时， Laurent 级数的主要部分就完全反映了 $f(z)$ 在 $z = b$ 点的奇异性.

5. **Laurent 展开的唯一性** 设 $f(z)$ 在环域 $R_1 < |z-b| < R_2$ 内有两个 Laurent 级数，

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-b)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n (z-b)^n.$$

两端同乘以 $(z-b)^{-k-1}$ ，沿环域内绕内圆一周的任一围道 C 积分 (这两个级数在围道上显然一致收敛，因而可以逐项积分)，则由于

$$\oint_C (z-b)^{n-k-1} \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\, \delta_{nk},$$

故有 $a_k = a'_k$. 因为 k 任意，故有

$$a_k = a'_k, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{5.19}$$

即证得 Laurent 展开的唯一性. 它告诉我们：如果两个 Laurent 级数在同一环域处处内相等，则对应项系数相等 (即可以比较系数) .

5.4 Laurent 级数求法举例

求 Laurent 展开，可以直接利用公式求系数 (这时要计算围道积分，一般是比较麻烦的)．但是，由于函数在给定环域内的 Laurent 展开是唯一的，因此，不论用什么方法，只要得到了在这个环域内收敛到 $f(z)$ 的幂级数，那它就一定是 $f(z)$ 的 Laurent 展开．所以，Taylor 展开中讲过的方法，以及有关的结果，都可以应用来求 Laurent 展开．

例 5.4 求 $\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $0<|z|<1$ 内和 $|z|>1$ 内的展开式．

解 $\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $0<|z|<1$ 内的展开形式一定是 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$．

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n, \qquad 0<|z|<1.\end{aligned}$$

也可以用部分分式的方法：

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n.$$

$\dfrac{1}{z(z-1)}$ 在 $|z|>1$ 内的 Laurent 展开形式也是 $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$，

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-2}^{-\infty} z^n, \qquad |z|>1.$$

在这里，我们看到，同一个函数在不同的区域内的 Laurent 展开是很不相同的．$1/z(z-1)$ 在 $0<|z|<1$ 内的 Laurent 展开只有一个负幂项，而在 $|z|>1$ 内的 Laurent 展开有无穷多个负幂项，但却没有正幂项．

例 5.5 用待定系数法求 $\cot z$ 在 $z=0$ 邻域内的 Laurent 展开．

解 待定系数法只能用于有限个负幂项 (正幂项) 的情形.

$$\cot z = \sum_{n=-1}^{\infty} b_{2n+1} z^{2n+1}. \tag{5.20}$$

(为什么只有一个负幂项，这个道理在 5.5 节讨论.)

$$\cos z = \sin z \sum_{n=-1}^{\infty} b_{2n+1} z^{2n+1},$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} z^{2n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \sum_{l=0}^{\infty} b_{2l-1} z^{2l-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(2k+1)!} b_{2l-1} z^{2(k+l)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{n} \frac{(-)^{n-l}}{(2n-2l+1)!} b_{2l-1} \right] z^{2n}.\end{aligned}$$

由此得到递推关系

$$\sum_{l=0}^{n} \frac{(-)^l}{(2n-2l+1)!} b_{2l-1} = \frac{1}{(2n)!}. \tag{5.21}$$

逐次求解，即得

$$\begin{array}{lll} n=0: & & b_{-1} = 1; \\ n=1: & \dfrac{1}{3!} b_{-1} - \dfrac{1}{1!} b_1 = \dfrac{1}{2!}, & b_1 = -\dfrac{1}{3}; \\ n=2: & \dfrac{1}{5!} b_{-1} - \dfrac{1}{3!} b_1 + \dfrac{1}{1!} b_3 = \dfrac{1}{4!}, & b_3 = -\dfrac{1}{45}; \\ n=3: & \dfrac{1}{7!} b_{-1} - \dfrac{1}{5!} b_1 + \dfrac{1}{3!} b_3 - \dfrac{1}{1!} b_5 = \dfrac{1}{6!}, & b_5 = -\dfrac{2}{945}; \\ \vdots & & \end{array}$$

所以

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \frac{2}{945} z^5 - \cdots. \tag{5.22}$$

根据 $\cot z$ 的奇点分布，可判断此级数的收敛范围为 $0 < |z| < \pi$.

本题还可以采用级数除法.

$$\begin{aligned}
\cot z &= \frac{1}{\tan z} = \frac{1}{z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots} \\
&= \frac{1}{z}\frac{1}{1 + \frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 - \left(\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right)\right. \\
&\qquad + \left(\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right)^2 \\
&\qquad - \left(\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right)^3 \\
&\qquad \left. + \left(\frac{1}{3}z^2 + \frac{2}{15}z^4 + \frac{17}{315}z^6 + \cdots\right)^4 - + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{z}\left[1 - \frac{1}{3}z^2 + \left(-\frac{2}{15} + \frac{1}{9}\right)z^4\right. \\
&\qquad \left. + \left(-\frac{17}{315} + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{15} - \frac{1}{27}\right)z^6 + \cdots\right] \\
&= \frac{1}{z}\left[1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 - \frac{2}{945}z^6 - \cdots\right] \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 + \cdots.
\end{aligned}$$

例 5.6 求函数 $\ln\frac{z-2}{z-1}$ 在 $1 < |z| < 2$ 及 $2 < |z| < \infty$ 内的幂级数展开.

解 本题中指定的展开区域是环形区域，所以，如果能作幂级数展开的话，得到的一定是 Laurent 级数.

函数 $\ln\frac{z-2}{z-1}$ 有两个枝点：$z = 1$ 和 $z = 2$，故在环域 $1 < |z| < 2$ 内不可能作 Laurent 展开.

在环域 $2 < |z| < \infty$ 内，函数 $\ln\frac{z-2}{z-1}$ 是单值解析的，但仍必须明确规定单值分枝后，方可作 Laurent 展开. 例如，若规定在割线上岸 $\arg(z-2) - \arg(z-1) = \pi$，则

$$\ln\frac{z-2}{z-1}\bigg|_{z=\infty} = 0.$$

于是有

$$\begin{aligned}\ln\frac{z-2}{z-1} &= \ln\frac{1-2/z}{1-1/z} = \ln\left(1-\frac{2}{z}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{z}\right) \\ &= \left[-\frac{2}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{z}\right)^3 - \cdots\right] \\ &\quad - \left[-\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}\right)^3 - \cdots\right] \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{3}{2}\frac{1}{z^2} - \frac{7}{3}\frac{1}{z^3} - \cdots - \frac{2^n-1}{n}\frac{1}{z^n} - \cdots. \end{aligned} \tag{5.23}$$

思考题　若对单值分枝作其他规定，函数 $\ln\dfrac{z-2}{z-1}$ 在环域 $2<|z|<\infty$ 内的 Laurent 展开和 (5.23) 式有何异同？

例 5.7　求 $\exp\left\{\dfrac{z}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)\right\}$ 在 $0<|t|<\infty$ 内的 Laurent 展开.

解　用级数乘法. 因为

$$\mathrm{e}^{zt/2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\frac{t^k}{k!}, \qquad |t|<\infty,$$

$$\mathrm{e}^{-z/2t} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^l\frac{(-)^l}{l!}\left(\frac{1}{t}\right)^l, \qquad \left|\frac{1}{t}\right|<\infty \text{即} |t|>0,$$

所以

$$\begin{aligned}\exp\left\{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\frac{t^k}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^l\frac{(-)^l}{l!}\left(\frac{1}{t}\right)^l \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{k!l!}\left(\frac{z}{2}\right)^{k+l}t^{k-l} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\right]t^n \\ &\quad + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left[\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}\right]t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(z)t^n, \end{aligned} \tag{5.24}$$

其中

$$
\mathrm{J}_n(z)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}, & n=0,1,2,\cdots;\\ \displaystyle\sum_{l=-n}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!(l+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2l+n}, & n=-1,-2,-3,\cdots\end{cases} \tag{5.25}
$$

称为 n 阶 Bessel 函数.

如果无穷远点是函数 $f(z)$ 的奇点，而在无穷远点的邻域内单值解析的话，则可将 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内作 Laurent 展开 (有时就简单地说成在 ∞ 点作 Laurent 展开) .

所谓 $f(z)$ 在 ∞ 点的邻域内 (∞ 点除外) 单值解析，就意味着作变换 $t=1/z$ ，函数 $f(1/t)$ 在 $t=0$ 点的邻域内 ($t=0$ 除外) 单值解析，因而

$$
f\left(\frac{1}{t}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nt^n,\qquad 0<|t|<r, \tag{5.26a}
$$

$$
f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^{-n},\quad \frac{1}{r}<|z|<\infty. \tag{5.26b}
$$

这里的收敛范围可以看成是以 ∞ 点为圆心的一个环域.

$f(1/t)$ 的 Laurent 级数中正幂项 (包括常数项) 部分是正则部分，负幂项是主要部分. 因此，完全对应地，我们把 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 点邻域内的 Laurent 级数中， z 的负幂项称为正则部分，而正幂项称为主要部分. 正幂项完全反映了函数 $f(z)$ 在 ∞ 点的奇异性.

上面的例 5.4 和例 5.6 的第二种情形以及例 5.7 ，也都可以看成是在 ∞ 点邻域内 Laurent 展开.

思考题　求 $f(z)=\sin z$ 在 ∞ 点邻域内的 Laurent 展开.

5.5　单值函数的孤立奇点

设 $f(z)$ 为单值函数 (或多值函数的一个单值分枝) ， b 点是它

的奇点．如果在 b 点存在一个邻域，在该邻域内 (除 b 点外)， $f(z)$ 处处可导，则称 b 为 $f(z)$ 的孤立奇点．

孤立奇点的例子我们已经见过很多．这里举一个非孤立奇点的例子．例如，对于函数 $1/\sin(1/z)$，显然， $1/z=n\pi$，即 $z=1/n\pi$， $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是它的奇点．则 $z=0$ 是这些奇点的聚点 (极限点)：在 $z=0$ 的任意一个邻域中，总存在无穷多个奇点，故 $z=0$ 是非孤立奇点．

如果 $z=b$ 是单值函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则一定存在一个环域 $0<|z-b|<R$，在该环域内， $f(z)$ 可以展开成 Laurent 级数，

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b)^n.$$

这时可能出现三种情况：

1. 级数展开式不含负幂项： b 点称为 $f(z)$ 的可去奇点．例如， $z=0$ 就是函数

$$\frac{\sin z}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)!}z^{2n},\qquad |z|<\infty$$

和

$$\frac{1}{z}-\cot z=\frac{1}{3}z+\frac{1}{45}z^3+\frac{2}{945}z^5+\cdots,\qquad |z|<\pi$$

的可去奇点．

2. 级数展开式只含有限个负幂项： b 点称为 $f(z)$ 的极点．

3. 级数展开式含有无穷多个负幂项： b 点称为 $f(z)$ 的本性奇点．

下面分别讨论函数在三种奇点处的行为．

可去奇点 由于在可去奇点处，级数展开式中不含负幂项，故级数不只是在环域内收敛，而且在环域的中心，即可去奇点 $z=b$ 处也是收敛的．这也就是说，这时的收敛区域是一个圆，圆心在可去奇点 $z=b$，级数在收敛圆内的任一闭区域中一致收敛，因而其和函数连续，

$$\lim_{z\to b} f(z) = \lim_{z\to b}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n = a_0. \tag{5.27}$$

函数在可去奇点处的极限值是有限的. 当然，就可以用此极限值作为 $f(z)$ 的定义，

$$f(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq b; \\ \lim_{z\to b} f(z), & z = b, \end{cases} \tag{5.28}$$

这样得到的 $f(z)$ 在 b 点也就是解析的了. 这正是可去奇点这一称谓的由来.

反过来说，如果 $z = b$ 是函数 $f(z)$ 的孤立奇点，而且 $f(z)$ 在 $z = b$ 的邻域内有界，则 $z = b$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

证 将 $f(z)$ 在 $z = b$ 的邻域内作 Laurent 展开，

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-b)^n, \quad 0 < |z-b| \le \rho.$$

因为在圆 $C: |z-b| = \rho$ 上，$|f(z)| < M$，所以

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{|f(z)|}{|z-b|^{n+1}}|dz| < \frac{M}{\rho^n}.$$

令 $\rho \to 0$，即得

$$a_n = 0, \qquad n = -1, -2, -3, \cdots. \quad \square$$

极点 函数在极点邻域内的 Laurent 展开有有限个负幂项，

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-m}^{\infty} a_n(z-b)^n \\ &= a_{-m}(z-b)^{-m} + a_{-m+1}(z-b)^{-m+1} + \cdots \\ &\quad + a_{-1}(z-b)^{-1} + a_0 + a_1(z-b) + \cdots \\ &= (z-b)^{-m}\left[a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + a_{-m+2}(z-b)^2 + \cdots\right] \\ &= (z-b)^{-m}\phi(z), \end{aligned} \tag{5.29}$$

$\phi(z)$ 在 $z = b$ 点及其邻域内是解析的，$a_{-m} \neq 0$. b 点就称为 $f(z)$ 的 m 阶极点. 显然，只要 $|z-b|$ 足够小，$|f(z)|$ 可以大于任何正

数，即

$$\lim_{n\to b} f(z)=\infty. \tag{5.30}$$

所以，函数在极点处的极限值是 ∞ ，或者说，函数在极点附近是无界的.

反之，如果 b 是 $f(z)$ 的孤立奇点，且 $\lim_{z\to b} f(z)=\infty$ ，则 b 是 $f(z)$ 的极点.

证 因为 $\lim_{z\to b} f(z)=\infty$ ，故当 $|z-b|<\delta$ 时，

$$|f(z)|>M, \qquad |f(z)|^{-1}<\frac{1}{M}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{z\to b}\frac{1}{f(z)}=0.$$

于是可令

$$\frac{1}{f(z)}=(z-b)^m g(z),$$

其中 $\lim_{z\to b} g(z)\neq 0$ ，且 $g(z)$ 在 $z=b$ 及其邻域内解析. 所以

$$f(z)=(z-b)^{-m}\cdot\frac{1}{g(z)}=(z-b)^{-m}\phi(z). \quad \Box$$

从这里还可以看到，如果 $z=b$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则必定是 $1/f(z)$ 的 m 阶零点. 反之亦然. 利用这个关系，可以帮助我们寻找极点.

例如，$z=n\pi$ 是 $1/\sin z$ 的一阶极点；$z=2k\pi\mathrm{i},\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是 $1/\left(\mathrm{e}^z-1\right)$ 的一阶极点； $z=1$ 是 $1/(z-1)^2$ 的二阶极点.

本性奇点 函数在本性奇点邻域内的 Laurent 展开具有无穷多个负幂项.

如果 $z=b$ 是函数 $f(z)$ 的本性奇点，则当 $z\to b$ 时， $f(z)$ 的极限不存在. 更准确地说， $z\to b$ 的方式不同， $f(z)$ 可以逼近不同的数值. 例如， $z=0$ 是函数

$$\mathrm{e}^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n, \quad 0<|z|<\infty$$

的本性奇点. 当 z 以不同方式趋于 0 时，就有不同的结果：

- 当 z 沿正实轴趋于 0 时， $e^{1/z} \to \infty$ ；
- 当 z 沿负实轴趋于 0 时， $e^{1/z} \to 0$ ；
- 当 z 沿虚轴趋于 0 时， $e^{1/z}$ 不趋于一个确定的数.

特别是，

- 当 z 以序列 $\pm i/2n\pi, n = 1, 2, 3, \cdots$ 趋于 0 时， $e^{1/z}$ 恒为 1 (因而以 1 为其聚点)；
- 当 z 以序列 $\pm i/(2n+1)\pi, n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 趋于 0 时， $e^{1/z}$ 恒为 -1 (因而以 -1 为其聚点)；
- 当 z 以序列 $\pm i/(2n+1/2)\pi, n = 0, 1, 2, \cdots$ 趋于 0 时， $e^{1/z}$ 恒为 $\mp i$ (因而以 $\mp i$ 为其聚点).

事实上，可以证明，对于本性奇点 $z = b$ 来说，任意给定一个数 A(有限或 ∞)，总可以找到一个序列 $z_n \to b$，使得 $f(z_n) \to A$(不证). 更准确地说，在本性奇点的任意一个小邻域内，函数 $f(z)$ 可以取 (并且取无穷多次) 任意的有限数值，顶多可能有一个例外.

无穷远点 像以前一样，可以通过变换 $z = 1/t$，把 $f(z)$ 化成 $f(1/t)$ 来讨论. 若 $t = 0$ 点是 $f(1/t)$ 的可去奇点，则 $z = \infty$ 点是 $f(z)$ 的可去奇点；若 $t = 0$ 点是 $f(1/t)$ 的极点，则 $z = \infty$ 点是 $f(z)$ 的极点；若 $t = 0$ 点是 $f(1/t)$ 的本性奇点，则 $z = \infty$ 点是 $f(z)$ 的本性奇点.

例如， $z = \infty$ 是 $1/(1+z)$ 的可去奇点； $z = \infty$ 是 $1 + z^2$ 的二阶极点； $z = \infty$ 是 $e^z, \sin z, \cos z, \cdots$ 的本性奇点.

练习 5.1 试就 $z = \infty$ 点是 $f(z)$ 的可去奇点、极点、本性奇点三种情形，分别讨论 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 点邻域内 Laurent 展开的特点.

*5.6 Bernoulli 数和 Euler 数

这一节中介绍两个重要的展开式.

先讨论函数

$$f(z)=\frac{z}{e^z-1} \tag{5.31}$$

在 $0<|z|<2\pi$ 中的 Laurent 展开. 在函数 $f(z)$ 中，分母的零点为 $2n\pi$, $n=0,\pm1,\pm2,\cdots$，故可在环域 $0<|z|<2\pi$ 中作 Laurent 展开. 但是由于

$$\begin{aligned}\frac{z}{e^z-1} &= \frac{z}{\left(1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots\right)-1}\\ &= \frac{1}{1+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z^2}{3!}+\cdots}=1-\frac{z}{2}+\cdots+c_nz^n+\cdots.\end{aligned}$$

因此 $f(z)$ 在 $0<|z|<2\pi$ 内的展开式中，实际上并没有负幂项，级数实际上在整个圆域 $|z|<2\pi$ 中都是收敛的，换句话说， $z=0$ 点是 $f(z)$ 的可去奇点.

下面来求出展开系数 c_n . 注意在上面的展开式中， z 的奇次幂项只有一项不为零，这是因为

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{z}{2}\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}-1\right)=\frac{z}{2}\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}-\frac{z}{2},$$

第一项为 z 的偶函数，展开时只有 z 的偶次幂. 于是

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{(2n)!}B_nz^{2n}.$$

B_n 称为 Bernoulli 数，用待定系数法可以求出它们. 为此，将上式改写成

$$\begin{aligned}1 &= \frac{e^z-1}{z}\left[1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{(2n)!}B_nz^{2n}\right]\\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{(l+1)!}z^l\left[1-\frac{z}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{(2n)!}B_nz^{2n}\right]\\ &= 1-\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{n-1}{2(n+1)!}+\sum_{k=1}^{[n/2]}\frac{(-)^k}{(2k)!(n-2k+1)!}B_k\right]z^n.\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{(-)^k (n+1)!}{(2k)!(n-2k+1)!} \mathrm{B}_k + \frac{n-1}{2} = 0.$$

这就是 Bernoulli 数的递推关系. 由此可以求出

$$\begin{aligned}
&\mathrm{B}_1 = \frac{1}{6}, \quad &\mathrm{B}_2 = \frac{1}{30}, \quad &\mathrm{B}_3 = \frac{1}{42}, \\
&\mathrm{B}_4 = \frac{1}{30}, \quad &\mathrm{B}_5 = \frac{5}{66}, \quad &\mathrm{B}_6 = \frac{691}{2730}, \\
&\mathrm{B}_7 = \frac{7}{6}, \quad &\mathrm{B}_8 = \frac{3617}{510}, \quad &\cdots.
\end{aligned}$$

应用上面的结果还可以得到许多有用的展开式，例如

$$\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} = \frac{\mathrm{i}z}{2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z/2}} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad |z| < 2\pi;$$

$$\frac{z}{2}\tan\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} - z\cot z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-1}{(2n)!} \mathrm{B}_n z^{2n}, \qquad |z| < \pi;$$

$$z\csc z = \frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\tan\frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(2^{2n}-1\right)}{(2n)!} \mathrm{B}_n z^{2n}, \quad |z| < \pi.$$

用同样的办法还可以得到

$$\frac{2\mathrm{e}^{z/2}}{\mathrm{e}^z+1} = \operatorname{sech}\frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n \mathrm{E}_n}{(2n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \qquad |z| < \pi,$$

其中 E_n 称为 Euler 数，

$$\mathrm{E}_0 = 1, \quad \mathrm{E}_1 = 1, \quad \mathrm{E}_2 = 5, \quad \mathrm{E}_3 = 61, \quad \cdots,$$

它们满足递推关系

$$\sum_{l=0}^{k} (-)^l \frac{(2k)!}{(2l)!(2k-2l)!} \mathrm{E}_l = 0, \qquad k \geq 1. \tag{5.32}$$

练习 5.2　　证明： $\sec z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{E}_n}{(2n)!} z^{2n}$ ， $|z| < \frac{\pi}{2}$.

*5.7 整函数和亚纯函数

函数在有限远处均解析，则称为整函数．整函数当然可以在 $z=0$ 点作 Taylor 展开，得到的 Taylor 级数一定在全平面收敛．

Liouville 定理 (见 3.6 节) 告诉我们，一个在全平面解析的函数 (因此是整函数)，若 $z\to\infty$ 时有界，则必为常数．因此，除了常数这种特殊情形外，无穷远点一定是整函数的奇点．

无穷远点可以是整函数的极点．若极点的阶数为 n，则此整函数一定就是 n 次多项式．

无穷远点也可能是整函数的本性奇点，它的 Taylor 级数中有无穷多个正幂项．e^z, $\sin z$ 和 $\cos z$ 就是这样的整函数．

如果整函数在有限远处无零点，那么，这个整函数一定可以写成 $e^{g(z)}$ 的形式，其中的 $g(z)$ 也是整函数．

除了极点之外，在有限远处都解析的函数称为亚纯函数．在任意一个给定的有限区域内，一定只有有限个极点 (为什么？)．无穷远点可能是亚纯函数的常点或孤立奇点，也可能是亚纯函数的非孤立奇点 (极点的聚点)．如果限于无穷远点是亚纯函数的常点或极点的情形，则有限远处一定只有有限个极点．设这些极点为 b_r, $r=1,2,\cdots,k$，每个极点的阶数为 m_r．于是，这时的亚纯函数 $f(z)$ 就可以写成

$$f(z) = \phi(z)+\sum_{r=1}^{k}\Big[c_{-m_r}^{(r)}(z-b_r)^{-m_r}+c_{-m_r+1}^{(r)}(z-b_r)^{-m_r+1} +\cdots+c_{-1}^{(r)}(z-b_r)^{-1}\Big], \tag{5.33}$$

而 $\phi(z)$ 为整函数．根据 Liouville 定理，可以断定 $\phi(z)$ 一定是常数 (无穷远点是亚纯函数的常点) 或多项式 (无穷远点是亚纯函数的极点)．这样，把上式通分，就能看出，这样的亚纯函数一定能表示为两个多项式相除．

第六章　二阶线性常微分方程的幂级数解法

6.1　二阶线性常微分方程的常点和奇点

在数学物理问题中，经常会出现一些二阶线性常微分方程. 这里先讨论齐次方程，这是因为，一方面，非齐次方程的通解原则上可以由相应齐次方程的通解得到 (例如，通过常数变易法或其他方法)，另一方面，从下面的讨论可以看到，本章介绍的级数解法，原则上也完全适用于非齐次方程. 二阶线性齐次常微分方程的标准形式是

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0, \tag{6.1}$$

$p(z)$ 和 $q(z)$ 称为方程的系数. 显然，方程的解是完全由方程的系数决定的. 特别是，我们将看到，方程解的解析性是完全由方程系数的解析性决定的.

用级数解法解常微分方程时，得到的解总是某一指定点 z_0 的邻域内收敛的无穷级数. 方程系数 $p(z)$, $q(z)$ 在 z_0 点的解析性就决定了级数解在 z_0 点的解析性，或者说，就决定了级数解的形式，例如，是 Taylor 级数还是 Laurent 级数.

如果 $p(z)$, $q(z)$ 在 z_0 点解析，则 z_0 点称为方程的常点.

如果 $p(z)$, $q(z)$ 中至少有一个在 z_0 点不解析，则 z_0 点称为方程的奇点.

例 6.1　超几何方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+\big[\gamma-(1+\alpha+\beta)z\big]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0 \tag{6.2}$$

的系数是

$$p(z)=\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)} \quad 和 \quad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}.$$

在有限远处，$p(z)$ 和 $q(z)$ 有两个奇点：$z=0$ 和 $z=1$．所以，除了 $z=0$ 和 $z=1$ 是超几何方程的奇点外，有限远处的其他点都是方程的常点．

例 6.2 Legendre 方程

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0, \tag{6.3}$$

在有限远处的奇点为 $x=\pm1$．

练习 6.1 已知二阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w(z)}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w(z)}{\mathrm{d}z}+q(z)w(z)=0$$

的两个线性无关解是 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$，试证：

$$p(z)=-\frac{\Delta_1(z)}{\Delta(z)}, \qquad q(z)=\frac{\Delta_2(z)}{\Delta(z)},$$

其中

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix} w_1(z) & w_1'(z) \\ w_2(z) & w_2'(z) \end{vmatrix}, \qquad \Delta_1(z)=\begin{vmatrix} w_1(z) & w_1''(z) \\ w_2(z) & w_2''(z) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(z)=\begin{vmatrix} w_1'(z) & w_1''(z) \\ w_2'(z) & w_2''(z) \end{vmatrix}.$$

练习 6.2 求二阶线性常微分方程，使其解为：

(1) $w_1(z)=z, \quad w_2(z)=\mathrm{e}^z$.

(2) $w_1(z)=\exp\left\{\dfrac{1}{z}\right\}, \quad w_2(z)=\exp\left\{-\dfrac{2}{z}\right\}$.

(3) $w_1(z)=\cos\dfrac{a}{z}, \quad w_2(z)=\sin\dfrac{a}{z}$.

(4) $w_1(z)=\dfrac{z^2}{z^2-1}, \quad w_2(z)=\dfrac{z}{z^2-1}$.

要判断无穷远点 $z=\infty$ 是不是方程 (6.1) 的奇点，则必须将方程作自变量的变换 $z=1/t$．这时，

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=-t^2\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}; \quad \frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}=t^4\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+2t^3\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

因此，方程 (6.1) 变为

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}t^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}p\left(\frac{1}{t}\right)\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{t^4}q\left(\frac{1}{t}\right)w=0. \tag{6.4}$$

如果 $t=0$ 是方程 (6.4) 的常点 (奇点)，则称无穷远点 $z=\infty$ 是方程 (6.1) 的常点 (奇点)．这就是说，$t=0$ (即 $z=\infty$) 为方程常点的条件是

$$p\left(\frac{1}{t}\right) = 2t+a_2t^2+a_3t^3+\cdots, \tag{6.5a}$$

$$q\left(\frac{1}{t}\right) = b_4t^4+b_5t^5+\cdots, \tag{6.5b}$$

即

$$p(z) = \frac{2}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\frac{a_3}{z^3}+\cdots, \tag{6.6a}$$

$$q(z) = \frac{b_4}{z^4}+\frac{b_5}{z^5}+\cdots. \tag{6.6b}$$

由此可见，无穷远点是超几何方程和 Legendre 方程的奇点．

6.2 方程常点邻域内的解

首先，我们不加证明地介绍下面的定理 ①．

定理 6.1 如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R$ 内单值解析，则在此圆内常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0, \tag{6.7a}$$

$$w(z_0)=c_0,\quad w'(z_0)=c_1\quad (c_0,\ c_1\text{ 为任意常数}) \tag{6.7b}$$

有唯一的一个解 $w(z)$，并且 $w(z)$ 在这个圆内单值解析．

根据这个定理，可以把 $w(z)$ 在 z_0 点的邻域 $|z-z_0|<R$ 内展开为 Taylor 级数

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k. \tag{6.8}$$

① 定理 6.1 及下一节的定理 6.2, 6.3 的证明，可见参考书目 [12]，第二章 2.2, 2.3 和 2.4 节．

显然，这里 $(z-z_0)^0$ 与 $(z-z_0)^1$ 的系数 c_0 与 c_1 正好和初值条件一致. 将这个形式的级数解代入微分方程 (6.7a)，比较系数，就可以求出系数 c_k. 定理说明，系数 $c_k(k=2,3,\cdots)$ 均可用 c_0, c_1 表示.

我们还是通过一个实例来说明具体的求解过程.

例 6.3 求 Legendre 方程

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0 \tag{6.9}$$

在 $x=0$ 点邻域内的解，其中 l 是一个参数.

解 可以看出，$x=0$ 是方程的常点，因此，可令解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k. \tag{6.10}$$

代入方程 (6.9)，有

$$\left(1-x^2\right)\sum_{k=0}^{\infty}c_kk(k-1)x^{k-2}-2x\sum_{k=0}^{\infty}c_kkx^{k-1}+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k=0,$$

整理合并，就得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-\left[k(k+1)-l(l+1)\right]c_k\right\}x^k=0.$$

因此，根据 Taylor 展开的唯一性，可得

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}-\left[k(k+1)-l(l+1)\right]c_k=0,$$

即

$$c_{k+2}=\frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k. \tag{6.11}$$

这样就得到了系数之间的递推关系. 反复利用递推关系，就可以求得系数

$$\begin{aligned}
c_{2n}&=\frac{(2n-l-2)(2n+l-1)}{2n(2n-1)}c_{2n-2}\\
&=\frac{(2n-l-2)(2n-l-4)(2n+l-1)(2n+l-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}c_{2n-4}\\
&=\cdots\\
&=\frac{c_0}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)\cdots(-l)
\end{aligned}$$

$$\times (2n+l-1)(2n+l-3)\cdots(l+1), \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= \frac{(2n-l-1)(2n+l)}{(2n+1)(2n)}c_{2n-1} \\
&= \frac{(2n-l-1)(2n-l-3)(2n+l)(2n+l-2)}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)}c_{2n-3} \\
&= \cdots \\
&= \frac{c_1}{(2n+1)!}(2n-l-1)(2n-l-3)\cdots(-l+1) \\
&\quad \times (2n+l)(2n+l-2)\cdots(l+2).
\end{aligned} \tag{6.13}$$

利用 Γ 函数的性质 (见 9.2 节)

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z),$$

可以将 c_{2n} 和 c_{2n+1} 写成

$$c_{2n} = \frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}c_0, \tag{6.14}$$

$$c_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)}c_1. \tag{6.15}$$

所以， Legendre 方程 (6.9) 的解就是

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x), \tag{6.16}$$

其中

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)}x^{2n}, \tag{6.17}$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma\left(n-\frac{l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l-1}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(n+1+\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)}x^{2n+1}. \tag{6.18}$$

正如定理所说，任意给定一组初条件 c_0 和 c_1 ，就一定可以求

出方程的一个特解. 特别是，如果取 $c_0=1, c_1=0$ ，就得到特解 $y_1(x)$ ；如果取 $c_0=0, c_1=1$ ，就得到特解 $y_2(x)$. 显然，这两个特解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是线性无关的. 从这两个线性无关特解出发，就可以构造出方程的通解. 因此，如果把上面解式中的常数 c_0 和 c_1 看成是任意叠加常数，那么，上面得到的就是方程的通解了.

在上面求得的特解中， $y_1(x)$ 只含有 x 的偶次幂， $y_2(x)$ 只含有 x 的奇次幂，即 $y_1(x)$ 是 x 的偶函数， $y_2(x)$ 是 x 的奇函数. 从求解的过程来看，这是由于递推关系中只出现系数 c_{k+2} 和 c_k ，而与 c_{k+1} 无关，因此 c_{2n} 完全由 c_0 决定， c_{2n+1} 完全由 c_1 决定. 从根本上来说，方程的解的对称性 (这里指的是奇偶性) ，当然应该是方程的对称性的反映. 事实上，在 Legendre 方程中令 $x\to -x$ ，就有

$$\left[1-(-x)^2\right]\frac{\mathrm{d}^2y(-x)}{\mathrm{d}(-x)^2}-2(-x)\frac{\mathrm{d}y(-x)}{\mathrm{d}(-x)}+l(l+1)y(-x)=0,$$

即仍为

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2y(-x)}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y(-x)}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y(-x)=0.$$

这说明，在变换 $x\to -x$ 之下， Legendre 方程的形式是不变的. 所以，如果 $y(x)$ 是 Legendre 方程的解， $y(-x)$ 也一定是 Legendre 方程的解. 因此 $y(x)\pm y(-x)$ 也是 Legendre 方程的解. 我们知道， $y(x)+y(-x)$ 一定是 x 的偶函数， $y(x)-y(-x)$ 一定是 x 的奇函数.

通过这个实例，可以看出在常点邻域内求级数解的一般步骤. 这就是：将方程常点邻域内的解展开为 Taylor 级数，代入微分方程；比较系数，得到系数之间的递推关系；然后反复利用递推关系，求出系数 c_k 的普遍表达式 (用 c_0 和 c_1 表示) ，从而最后得出级数解；由于递推关系一定是线性的 (因为方程是线性的) ，所以最后的级数解一定可以写成

$$w(z)=c_0w_1(z)+c_1w_2(z)$$

的形式.

需要指出的是，一般说来，系数之间的递推关系中，会同时出

现 c_k, c_{k+1}, c_{k+2} 三个相邻的系数，因此 c_k 会同时依赖于 c_0 和 c_1 ，最后求得的 $w_1(z)$ 或 $w_2(z)$ 就不会只含有 z 的偶次幂或奇次幂.

6.3　方程正则奇点邻域内的解

这里只讨论极点性的奇点. 一般说来，方程的奇点可能同时也是解的奇点. 不但可能是解的极点或本性奇点，还可能是解的枝点. 我们再次不加地介绍另一个定理：

定理 6.2　如果 z_0 是方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

的奇点，则在 $p(z)$ 和 $q(z)$ 都解析的环形区域 $0<|z-z_0|<R$ 内，方程的两个线性无关解是

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(z-z_0)^k, \tag{6.19a}$$

$$w_2(z)=gw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k(z-z_0)^k, \tag{6.19b}$$

其中 ρ_1, ρ_2 和 g 都是常数.

显然，如果 ρ_1 或 ρ_2 不是整数，或 $g\neq 0$ ，方程都有多值函数解， z_0 为其枝点.

现在的问题是，如果我们把解 (6.19a) 或 (6.19b) 代入方程，就会发现，尽管仍然能得到系数之间的递推关系，但却无法求出系数的普遍表达式. 因为这时的级数解中，一般说来，都有无穷多个正幂项和负幂项，反复利用递推关系将会永无休止.

例外的情形是如果级数解中只有有限个负幂项，这时总可以调整相应的 ρ 值，使得级数解中没有负幂项，

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,$$

$$w_2(z) = g w_1(z) \ln(z - z_0) + (z - z_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k.$$

于是，反复利用递推关系就可以求得系数的普遍表达式. 当然，还必须要定出 ρ 值.

我们把这种形式的解称为正则解. 当 $g \neq 0$ 时， $w_2(z)$ 的形式和 $w_1(z)$ 不同 (含有对数项)，因而需分别求解. 当 $g = 0$ 时， $w_2(z)$ 的表达式中不含对数项，两个解的形式相同.

为了找出方程奇点邻域内存在正则解的条件，不妨先取

$$w(z) = (z - z_0)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

同时把 $p(z)$ 和 $q(z)$ 也在 $0 < |z - z_0| < R$ 内作 Laurent 展开

$$p(z) = (z - z_0)^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

$$q(z) = (z - z_0)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k.$$

由于 $z = z_0$ 点是方程的极点性奇点，故 m, n 必为整数，且至少有一个为正整数. 将 $w(z)$ 以及 $p(z)$ 和 $q(z)$ 的级数表达式代入方程，并消去因子 $(z - z_0)^{\rho-2}$ ，就得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho)(k + \rho - 1)(z - z_0)^k \\
&\quad + (z - z_0)^{1-m} \sum_{l=0}^{\infty} a_l (z - z_0)^l \sum_{k=0}^{\infty} c_k (k + \rho)(z - z_0)^k \\
&\quad + (z - z_0)^{2-n} \sum_{l=0}^{\infty} b_l (z - z_0)^l \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = 0.
\end{aligned}$$

从原则上说，比较上式两端各次幂的系数，如果能求出 ρ 值以及系数 c_k 的普遍表达式，我们就求出了正则解 $w(z)$. 特别是，为了要求得两个正则解，前提当然是必须求出两个 ρ 值，即 ρ 必须是二次方程的解. 我们考察一下上面得到的等式. 在等式左端共有三

项，它们的最低次幂项分别为 $c_0\rho(\rho-1)(z-z_0)^0$, $c_0a_0\rho(z-z_0)^{1-m}$ 和 $c_0b_0(z-z_0)^{2-n}$. 因此，为了要能求得两个 ρ 值，这个等式左端的最低次幂一定是 0 次幂，即 $1-m\geq 0$ ， $2-n\geq 0$. 换句话说， z_0 应该是 $p(z)$ 的不超过一阶的极点，是 $q(z)$ 的不超过二阶的极点，即 $(z-z_0)p(z)$, $(z-z_0)^2q(z)$ 在 z_0 点解析. 这种奇点称为方程的正则奇点，否则，称为非正则奇点.

这样看来，在方程的正则奇点的邻域内，两个解可能都是正则解. 尽管上面的分析还不完全(未讨论含对数项的正则解的情形)，但是，这个结论却是正确的. 见下面的定理 (不证) .

定理 6.3 方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0,$$

在它的奇点 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 有两个正则解

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,\qquad c_0\neq 0,\tag{6.20a}$$

$$w_2(z)=gw_1(z)\ln(z-z_0)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k(z-z_0)^k,\qquad g\text{或}d_0\neq 0\tag{6.20b}$$

的充要条件是 z_0 为方程的正则奇点.

ρ_1 和 ρ_2 称为正则解的指标.

这样，我们将正则解 $w_1(z)$ 或 $w_2(z)$ 代入方程，通过比较系数，求出指标和递推关系，并进而求出系数的普遍表达式，便可以求得方程在正则奇点的邻域内的解. 实际的求解过程，总是先将 $w_1(z)$ 形式的解代入方程，如果能够同时求得两个线性无关解，当然任务便告完成，没有必要再将 $w_2(z)$ 形式的解代入方程. 如果这时只能求得一个解 (例如 $\rho_1=\rho_2$ 时)，那么，就还必须再将 $w_2(z)$ 形式的解 (这时的 g 一定不为 0) 代入方程求解. 所以，求方程在正则奇点邻域内的解，一般说来，要比在常点邻域内求解的问题复杂一些，特别是如果方程中还含有参数，需要讨论各种可能性. 这可以从下

一节给出的实例中看出.

需要指出，根据常微分方程的普遍理论，对于一个二阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0,$$

如果已经求出了一个解 $w_1(z)$，那么，总可以通过积分

$$w_2(z)=Aw_1(z)\int^z\left\{\frac{1}{[w_1(z)]^2}\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]\right\}\mathrm{d}z \tag{6.21}$$

来求出第二解. 这是因为这两个解都满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}+q(z)w_1=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_2}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}+q(z)w_2=0.$$

用 $w_2(z)$ 和 $w_1(z)$ 分别乘这两个方程，再相减，便可得到

$$w_1\frac{\mathrm{d}^2 w_2}{\mathrm{d}z^2}-w_2\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\left(w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}-w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\right)=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}-w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\right)+p(z)\left(w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}-w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}\right)=0.$$

积分，可得

$$w_1\frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}z}-w_2\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z}=A\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right].$$

两端除以 w_1^2，又可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{w_2}{w_1}\right)=\frac{A}{w_1^2}\exp\left[-\int^z p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right].$$

再积分一次，就得到上面的结果.

例 6.4 显然， $z=0$ 和 $z=1$ 都是超几何方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0 \tag{6.22}$$

的正则奇点； $x=\pm 1$ 也都是 Legendre 方程

$$\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0$$

的正则奇点.

为了判断无穷远点是否为正则奇点，同样要作变换 $z=1/t$，如果 $t=0$ 是变换后的方程的正则奇点，即 $t=0$ 点是变换后的方程的奇点，且

$$t\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}p\left(\frac{1}{t}\right)\right]=2-\frac{1}{t}p\left(\frac{1}{t}\right)$$

和

$$t^2\cdot\frac{1}{t^4}q\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^2}q\left(\frac{1}{t}\right)$$

在 $t=0$ 点解析，亦即 $z=\infty$ 点是变换前方程的奇点，且 $zp(z)$ 和 $z^2q(z)$ 在 $z=\infty$ 点解析，则称 $z=\infty$ 点是变换前的方程的正则奇点. 所以，无穷远点 $z=\infty$ 也都是超几何方程和 Legendre 方程的正则奇点.

6.4 Bessel 方程的解

Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \tag{6.23}$$

是应用中常见的常微分方程，其中 ν 是常数， $\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$. 容易判断， $x=0$ 是方程的正则奇点， $x=\infty$ 是方程的非正则奇点. 本节讨论 Bessel 方程在 $x=0$ 邻域内的解，给出求解的完整过程.

设

$$y(x)=x^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k,\qquad c_0\neq 0, \tag{6.24}$$

代入方程 (6.23)，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)(k+\rho-1)x^{k+\rho-2}+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)x^{k+\rho-2}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\rho}-\nu^2\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+\rho-2}=0,$$

约去 $x^{\rho-2}$，即得

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left[(k+\rho)^2-\nu^2\right]x^k+\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2}=0.$$

根据级数展开的唯一性，即可比较系数.

由最低次幂 x^0 项的系数，得

$$c_0\left(\rho^2-\nu^2\right)=0,$$

因为 $c_0\neq 0$，所以得到指标 ρ 满足的方程 (称为指标方程)

$$\rho^2-\nu^2=0. \tag{6.25}$$

因而求得

$$\rho_1=\nu, \qquad \rho_2=-\nu. \tag{6.26}$$

因为 $\mathrm{Re}\,\nu\geq 0$，所以 $\mathrm{Re}\,\rho_1\geq \mathrm{Re}\,\rho_2$.

由 x^1 的系数，得

$$c_1\left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]=0 \qquad \text{即} \qquad c_1(2\rho+1)=0.$$

因此

$$c_1=0, \qquad \text{当}\,\rho\neq -1/2; \tag{6.27a}$$

$$c_1\,\text{任意}, \qquad \text{当}\,\rho=-1/2. \tag{6.27b}$$

以后将看到，即使 $\rho=-1/2$，仍可以取 $c_1=0$.

由 x^n 的系数，得

$$c_1\left[(\rho+n)^2-\nu^2\right]+c_{n-2}=0 \qquad \text{即} \qquad c_n n(2\rho+n)+c_{n-2}=0,$$

因此，得到递推关系

$$c_n=-\frac{1}{n(n+2\rho)}c_{n-2}. \tag{6.28}$$

反复利用递推关系，就可以求得

$$\begin{aligned} c_{2n} &= -\frac{1}{n(n+\rho)}\frac{1}{2^2}c_{2n-2} \\ &= (-)^2\frac{1}{n(n-1)(n+\rho)(n+\rho-1)}\frac{1}{2^4}c_{2n-4} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-)^n \frac{1}{n!(n+\rho)(n+\rho-1)\cdots(\rho+1)} \frac{1}{2^{2n}} c_0 \\
&= \frac{(-)^n}{n!} \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(n+\rho+1)} \frac{1}{2^{2n}} c_0,
\end{aligned} \tag{6.29}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{2n+1} &= -\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n+\rho+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{2^2} c_{2n-1} \\
&= \frac{(-)^2}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\rho+\frac{1}{2}\right)\left(n+\rho-\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{2^4} c_{2n-3} \\
&= \cdots \\
&= (-)^n \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\rho+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\rho+\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{2^{2n}} c_1 \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{6.30}
$$

用 $\rho=\rho_1=\nu$ 代入，即得

$$
y_1(x) = c_0 x^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \Gamma(\nu+1)}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{6.31}
$$

取 $c_0 = \dfrac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}$，就有解

$$
\mathrm{J}_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{6.32}
$$

用 $\rho=\rho_2=-\nu$ 代入，有

$$
y_2(x) = c_0 x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k \Gamma(-\nu+1)}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \tag{6.33}
$$

取 $c_0 = \dfrac{2^{\nu}}{\Gamma(-\nu+1)}$，又可得

$$
\mathrm{J}_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}. \tag{6.34}
$$

现在补充讨论一下 $\rho=-1/2$ 的情形．前面曾经提到，这时仍然可以取 $c_1=0$．因为如果 $c_1\neq 0$，则

$$c_{2n+1} = \frac{(-)^n \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma(n+1)} \frac{1}{2^{2n}} c_1,$$

其结果只不过是在 $y_2(x)$ 中再增加一项

$$x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1} = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1/2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= c_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathrm{J}_{1/2}(x).$$

只不过是在 $y_2(x)$ 中再叠加上第一解.

很容易以为现在已经完成了求解 Bessel 方程的任务，因为上面的确求出了两个指标，并且对应于每一个指标，也都求出了相应的解. 当 $\nu \neq$ 整数 时的确如此，因为这时求出的两个解 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 线性无关. 但是，一个明显的事实是：当 $\nu = 0$ 时，上面的求解过程只是给出了同一个解

$$\mathrm{J}_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!\,k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{6.35}$$

这表明，这时的第二解应该含有对数项，即

$$y_2(x) = g\mathrm{J}_0(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} d_k x^k, \qquad g \neq 0. \tag{6.36}$$

求微商，得

$$\frac{\mathrm{d}y_2(x)}{\mathrm{d}x} = g\frac{\mathrm{dJ}_0(x)}{\mathrm{d}x}\ln x + g\mathrm{J}_0(x)\cdot\frac{1}{x} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k k x^{k-1},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_2(x)}{\mathrm{d}x^2} = g\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{J}_0(x)}{\mathrm{d}x^2}\ln x + 2g\frac{\mathrm{dJ}_0(x)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{x} - g\mathrm{J}_0(x)\cdot\frac{1}{x^2} + \sum_{k=0}^{\infty} d_k k(k-1)x^{k-2}.$$

代入零阶 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0,$$

即得

$$g\left[\frac{\mathrm{d}^2 \mathrm{J}_0(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{dJ}_0(x)}{\mathrm{d}x}+\mathrm{J}_0(x)\right]\ln x+g\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k k}{k!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-2}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}d_k k(k-1)x^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}d_k k x^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^k=0.$$

注意 $\mathrm{J}_0(x)$ 也是零阶 Bessel 方程的解，上式第一行中 $\ln x$ 前方括号内诸项之和应为 0 ，所以

$$g\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,k!}\frac{k}{2^{2k-2}}x^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}d_k k^2 x^k+\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^{k+2}=0. \tag{6.37}$$

这里已经代入了 $\mathrm{J}_0(x)$ 的级数表达式.

现在比较各项的系数. 对于 x^0 项，有 $g\cdot 0+d_0\cdot 0=0$ ，所以

$$g\,\text{任意},\quad d_0\,\text{任意}. \tag{6.38}$$

再比较 x^1 项的系数，得

$$d_1=0. \tag{6.39}$$

由 x^2 项的系数，可以求得 $-g+4d_2+d_0=0$ ，所以

$$d_2=-\frac{1}{4}d_0+\frac{1}{4}g. \tag{6.40}$$

如此继续，就可以分别得到偶次幂项和奇次幂项的系数. 比较 x^{2k} 项的系数，得

$$g\cdot\frac{(-)^k}{k!\,k!}\frac{2k}{2^{2k-1}}+d_{2k}(2k)^2+d_{2k-2}=0,$$

于是得到

$$\begin{aligned}
d_{2k}&=-\frac{1}{(2k)^2}d_{2k-2}-\frac{(-)^k}{k!\,k!}\frac{1}{2^{2k}}\frac{1}{k}g\\
&=-\frac{1}{(2k)^2}\left[-\frac{1}{(2k-2)^2}d_{2k-4}-\frac{(-)^{k-1}}{(k-1)!(k-1)!}\frac{1}{2^{2k-2}}\frac{1}{k-1}g\right]\\
&\quad-\frac{(-)^k}{k!\,k!}\frac{1}{2^{2k}}\frac{1}{k}g\\
&=\frac{(-)^2}{k^2(k-1)^2}\frac{1}{2^4}d_{2k-4}-\frac{(-)^k}{k!\,k!}\frac{g}{2^{2k}}\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}\right]
\end{aligned}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{(-)^k}{k!\,k!}\frac{1}{2^{2k}}d_0 - \frac{(-)^k}{k!\,k!}\frac{g}{2^{2k}}\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + 1\right]. \tag{6.41}$$

比较 x^{2k+1} 项的系数，又得到

$$(2k+1)^2 d_{2k+1} + d_{2k-1} = 0,$$

由于 $d_1 = 0$ ，因此，

$$d_{2k+1} = 0. \tag{6.42}$$

最后，就求出了 $\nu = 0$ 时的第二解

$$\begin{aligned} y_2(x) &= g\mathrm{J}_0(x)\ln x + d_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &\quad - g\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,k!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \cdots + 1\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \end{aligned} \tag{6.43}$$

流行的做法是取

$$g = \frac{2}{\pi}, \qquad d_0 = -\frac{2}{\pi}\big[\ln 2 + \psi(1)\big],$$

其中的 ψ 函数就是 Γ 函数的对数微商. 由 Γ 函数的性质 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ，容易证明

$$\psi(z+n) = \psi(z) + \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n-1},$$

这样得到的解 (记为 $\mathrm{N}_0(x)$) 就可以写成

$$\mathrm{N}_0(x) = \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_0(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,k!}\psi(k+1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \tag{6.44}$$

如果说，前面指出的 $\nu = 0$ 时 $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 实际上是同一个解，是显而易见的事实，那么，当 $\nu = n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$ 时，前面仍然只是求出了一个解，乍一看来，的确似乎有点费解. 这是因为，前面我们的确求出了两个不同的指标值，而且，也的确求出了两个形式看来并不相同的解. 但是，事实并非如此. 我们可以从三方面来说明.

第一，当 $\nu = n,\ n = 1, 2, 3, \cdots$ 时，级数解

$$\mathrm{J}_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

中前 $k=0,1,\cdots,n-1$ 各项的系数均为 0，这是因为 $z=0,-1,-2,\cdots$ 都是 Γ 函数的一阶极点．所以

$$\mathrm{J}_{-n}(x)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\Gamma(k-n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

令 $k-n=l$，就有

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{-n}(x) &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^{n+l}}{(n+l)!\Gamma(l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2(n+l)-n}\\ &= (-)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^l}{l!\,\Gamma(n+l+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l+n}\\ &= (-)^n\mathrm{J}_n(x),\end{aligned}\tag{6.45}$$

和第一解 $\mathrm{J}_n(x)$ 线性相关．第二，在级数解法中，本来总是自然地约定级数解的首项系数不为 0，但是，现在却奇怪地违反了这个约定：在导出 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)\,(\nu=1,2,3,\cdots)$ 时，取 $c_0=2^{\nu}/\Gamma(1-\nu)$，这恰恰是规定了 $c_0=0$．第三，我们当然可以舍弃掉这个不合理的规定，使得 $y_2(x)$ 的级数中前面 $k=0,1,\cdots,n-1$ 诸项的系数不为 0，但这势必导致从 $k=n$ 项开始系数均变为无穷．这也可以从递推关系

$$c_{2k}=-\frac{1}{k(k-\nu)}\frac{1}{2^2}c_{2k-2}$$

看出．当 $\nu=n$ 时，显然 c_{2n} 无意义，因而以后各项系数也都失去意义．

以上的分析，无非是要说明，当 $\nu=n,\ n=1,2,3,\cdots$ 时，Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0$$

的第二解也一定含有对数项，即

$$y_2(x)=g\mathrm{J}_n(x)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}d_kx^{k-n},\quad g\neq 0.\tag{6.46}$$

将 $y_2(x)$ 代入 n 阶 Bessel 方程，即得

$$g\left[\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{J}_n(x)}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_n(x)}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)\mathrm{J}_n(x)\right]\ln x$$

$$
+\frac{g}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(2k+n)}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n-2}
$$

$$
+\sum_{k=0}^{\infty}d_k(k-n)(k-n-1)x^{k-n-2}
$$

$$
+\sum_{k=0}^{\infty}d_k(k-n)x^{k-n-2}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}d_kx^{k-n}=0.
$$

注意 $\mathrm{J}_n(x)$ 也是 n 阶 Bessel 方程的解，上式第一行中 $\ln x$ 前方括号内诸项之和应为 0 ，所以

$$
g\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,(k+n)!}\frac{2k+n}{2^{2k+n-1}}x^{2k+n-2}
$$

$$
+\sum_{k=0}^{\infty}d_k[(k-n)^2-n^2]x^{k-n-2}+\sum_{k=0}^{\infty}d_kx^{k-n}=0,
$$

或者写成

$$
g\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,(k+n)!}\frac{2k+n}{2^{2k+n-1}}x^{2k+2n}
$$

$$
+\sum_{k=0}^{\infty}d_kk(k-2n)x^k+\sum_{k=0}^{\infty}d_kx^{k+2}=0. \tag{6.47}
$$

现在来比较等式两端各项的系数.

由 x^0 项的系数，得 $d_0\cdot 0=0$ ，所以

$$
d_0\text{ 任意}. \tag{6.48}
$$

由 x^1 项的系数， $d_1(1-2n)=0$ ，所以

$$
d_1=0. \tag{6.49}
$$

由 x^{2k+1} 项的系数，有

$$
d_{2k+1}(2k+1)(2k-2n+1)+d_{2k-1}=0,
$$

所以

$$
d_{2k+1}=-\frac{1}{(2k+1)(2k-2n+1)}d_{2k-1}=\cdots=0. \tag{6.50}
$$

对于 x^{2k} 的系数，需要区别 $k<n$, $k=n$, $k>n$ 三种情形. 当 $k<n$ 时，

$$d_{2k}2k(2k-2n)+d_{2k-2}=0.$$

所以

$$\begin{aligned}d_{2k} &= \frac{1}{k(n-k)}\frac{1}{2^2}d_{2k-2}\\ &= \frac{1}{k(k-1)(n-k)(n-k+1)}\frac{1}{2^4}d_{2k-4}\\ &= \cdots\\ &= \frac{(n-k-1)!}{k!\,(n-1)!}\frac{1}{2^{2k}}d_0.\end{aligned} \tag{6.51}$$

特别是

$$d_{2n-2}=\frac{1}{[(n-1)!]^2}\frac{1}{2^{2(n-1)}}d_0. \tag{6.52}$$

当 $k=n$ 时，

$$\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}g+d_{2n}\cdot 0+d_{2n-2}=0.$$

所以

$$d_{2n}\ 任意, \tag{6.53}$$

$$g=-2^{n-1}(n-1)!d_{2n-2}=-\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}d_0. \tag{6.54}$$

当 $k>n$ 时，

$$\frac{(-)^{k-n}}{(k-n)!\,k!}\frac{2k-n}{2^{2k-n-1}}g+d_{2k}2k(2k-2n)+d_{2k-2}=0.$$

所以

$$\begin{aligned}d_{2k} &= -\frac{1}{k(k-n)}\frac{1}{2^2}d_{2k-2}-\frac{(-)^{k-n}}{k!\,(k-n)!}\frac{2k-n}{2^{2k-n-1}}\frac{1}{4k(k-n)}g\\ &= -\frac{1}{k(k-n)}\frac{1}{2^2}d_{2k-2}-\frac{(-)^{k-n}}{k!\,(k-n)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-n}\right)\frac{1}{2^{2k-n+1}}g\\ &= \frac{(-)^2}{k(k-1)(k-n)(k-n-1)}\frac{1}{2^4}d_{2k-4}\end{aligned}$$

$$
-\frac{(-)^{k-n}}{k!\,(k-n)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-n}+\frac{1}{k-n-1}\right)\frac{1}{2^{2k-n+1}}g
$$

$$
=\cdots
$$

$$
=\frac{(-)^{k-n}n!}{k!\,(k-n)!}\frac{1}{2^{2k-2n}}d_{2n}-\frac{(-)^{k-n}}{k!\,(k-n)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{k-n}+\frac{1}{k-n-1}+\cdots+\frac{1}{1}\right)\frac{1}{2^{2k-n+1}}g. \tag{6.55}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= gJ_n(x)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}d_{2k}x^{2k-n} \\
&= gJ_n(x)\ln x-\frac{g}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&\quad +d_{2n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-)^{k-n}2^n n!}{k!\,(k-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&\quad -\frac{g}{2}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(-)^{k-n}}{k!\,(k-n)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{k-n}+\frac{1}{k-n-1}+\cdots+1\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&= gJ_n(x)\ln x-\frac{g}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\
&\quad +d_{2n}2^n n!\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \\
&\quad -\frac{g}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right. \\
&\quad \left.+\frac{1}{k-n}+\frac{1}{k-n-1}+\cdots+1\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.
\end{aligned} \tag{6.56}
$$

通常取

$$
g=\frac{2}{\pi},\qquad d_{2n}=-\frac{1}{2^n\pi n!}\left[2\ln 2+\psi(n+1)+\psi(1)\right].
$$

这样便有

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_n(x) &= \frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n(x)\ln\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,(k+n)!}\Big[\psi(n+k+1) \\ &\quad + \psi(k+1)\Big]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \quad n=1,2,3,\cdots. \qquad (6.57)\end{aligned}$$

比较一下前面得到的 $\mathrm{N}_0(x)$ 的表达式 (6.44) ，可以看出，这里的 $\mathrm{N}_n(x)$ 也适用于 $n=0$ ，只要理解为这时须去掉第二项的有限和.

现在我们才完成了 Bessel 方程的求解问题. 当然，一个常微分方程的特解还可以有其他 (无穷多种) 取法. 我们将在第十七章中继续讨论这个问题.

下面总结一下求常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + q(z)w = 0$$

在正则奇点邻域内的解的一般步骤，同时回答：在什么情况下，方程的第二解不含对数项；在什么情况下，方程的第二解可能含对数项；在什么情况下，方程的第二解一定含对数项. 我们的结论是：若规定方程在正则奇点处的两个指标 $\mathrm{Re}\,\rho_1 \geq \mathrm{Re}\,\rho_2$ ，则

当$\rho_1 - \rho_2 \neq$ 整数时，	第二解一定不含对数项；
当$\rho_1 = \rho_2$时，	第二解一定含对数项；
当$\rho_1 - \rho_2 =$ 正整数时，	第二解可能含对数项.

为了简单起见，不妨假设 $z=0$ 点是它的正则奇点. 于是，在 $z=0$ 点的邻域内，可将方程的系数作 Laurent 展开

$$p(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{l-1}, \qquad q(z) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{l-2}.$$

设解为

$$w(z) = z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

代入方程，就有

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2}$$
$$+\sum_{l=0}^{\infty} a_l z^{l-1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)z^{k+\rho-1} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l z^{l-2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{k+\rho} = 0,$$

即

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k}\left[a_l(k+\rho-l)+b_l\right]c_{k-l}z^k = 0.$$

比较等式两端最低次幂，即 z^0 的系数，可得

$$c_0\left[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0\right]=0.$$

由于 $c_0 \neq 0$，所以

$$\boxed{\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0.} \tag{6.58}$$

这就是指标方程，注意其中的 a_0 和 b_0 为

$$\boxed{a_0=\lim_{z\to 0} z\,p(z),\quad b_0=\lim_{z\to 0} z^2 q(z).} \tag{6.59}$$

根据指标方程可以求出两个指标，ρ_1 和 ρ_2．规定 $\mathrm{Re}\,\rho_1 \geq \mathrm{Re}\,\rho_2$．

再比较 z^n 的系数，得

$$(n+\rho)(n+\rho-1)c_n+\sum_{l=0}^{n}\left[a_l(n+\rho-l)+b_l\right]c_{n-l}=0,$$

即

$$\left[(n+\rho)(n+\rho-1)+a_0(n+\rho)+b_0\right]c_n$$
$$+\sum_{l=1}^{n}\left[a_l(n+\rho-l)+b_l\right]c_{n-l}=0.$$

这样便得出了系数之间的递推关系．反复利用递推关系，就可以得到系数 c_n 的普遍表达式．当然，在 c_n 的表达式中一定含有 ρ．用 $\rho=\rho_1$ 代入，即可得到解 $w_1(z)$．再用 $\rho=\rho_2$ 代入，又可得到解

$w_2(z)$. 如果 $\rho_1-\rho_2\neq$ 整数，我们就求出了方程的 (两个线性无关的) 特解.

但是，需要注意，当 $\rho_1=\rho_2$ 时，显然这样只能得到同一个解. 所以，这时第二解一定含对数项.

当 $\rho_1-\rho_2=$ 正整数 m 时，对于第二解的系数 $c_m^{(2)}$ ，有

$$\Big[(m+\rho_2)(m+\rho_2-1)+a_0(m+\rho_2)+b_0\Big]c_m^{(2)} + \sum_{l=1}^{m}\Big[a_l(m+\rho_2-l)+b_l\Big]c_{m-l}^{(2)}=0.$$

注意 $m+\rho_2=\rho_1$ ，所以有

$$0\cdot c_m^{(2)}+\sum_{l=1}^{m}\Big[a_l(\rho_1-l)+b_l\Big]c_{m-l}^{(2)}=0.$$

因此

当 $\sum_{l=1}^{m}\Big[a_l(\rho_1-l)+b_l\Big]c_{m-l}^{(2)}\neq 0$ 时，	$c_m^{(2)}$ 无解；
当 $\sum_{l=1}^{m}\Big[a_l(\rho_1-l)+b_l\Big]c_{m-l}^{(2)}=0$ 时，	$c_m^{(2)}$ 任意.

对于第一种情形，方程的第二解也一定含对数项. 对于第二种情形，当然还能继续求解. 只是这时以后的各项系数 $c_n^{(2)}\,(n>m)$ 会同时依赖于 $c_0(2)$ 和 $c_m^{(2)}$. 第二解 $w_2(z)$ 便有两项，一项正比于 $c_0^{(2)}$ ，一项正比于 $c_m^{(2)}$. 再仔细分析一下，就会发现， $c_{m+n}^{(2)}$ 和 $c_m^{(2)}$ 之间的关系与 $c_n^{(1)}$ 和 $c_0^{(1)}$ 之间的关系完全一样，因此，与 $c_m^{(2)}$ 成正比的项正好就是第一解 (最多可能差一个常数倍数)，因而不妨取 $c_m^{(2)}=0$.

*6.5　方程非正则奇点附近的解

前面讨论了在方程正则奇点邻域内的解. 我们知道，方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

在它的奇点 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 有两个正则解的充要条件是

z_0 为方程的正则奇点. 如果方程的奇点 $z=z_0$ 不是正则奇点, 在 $z=z_0$ 点的邻域内仍然可以有正则解, 但是最多只能有一个正则解. 根据 6.3 节的讨论, 如果将 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内作 Laurent 展开

$$p(z)=(z-z_0)^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k,$$

$$q(z)=(z-z_0)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k.$$

则当且仅当 $p(z)$ 的阶 m 和 $q(z)$ 的阶 n 满足

$$\boxed{m>1,\ \text{并且}\, m\geq n-1}$$

时, 指标方程为一次方程, 因此方程才有并且只有一个正则解. 当这个条件满足时, 当然完全可以模仿正则奇点处的求解步骤求解, 这里不再赘述.

如果无穷远点 $z=\infty$ 是非正则奇点, 原则上应当作变换 $z=1/t$, 然后解在 $t=0$ 点的邻域内讨论即可. 但是, 也可以直接令

$$w(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-k}$$

同时将 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 $z=\infty$ 点的邻域内作 Laurent 展开

$$p(z)=z^m\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{-k},\qquad q(z)=z^n\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^{-k}.$$

代入微分方程, 则得到

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k-\rho)(k-\rho-1)z^{-k}+z^{1+m}\sum_{l=0}^{\infty}a_l z^{-l}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k-\rho)z^{-k}$$
$$+z^{2+n}\sum_{l=0}^{\infty}b_l z^{-l}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-k}=0.$$

所以, 方程只有一个正则解的条件是

$$\boxed{m\geq 0,\ \text{并且}\, m\geq n+1,}$$

即在 $z=\infty$ 点 $p(z)$ 的阶大于 $q(z)$ 的阶. 注意, 方程只有一个正则解的条件, 对于有限远处和无穷远点, 在形式上有所不同.

现在讨论另一种情形, 即方程非正则奇点邻域内不存在正则解, 或方程有一个正则解, 但我们要求这个正则解之外的另一解. 这时, $z=z_0$ 应该是解的本性奇点 (当然还可能是枝点). 为了描写解在 $z=z_0$ 点的这种奇异性, 不妨假设

$$w(z)=\mathrm{e}^{Q(z)}v(z),$$

使得 $z=z_0$ 是 $\mathrm{e}^{Q(z)}$ 的本性奇点, 而 $v(z)$ 可以写成正则解的形式

$$v(z)=(z-z_0)^\rho\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k,\quad c_0\neq 0. \tag{6.60}$$

这种形式的解称为常规解. 把这种解代入方程, 则得 $v(z)$ 的方程

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}+p^*(z)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+q^*(z)v=0. \tag{6.61}$$

其中

$$\begin{aligned}p^*(z)&=p(z)+2Q'(z),\\ q^*(z)&=q(z)+p(z)Q'(z)+Q''(z)+\left[Q'(z)\right]^2.\end{aligned}$$

根据方程只有一个正则解的要求, 就有可能恰当地选择 $Q(z)$, 并进而求出解 $w(z)$.

下面我们就来求 Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

在无穷远点邻域内的常规解. 设

$$y(x)=\mathrm{e}^{Q(x)}v(x), \tag{6.62}$$

则 $v(x)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p^*(x)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+q^*(x)=0, \tag{6.63}$$

其中

$$p^*(x)=\frac{1}{x}+2Q'(z), \tag{6.64}$$

$$q^*(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2} + \frac{Q'(x)}{x} + Q''(x) + \left[Q'(x)\right]^2. \tag{6.65}$$

为了保证 $z = \infty$ 是 $\mathrm{e}^{Q(x)}$ 的本性奇点，可取 $Q(x)$ 为 x 的多项式，这也同时满足了 $p^*(x)$ 的阶 $m \geq 0$ 的要求；再进一步，为了使得 $p^*(z)$ 的阶大于 $q^*(z)$ 的阶，则必须取 $Q(z) = \lambda z$，并且

$$1 + \lambda^2 = 0,$$

即 $\lambda = \pm\mathrm{i}$．这样，$v(x)$ 所满足的方程就是

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{1}{x} + 2\lambda\right)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \left(\frac{\lambda}{x} - \frac{\nu^2}{x^2}\right)v = 0. \tag{6.66}$$

设

$$v(x) = x^\rho \sum_{l=0}^{\infty} c_l x^{-l}, \tag{6.67}$$

则有

$$\sum_{l=0}^{\infty} c_l(\rho - l)(\rho - l - 1)x^{-l} + \left(\frac{1}{x} + 2\lambda\right)\sum_{l=0}^{\infty} c_l(\rho - l)x^{-l+1}$$
$$+ \left(\frac{\lambda}{x} - \frac{\nu^2}{x^2}\right)\sum_{l=0}^{\infty} c_l x^{-l+2} = 0,$$

即

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[(\rho - l)^2 - \nu^2\right]c_l x^{-l} + \lambda\sum_{l=0}^{\infty}\left[(2\rho + 1) - 2l\right]c_l x^{-l+1} = 0.$$

比较 x^1 项的系数，即得

$$2\rho + 1 = 0 \quad 即 \quad \rho = -\frac{1}{2}.$$

所以，如果只取到解的首项，则在无穷远点 $z = \infty$ 附近，Bessel 方程的解便可写成

$$y(x) = c_0 \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}x}\sqrt{\frac{1}{x}}\,[1 + \cdots]. \tag{6.68}$$

为了求出整个解，不妨先将 $\rho = -1/2$ 代入，于是方程就化为

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left[\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \nu^2\right]c_l x^{-l} - 2\lambda\sum_{l=0}^{\infty} c_l l x^{-l+1} = 0. \tag{6.69}$$

再比较 x^{-k+1} 项的系数，得到递推关系

$$c_k = -\frac{4\nu^2-(2k-1)^2}{2^2k}\frac{1}{2\lambda}c_{k-1}. \tag{6.70}$$

反复利用递推关系，就可以得到系数 c_k 的普遍表达式：

$$\begin{aligned}
c_k &= -\frac{4\nu^2-(2k-1)^2}{2^2k}\frac{1}{2\lambda}c_{k-1}\\
&=(-)^2\frac{\left[4\nu^2-(2k-1)^2\right]\left[4\nu^2-(2k-3)^2\right]}{2^4k(k-1)}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2c_{k-2}\\
&=\cdots\\
&=\frac{(-)^k}{2^{2k}k!}\left[4\nu^2-(2k-1)^2\right]\left[4\nu^2-(2k-3)^2\right]\cdots\\
&\quad\times\left[4\nu^2-3^2\right]\left[4\nu^2-1^2\right]\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^kc_0\\
&=\frac{(\nu,k)}{(-2\lambda)^k}c_0,
\end{aligned} \tag{6.71}$$

其中 $(\nu,0)=1$ ，

$$(\nu,k)=\frac{\left[4\nu^2-(2k-1)^2\right]\left[4\nu^2-(2k-3)^2\right]\cdots\left[4\nu^2-3^2\right]\left[4\nu^2-1^2\right]}{2^{2k}k!}.$$

通常令

$$c_0=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp\left[-\lambda\left(\frac{\nu\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{6.72}$$

于是就可以求得 Bessel 方程在无穷远点 $z=\infty$ 邻域内的解.

但是，容易判断，这个级数解的收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k-1}}{c_k}\right|=0.$$

这说明，在一般情况下，这样得到的级数解是发散的，除非 ν 是半奇数，即 $\nu=n+1/2$ ，这时从 x^{-n-1} 项起，各项的系数均为 0 ，级数截断为多项式，

$$y(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[\lambda\left(x-\frac{n+1}{2}\pi\right)\right]\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1/2,\,k)}{(-2\lambda x)^k}.$$

将 $\lambda=\pm\mathrm{i}$ 代入，就得到 Bessel 方程的两个解

$$y_1(x) = (-\mathrm{i})^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k(n+1/2,\,k)}{(2\mathrm{i}x)^k}, \tag{6.73}$$

$$y_2(x) = \mathrm{i}^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1/2,\,k)}{(2\mathrm{i}x)^k}. \tag{6.74}$$

如果 ν 不是半奇数，那么，得到的级数解实际上是 Bessel 方程的解 (事实上，是 Hankel 函数) 当 $|x|\to\infty$ 时的渐近展开，

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[\mathrm{i}\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(\nu,\,k)}{(2\mathrm{i}x)^k}$$
$$(-\pi<\arg x<2\pi), \tag{6.75}$$

$$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-\mathrm{i}\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\nu,\,k)}{(2\mathrm{i}x)^k}$$
$$(-2\pi<\arg x<\pi). \tag{6.76}$$

把它们重新作线性组合，还可以得到 Bessel 函数和 Neumann 函数在 $|x|\to\infty,\ -\pi<\arg x<\pi$ 时的渐近展开，

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_\nu(x) &= \frac{\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)+\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)}{2}\\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(\nu,\,2k)}{(2x)^{2k}}\right.\\ &\qquad \left.-\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(\nu,\,2k+1)}{(2x)^{2k+1}}\right],\end{aligned} \tag{6.77}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_\nu(x) &= \frac{\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)-\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)}{2\mathrm{i}}\\ &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(\nu,\,2k)}{(2x)^{2k}}\right.\\ &\qquad \left.+\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k(\nu,\,2k+1)}{(2x)^{2k+1}}\right].\end{aligned} \tag{6.78}$$

第七章　解 析 延 拓

7.1　解析函数的零点孤立性和解析函数的唯一性

在这一节里，介绍解析函数的两个重要性质，它们具有非常重要的理论价值.

定义　如果 $f(z)$ 在 a 点及其邻域内解析， $f(a)=0$ ，则称 $z=a$ 为 $f(z)$ 的零点.

设 $f(z)$ 在 $z=a$ 点及其邻域内解析，则当 $|z-a|$ 充分小时，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n, \tag{7.1}$$

故若 $z=a$ 为零点，则必有

$$a_0=a_1=\cdots=a_{m-1}=0, \qquad a_m\neq 0. \tag{7.2}$$

此时，称 $z=a$ 点为 $f(z)$ 的 m 阶零点，相应地，

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0, \qquad f^{(m)}(a)\neq 0. \tag{7.3}$$

零点的阶数都是确定的正整数 —— 在函数的解析区域内，不可能有分数次的零点.

解析函数零点的一个重要性质是它的孤立性，即

定理 7.1　若 $f(z)$ 不恒等于零，且在包含 $z=a$ 在内的区域内解析，则必能找到圆 $|z-a|=\rho\,(\rho>0)$ ，使在圆内除了 $z=a$ 可能为零点外， $f(z)$ 无其他零点.

证　设 a 为 $f(z)$ 的 m 阶零点，则

$$f(z)=(z-a)^m\phi(z),$$

$\phi(z)$ 在 $|z-a|<R$ 内解析，且 $\phi(a)\neq 0$. 因为 $\phi(z)$ 在 $z=a$ 点连续，即任给 $\varepsilon>0$ ，存在 $\rho>0$ ，使当 $|z-a|<\rho$ 时，恒有 $|\phi(z)-\phi(a)|<\varepsilon$. 不妨取 $\varepsilon=|\phi(a)|/2$ ，则得

$$|\phi(z)|>|\phi(a)|-\varepsilon=\frac{1}{2}|\phi(a)|>0.$$

由此即证得 $f(z)$ 在 $|z-a|<\rho$ 内除了 $z-a$ 之外没有其他零点. □

这个定理称为解析函数的零点孤立性定理. 根据这个定理，可以推出解析函数零点的下面两个重要性质：

推论 1 设 $f(z)$ 在 $G:|z-a|<R$ 内解析. 若在 G 内存在 $f(z)$ 的无穷多个零点 $\{z_n\}$ ，且

$$\lim_{n\to\infty} z_n=a,$$

但 $z_n\neq a$ ，则 $f(z)$ 在 G 内恒为 0 .

证 因 $f(z)$ 在 $z=a$ 点连续， $\lim\limits_{z\to a} f(z)=f(a)$. 若取 $z\to a$ 的一个特殊序列，即 $\{z_n\}$ ，当然仍有

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n)=f(a).$$

但 $f(z_n)=0$ ，故

$$f(a)=0,$$

即 $z=a$ 是 $f(z)$ 的零点，并且是 $f(z)$ 的非孤立零点 (即 $f(z)$ 的零点的极限点) . 在 $z=a$ 的任何邻域内总存在无穷多个 $f(z)$ 的零点. 根据上面证明的零点孤立性定理，知必有 $f(z)\equiv 0$. 因为若 $f(z)$ 不恒为零，在 $z=a$ 点必存在一个邻域，在此邻域内除 $z=a$ 外 $f(z)$ 别无零点. □

从上面的证明可以看出，推论 1 中的条件 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$ 可以减弱为序列 $\{z_n\}$ 的一个极限点为 a .

推论 2 设 $f(z)$ 在 $G:|z-a|<R$ 内解析. 若在 G 内存在过 a 点的一段弧 l 或含有 a 点的一个子区域 g ，在 l 上或 g 内 $f(z)\equiv 0$ ，则在整个区域 G 内 $f(z)\equiv 0$.

证 这个推论是显然的，因为这时在 l 上或 g 内总能找到一个

以 $z=a$ 点为极限点的序列 $\{z_n\}$，且 $z_n \neq a$． □

推论 2 的成立范围是以 $z=a$ 点为圆心的圆域，但是很容易推广到一般形状的区域.

推论 3 设 $f(z)$ 在 G 内解析. 若在 G 内存在一点 $z=a$ 及过 a 点的一段弧 l 或含有 a 点的一个子区域 g，在 l 上或 g 内 $f(z)\equiv 0$，则在整个区域 G 内 $f(z)\equiv 0$．

证 不妨在 G 内任取一点 $z=b$，证明存在 b 点的一个邻域，在此邻域内 $f(z)\equiv 0$. 为此，如图 7.1 所示，作一折线连接 $z=a$ 和 $z=b$. 若折线 (上的点) 到 G 的边界的最小距离为 d，则将折线任意分割为 n 份，其分点为

$$a_0=a,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n=b,$$

只要相邻两点间的距离小于 d 即可. 以每一分点 a_k 为圆心，r 为半径作圆域 $g_k:|z-a_k|<r$，只要 $d/2<r<d$，则所有的 g_k 均处于 G 内，且彼此相叠. 这时，由推论 2 首先可以得知，在 g_0 内 $f(z)\equiv 0$. 因此，在 g_0 与 g_1 的公共区域 $g_0\bigcap g_1$ 内当然也有 $f(z)\equiv 0$. 再次利用推论 2，又可证得在 g_1 内有 $f(z)\equiv 0$. 如此反复利用推论 2，即可证得在 g_n(即在 b 点的邻域) 内 $f(z)\equiv 0$. 由于 b 点的任意性，这样就证明了在整个区域 G 内均有 $f(z)\equiv 0$． □

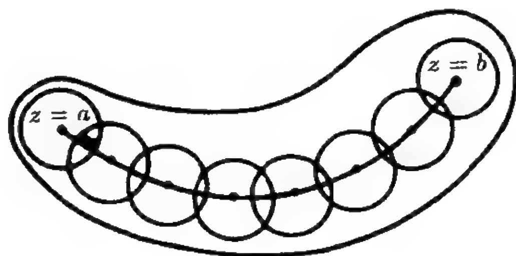


图 7.1

很容易把推论 1 改写成解析函数的唯一性定理.

定理 7.2 设在区域 G 内有两个解析函数 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$，且在 G 内存在一个序列 $\{z_n\}$，$f_1(z_n)=f_2(z_n)$. 若 $\{z_n\}$ 的一个极限点 $z=a(\neq z_n)$ 也落在 G 内，则在 G 内有 $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

证 我们只需考虑函数 $g(z)=f_1(z)-f_2(z)$. 由定理所设，根据推论 1 即可得到 G 在内 $g(z)\equiv 0$，即 $f_1(z)\equiv f_2(z)$． □

同样，可以把推论 3 改写为推论 4 (证明从略).

推论 4 设 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 都在区域 G 内解析，且在 G 内的一段弧或一个子区域内相等，则在 G 内 $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

作为它的特殊情形，还有：

推论 5 在实轴上成立的恒等式，在 z 平面上仍然成立，只要这个恒等式两端的函数在 z 平面上都是解析的.

7.2 解析延拓

先介绍一个例子.

幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \tag{7.4}$$

在以 $z=0$ 点为圆心的单位圆 $g_1 : |z| < 1$ 内收敛，代表一个解析函数，记为 $f_1(z)$. 在圆外，级数是发散的. 利用这个幂级数表达式，可以求出 $f_1(z)$ 在单位圆内任意一点的函数值及各阶导数值. 例如，在 $z = \mathrm{i}/2$ 点，有

$$f_1\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = 1 + \frac{\mathrm{i}}{2} + \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 + \cdots,$$

$$f_1'\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = 1 + 2\cdot\frac{\mathrm{i}}{2} + 3\cdot\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 + \cdots,$$

$$f_1''\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = 2\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot\frac{\mathrm{i}}{2} + 4\cdot 3\cdot\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 + \cdots,$$

$$\vdots$$

$$f_1^{(n)}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right) = n! + \frac{(n+1)!}{1!}\frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{(n+2)!}{2!}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 + \cdots,$$

$$\vdots$$

因此， $f_1(z)$ 在 $z = \mathrm{i}/2$ 点的 Taylor 展开是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_1^{(n)}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)\cdot\left(z - \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n . \tag{7.5}$$

这个级数当然也在它的收敛圆 g_2 : $|z-\mathrm{i}/2|<r$ 内收敛，也代表了一个解析函数，记为 $f_2(z)$.

$f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 有什么关系呢？显然，在 g_1 与 g_2 的公共区域 $g_1\bigcap g_2$ 内， $f_1(z)\equiv f_2(z)$. 事实上，

$$f_1(z)=\frac{1}{1-z}, \tag{7.6}$$

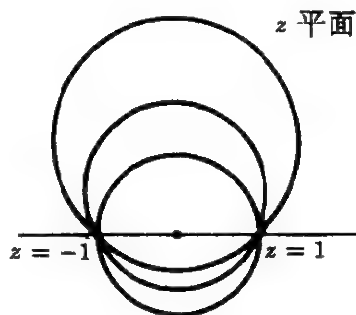


图 7.2　解析延拓

并且

$$f_1^{(n)}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=\frac{n!}{\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1}}, \tag{7.7}$$

所以，也能求得

$$\begin{aligned} f_2(z) &=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{n+1}}\left(z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n \\ &=\frac{1}{1-z}, \qquad \left|z-\frac{\mathrm{i}}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

因此， $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 只不过是同一个函数 (即 $1/(1-z)$) 在不同区域内的表达式. 这两个表达式都有各自的有效范围： $g_1:|z|<1$ 和 $g_2:|z-(\mathrm{i}/2)|<\sqrt{5}/2$. 同时 g_1 和 g_2 也有公共区域 $g_1\bigcap g_2$. 在公共区域内， $f_1(z)\equiv f_2(z)$.

这样，我们从定义在一定区域 g_1 内的幂级数出发，有可能得到在另一区域 g_2 内的另一幂级数表达式，在两个区域的公共部分 $g_1\bigcap g_2$ 内二者相等. 重复这个步骤，就有可能超出原来的定义范围，甚至可能扩展到整个 z 平面.

从这个例子，可以引出解析延拓的概念.

定义　设函数 $f_1(z)$ 在区域 g_1 内解析，函数 $f_2(z)$ 在区域 g_2 内解析，而在 g_1 与 g_2 的公共区域 $g_1\bigcap g_2$ 内， $f_1(z)\equiv f_2(z)$ ，则称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 g_2 内的解析延拓；反之， $f_1(z)$ 是 $f_2(z)$ 在 g_1 内的解析延拓.

显然，采用解析延拓的办法，就可以用来扩大函数的定义域和解析范围. 例如，用级数或积分定义的函数，本来都有一定的适用范围，但是，通过解析延拓，就可能定义出在更大范围内的解析函数. 在上面的例子中，就得到了在区域 $g_1 \bigcup g_2$ 内解析的函数 $f(z)$，

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in g_1; \\ f_2(z), & z \in g_2. \end{cases} \tag{7.9}$$

这方面的一个实际例子，就是 Γ 函数. 由常用的积分定义 (只在右半平面解析) 出发，经过解析延拓，从而得到它在全平面的定义 (详见 9.1 节).

另一类要用到解析延拓的问题是常微分方程的求解问题. 例如，对于二阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + q(z)w = 0, \tag{7.10}$$

通常也只能求得在一定范围内的解式. 通过解析延拓，可以从这个解式推算出在其他范围内的表达式.

例 7.1 设 w_1 是方程 (7.10) 的解，在区域 G_1 内解析. 若 $\widetilde{w}_1$ 是 w_1 在区域 G_2 内的解析延拓，即

$$w_1 \equiv \widetilde{w}_1, \qquad z \in G_1 \bigcap G_2, \tag{7.11}$$

试证明：$\widetilde{w}_1$ 仍是方程的解.

证 设

$$\frac{\mathrm{d}^2 \widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z} + q(z)\widetilde{w}_1 = g(z),$$

$g(z)$ 在 G_2 内解析. 因为 w_1 是方程 (7.10) 在区域 G_1 内的解，故在其子区域 $G_1 \bigcap G_2$ 内，仍满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_1}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}z} + q(z)w_1 = 0.$$

而在此子区域内，$w_1(z) \equiv \widetilde{w}_1(z)$，故

$$\frac{\mathrm{d}^2 \widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z} + q(z)\widetilde{w}_1 = 0, \qquad z \in G_1 \bigcap G_2,$$

即 $g(z) \equiv 0, z \in G_1 \bigcap G_2$. 根据解析函数的唯一性，立即证得

$$g(z) \equiv 0, \qquad z \in G_2,$$

亦即 $\widetilde{w}_1$ 在 G_2 内满足方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z^2} + p(z)\frac{\mathrm{d}\widetilde{w}_1}{\mathrm{d}z} + q(z)\widetilde{w}_1 = 0. \quad \square$$

例 7.2 设 w_1 和 w_2 都是方程 (7.10) 的两个线性无关解，且均在区域 G_1 内解析. 若 $\widetilde{w}_1$ 和 $\widetilde{w}_2$ 分别是 w_1 和 w_2 在区域 G_2 内的解析延拓，即在 $z \in G_1 \bigcap G_2$ 中

$$w_1 \equiv \widetilde{w}_1, \quad w_2 \equiv \widetilde{w}_2. \tag{7.12}$$

试证： $\widetilde{w}_1$ 和 $\widetilde{w}_2$ 仍线性无关.

证 由例 7.1 知， $\widetilde{w}_1$ 和 $\widetilde{w}_2$ 仍是方程 (在 G_2 内) 的解. 由于 w_1 和 w_2 的线性无关性 ①，

$$\Delta[w_1, w_2] \equiv \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \neq 0, \quad z \in G_1. \tag{7.13}$$

设

$$\Delta[\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2] \equiv \begin{vmatrix} \widetilde{w}_1 & \widetilde{w}_2 \\ \widetilde{w}_1' & \widetilde{w}_2' \end{vmatrix} = g(z), \tag{7.14}$$

$g(z)$ 在 G_2 内解析. 由于在 $z \in G_1 \bigcap G_2$ 中，

$$w_1 \equiv \widetilde{w}_1, \quad w_2 \equiv \widetilde{w}_2, \tag{7.15}$$

故 $g(z) \neq 0, z \in G_1 \bigcap G_2$. 仍然根据解析函数的唯一性，就证得

$$g(z) \neq 0, \quad z \in G_2. \tag{7.16}$$

所以， $\widetilde{w}_1$ 和 $\widetilde{w}_2$(在 G_2 内) 仍线性无关. $\square$

解析延拓是复变函数理论中最重要的概念之一. 本节只是非常浅显地介绍了一下解析延拓的概念，并没有涉及解析延拓的一

---

① 事实上，应该有 $\Delta[w_1, w_2]$ 在 G_1 内任何一点均不为零，这是因为

$$\Delta(z) \equiv \Delta[w_1(z), w_2(z)] = \Delta(z_0) \cdot \exp\left[-\int_{z_0}^{z} p(\zeta)\mathrm{d}\zeta\right],$$

只要 $\Delta[w_1(z), w_2(z)]$ 在某一点 z_0 为零， $\Delta[w_1(z), w_2(z)]$ 恒为零.

系列理论问题. 例如，解析延拓能否实现，这取决于函数的奇点分布. 可以理解，如果在幂级数 $f_1(z)$ 的收敛圆 g_1 的边界上“布满了”奇点，即在收敛圆周上任意一点，其任意小的邻域内都有 $f_1(z)$ 的奇点，那么，在 g_1 内重新作 Taylor 展开，其收敛范围绝不可能超出 g_1. 再例如，解析延拓的结果是否与路径有关，即沿着不同路径延拓 (到同一区域) 的结果是否相同，或者说，通过解析延拓得到的函数是单值的，还是多值的. 有兴趣的读者可以参看有关的专著.

第八章 留数定理及其应用

8.1 留数定理

留数定理 设区域 G 的边界 C 为一分段光滑的简单闭合曲线. 若除有限个孤立奇点 $b_k,\ k=1,2,3,\cdots,n$ 外，函数 $f(z)$ 在 G 内单值解析，在 $\overline{G}$ 中连续，且在 C 上没有 $f(z)$ 的奇点，则

$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(b_k).} \tag{8.1}$$

$\operatorname{res} f(b_k)$ 称为 $f(z)$ 在 b_k 处的留数，它等于 $f(z)$ 在 b_k 的邻域内 Laurent 展开中 $(z-b_k)^{-1}$ 的系数 $a_{-1}^{(k)}$.

证 如图 8.1，围绕每个奇点 b_k 作闭合曲线 γ_k，使 γ_k 均在 G 内，且互不交叠，则根据复连通区域 Cauchy 定理及函数作 Laurent 展开时的系数公式 (5.18)，就有

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\mathrm{d}z &= \sum_{k=1}^{n}\oint_{\gamma_k} f(z)\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} a_{-1}^{(k)}\\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{res} f(b_k). \quad \square\end{aligned}$$

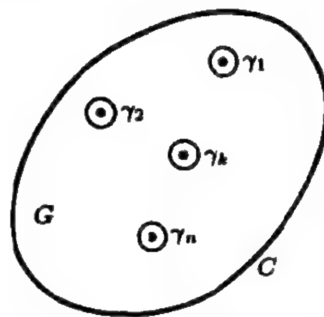


图 8.1 留数定理

留数定理告诉我们，解析函数的围道积分值是与函数在围道内的奇点直接有关的. 为了计算解析函数的围道积分值，只需计算出函数在奇点处的留数即可.

求出 $f(z)$ 在奇点 b 处的留数，从原则上说来，就是要求出 $f(z)$ 在 $z=b$ 的邻域内 Laurent 展开中 $(z-b)^{-1}$ 项的系数. 在极点的情

况下，通过微商的计算就可以比较容易地求出来.

一阶极点的情形 设 b 点是 $f(z)$ 的一阶极点，则在 b 点的邻域内，

$$f(z)=a_{-1}(z-b)^{-1}+a_0+a_1(z-b)+a_2(z-b)^2+\cdots. \tag{8.2}$$

以 $(z-b)$ 乘展开式两端，

$$(z-b)f(z)=a_{-1}+a_0(z-b)+a_1(z-b)^2+a_2(z-b)^3+\cdots.$$

所以

$$\boxed{a_{-1}=\lim_{z\to b}(z-b)f(z).} \tag{8.3}$$

特别常见的情况是 $f(z)$ 可以表示为 $P(z)/Q(z)$ ， $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 b 点及其邻域内解析， b 是 $Q(z)$ 的一阶零点， $Q(b)=0$ ， $Q'(z)\neq 0$ ， $P(b)\neq 0$ ，则

$$\boxed{a_{-1}=\lim_{z\to b}(z-b)f(z)=\lim_{z\to b}(z-b)\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{P(b)}{Q'(b)}.} \tag{8.4}$$

例 8.1 求 $\dfrac{1}{z^2+1}$ 在奇点处的留数.

解 $z=\pm\mathrm{i}$ 是它的一阶极点.

$$\operatorname{res} f(\pm\mathrm{i})=\left.\frac{1}{2z}\right|_{z=\pm\mathrm{i}}=\mp\frac{\mathrm{i}}{2}.$$

例 8.2 求 $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}$ 在奇点处的留数.

解 $z=0$ 是它的一阶极点.

$$\operatorname{res} f(0)=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z^2}.=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{z}=\mathrm{i}(a-b).$$

高阶极点的情形 设 $z=b$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点， $m\geq 2$ ，

$$\begin{aligned}f(z)=&a_{-m}(z-b)^{-m}+a_{-m+1}(z-b)^{-(m-1)}+\cdots\\&+a_{-1}(z-b)^{-1}+a_0+a_1(z-b)+\cdots.\end{aligned} \tag{8.5}$$

两端乘上 $(z-b)^m$ ，

$$(z-b)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-b) + \cdots + a_{-1}(z-b)^{m-1} + a_0(z-b)^m + a_1(z-b)^{m+1} + \cdots.$$

这时 a_{-1} 是 $(z-b)^m f(z)$ 的展开式中 $(z-b)^{m-1}$ 项的系数，故

$$\boxed{a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-b)^m f(z)\bigg|_{z=b}.} \tag{8.6}$$

例 8.3 求 $1/(z^2+1)^3$ 在奇点处的留数.

解 $z=\pm\mathrm{i}$ 是它的三阶极点.

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(\pm\mathrm{i}) &= \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z\mp\mathrm{i})^3\cdot\frac{1}{(z^2+1)^3}\bigg|_{z=\pm\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1}{(z\pm\mathrm{i})^3}\bigg|_{z=\pm\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{2!}(-3)(-4)(z\pm\mathrm{i})^{-5}\bigg|_{z=\pm\mathrm{i}} \\ &= \mp\frac{3}{16}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

练习 8.1 设 $f(z)$ 为偶函数， $z=0$ 点是它的孤立奇点，证明 $f(z)$ 在 $z=0$ 处的留数必为 0 .

练习 8.2 若 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶零点，试求下列函数在该点的留数：

(1) $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$; (2) $\dfrac{f''(z)}{f(z)}$;

(3) $\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$; (4) $\dfrac{(n-1)f'(z)-zf''(z)}{f(z)}$.

练习 8.3 若 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 n 阶极点，试求下列函数在该点的留数：

(1) $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$; (2) $\dfrac{f''(z)}{f(z)}$;

(3) $\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$; (4) $\dfrac{(n+1)f'(z)+zf''(z)}{f(z)}$.

练习 8.4 求下列各种条件下函数 $f(z)/g(z)$ 在奇点 z_0 处的留数：

(1) z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点；是 $g(z)$ 的 $m+1$ 阶零点；

(2) z_0 是 $g(z)$ 的二阶零点，且 $f(z_0)\neq 0$ ；

(3) z_0 是 $f(z)$ 的一阶零点，是 $g(z)$ 的三阶零点；

(4) z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，是 $g(z)$ 的一阶零点.

练习 8.5 总结各种情形下奇点 (z_0) 处留数的求法，并填充下表：

函数	给定条件	奇点类型	留数
$f(z)$	$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$		
$f(z)$	$\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)\neq 0$		
$f(z)$	$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ $=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\cdots$ $=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^{k-1}f(z)=0$ $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z)\neq 0$		
$\dfrac{g(z)}{f(z)}$	z_0 点为 $g(z)$, $f(z)$ 的同阶零点		
$\dfrac{g(z)}{f(z)}$	$g(z_0)\neq 0$, $f(z_0)=0$, $f'(z_0)\neq 0$		
$\dfrac{g(z)}{f(z)}$	z_0 点为 $g(z)$ 的 m 阶零点 $f(z)$ 的 $m+1$ 阶零点		
$\dfrac{g(z)}{f(z)}$	$g(z_0)\neq 0$ $f(z_0)=f'(z_0)=0$ $f''(z_0)\neq 0$		
$\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^2}$	$g(z_0)\neq 0$		
$\dfrac{g(z)}{f(z)}$	z_0 点为 $f(z)$ 的 m 阶零点 且 $g(z_0)\neq 0$		
$\dfrac{g(z)}{f(z)}$	z_0 点为 $g(z)$ 的 m 阶零点 $f(z)$ 的 $m+n$ 阶零点		

应用留数概念，可以方便地讨论有理函数的部分分式. 例如，要求将函数

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

部分分式，

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-3}. \tag{8.7}$$

那么，三个待定常数，A, B 和 C，正好就是函数 $f(z)$ 在一阶极点 $z=1, z=2$ 和 $z=3$ 点处的留数．因此

$$A = \operatorname{res} \left.\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}, \tag{8.8a}$$

$$B = \operatorname{res} \left.\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\right|_{z=2} = -1, \tag{8.8b}$$

$$C = \operatorname{res} \left.\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\right|_{z=3} = \frac{1}{2}. \tag{8.8c}$$

如果函数 $f(z)$ 具有高阶极点，也可以类似地处理．例如，

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)(z-3)} = \frac{A}{(z-1)^2} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-2} + \frac{D}{z-3}. \tag{8.9}$$

容易看出

$$A = \operatorname{res} \left.\frac{1}{(z-1)(z-2)(z-3)}\right|_{z=1} = \frac{1}{2}, \tag{8.10a}$$

$$B = \operatorname{res} \left.\frac{1}{(z-1)^2(z-2)(z-3)}\right|_{z=1} = \frac{3}{4}, \tag{8.10b}$$

$$C = \operatorname{res} \left.\frac{1}{(z-1)^2(z-2)(z-3)}\right|_{z=2} = -1, \tag{8.10c}$$

$$D = \operatorname{res} \left.\frac{1}{(z-1)^2(z-2)(z-3)}\right|_{z=3} = \frac{1}{4}. \tag{8.10d}$$

以上的讨论都是局限于 z 平面上的有限区域的．对于 ∞ 点，我们同样可以定义

$$\boxed{\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C'} f(z)\mathrm{d}z,} \tag{8.11}$$

这里的 C' 是绕 ∞ 点正向 (也就是顺时针方向) 一周的围道，在围道内除 ∞ 点可能是 $f(z)$ 的奇点外别无奇点．需要提醒的是，$\operatorname{res} f(\infty)$ 并不是 $f(z)$ 在 ∞ 邻域内 Laurent 展开中 z^1 项的系数．这是因为，作变换 $t = 1/z$，则

$$\begin{aligned}\operatorname{res} f(\infty) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C''} f(z)\mathrm{d}z = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C'} f\left(\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= -\frac{1}{t^2}f\left(\frac{1}{t}\right)\text{在}t=0\text{点邻域内幂级数展开中}t^{-1}\text{项的系数} \\ &= -f\left(\frac{1}{t}\right)\text{在}t=0\text{点邻域内幂级数展开中}t^{1}\text{项的系数} \\ &= -f(z)\text{在}z=\infty\text{点邻域内幂级数展开中}z^{-1}\text{项的系数}.\end{aligned} \tag{8.12}$$

在这个结果中，和有限远处不同之处在于：

1. 从结果上说，函数 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数，等于 $f(z)$ 在 ∞ 点邻域内幂级数展开中 z^{-1} 项的系数乘以 -1，这里多了一个负号.

2. 从概念上说，由于 z^{-1} 项是属于 $f(z)$ 在 ∞ 点邻域内幂级数展开式的正则部分，因此，即使 ∞ 点不是 $f(z)$ 的奇点，$\operatorname{res} f(\infty)$ 也可以不为 0．反之，即使 ∞ 点是 $f(z)$ 的奇点，甚至是一阶极点，也可以为 0．

练习 8.6 设 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 点邻域内的展开式为

$$f(z)=c_0+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\cdots,$$

试求 $f^2(z)$ 在 $z=\infty$ 处的留数.

练习 8.7 证明：若除了有限个奇点外，$f(z)$ 在全平面解析，则函数 $f(z)$ 在扩充了的全平面上的留数和为 0．

留数定理把围道积分的计算转化为留数的计算，只要能把定积分和一定解析函数的围道积分联系起来，就有可能比较简便地计算出这些定积分。

8.2 有理三角函数的积分

作为应用留数定理计算定积分的第一类例子，研究有理三角函数的积分

$$I=\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{8.13}$$

其中 R 是 $\sin\theta, \cos\theta$ 的有理函数，在积分区间上是连续的．作变换 $z=e^{i\theta}$，则

$$\sin\theta = \frac{z^2-1}{2iz}, \qquad \cos\theta = \frac{z^2+1}{2z}, \qquad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

相应的积分路径则变为 z 平面上的单位圆的圆周 $|z|=1$．于是，

$$\begin{aligned} I &= \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\frac{dz}{iz} \\ &= 2\pi \sum_{|z|<1} \text{res}\left\{\frac{1}{z}R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

有理三角函数 $R(\sin\theta, \cos\theta)$ 在积分区间 $[0, 2\pi]$ 上连续，就保证了有理函数 $R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)$ 在单位圆的圆周上无奇点．

例 8.4 计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}d\theta, |\varepsilon|<1$．

解 仿照上面的方法步骤，我们有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{1+\varepsilon\cos\theta}d\theta = \oint_{|z|=1}\frac{1}{1+\varepsilon\dfrac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz} \\ &= \oint_{|z|=1}\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\frac{dz}{i} = 2\pi\sum_{|z|<1}\text{res}\left\{\frac{2}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}\right\} \\ &= 2\pi\cdot\left.\frac{2}{2\varepsilon z+2}\right|_{z=(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2})/\varepsilon} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

这里在计算留数时，要注意函数 $2/(\varepsilon z^2+2z+\varepsilon)$ 有两个极点，

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}.$$

但由于它们的乘积为 1，所以不难判断，一定只有一个极点，$z=(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2})/\varepsilon$，处于单位圆内．

练习 8.8 如果 $R(\sin\theta, \cos\theta)$ 在 $[0, 2\pi]$ 中有奇点，则通过变换 $z=e^{i\theta}$ 后，$R(\sin\theta, \cos\theta)$ 变为 $f(z)\equiv R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right)$，$f(z)$ 在单位圆的圆周

$|z|=1$ 上有奇点. 设这些奇点 $\beta_k\ (k=1,2,\cdots,m)$ 均为一阶极点，证明：

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\, \cos\theta)\, d\theta = 2\pi \sum_{|z|<1} \operatorname{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} + \sum_{k=1}^{m} \operatorname{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=\beta_k}.$$

8.3 无穷积分

第二类可以用留数定理计算的定积分是无穷积分 ①

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx. \tag{8.15}$$

在复平面上看，这种积分是沿着实轴进行的，并不构成复变函数的围道积分. 我们可以容易地将实函数 $f(x)$ 延拓为复函数 $f(z)$，但为了能构成围道积分并应用留数定理计算, 还必须：(1) 补上适当的积分路径而形成闭合围道，计算 $\oint f(z)dz$；(2) 在补上的路径上的积分，或者与所要求计算的无穷积分直接相关，或者可以简单方便地计算出来. 最自然的做法当然是补上以原点为圆心，R 为半径的上半圆 C_R (见图 8.2)，而后令 $R\to\infty$. 这样，可以预见，我们便需要计算 $\int_{C_R} f(z)dz$ 的极限值. 只要 $f(z)$ 满足适当的条件，这是可以做到的. 为此，不妨进一步假设函数 $f(z)$ 满足下列条件：

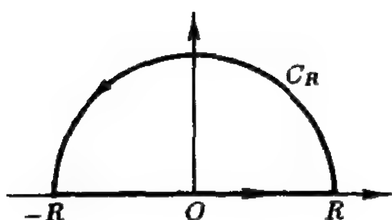


图 8.2

① 无穷积分的定义为

$$I = \lim_{\substack{R_1\to+\infty \\ R_2\to+\infty}} \int_{-R_1}^{R_2} f(x) dx.$$

有时这种极限不存在，但 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$ 存在，称为积分主值，记为

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx.$$

显然，当这两种极限都存在时，它们必定相等.

1. $f(z)$ 在上半平面除了有限个孤立奇点外是处处解析的，在实轴上没有奇点；

2. 在 $0 \leq \arg z \leq \pi$ 范围内，当 $|z| \to \infty$ 时， $zf(z)$ 一致地趋于 0 ，即对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $M(\varepsilon) > 0$ ，使当 $|z| \geq M$ ， $0 \leq \arg z \leq \pi$ 时， $|zf(z)| < \varepsilon$.

这两个条件并不苛刻. 第 1 个条件保证了原来的实变积分不是瑕积分，并且可以应用留数定理计算围道积分

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z).$$

第 2 个条件，首先是作为常用的实变无穷积分的收敛条件

$$\lim_{x\to\pm\infty} xf(x) = 0 \tag{8.16}$$

的自然推广，同时，根据引理 3.1 ，又保证了

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0. \tag{8.17}$$

于是，取极限 $R \to \infty$ ，就得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \operatorname{res} f(z). \tag{8.18}$$

需要指出的是，这里求出的只是积分主值 $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$. 但是，正如前面所指出过的，只要积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 本身存在，二者一定相等.

例 8.5 计算定积分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$.

解 此时显然符合上述要求的条件，故有

$$\begin{aligned} I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3} &= 2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname{res} \left.\frac{1}{(1+z^2)^3}\right|_{z=\mathrm{i}} \\ &=2\pi\mathrm{i} \cdot \left(-\frac{3\mathrm{i}}{16}\right) = \frac{8}{3}\pi. \end{aligned}$$

上面关于留数定理的应用条件还可以放宽. 如果函数 $f(z)$ 在上半平面有无穷多个孤立奇点, $b_n, n=1, 2, \cdots$, 只要存在曲线序列 $\{C_m\}$, 每一个 C_m 都与实轴上从 $-R_m$ 到 R_m 的直线段构成一个围道, 在围道上没有 $f(z)$ 的奇点, 而当 $m\to\infty$ 时, C_m 上的点 z 的模 $|z|$ 和 R_m 都趋于 ∞, 且 $\lim\limits_{m\to\infty}\int_{C_m} f(z)\mathrm{d}z=0$, 则可以证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{res}\, f(b_n). \tag{8.19}$$

在实轴上有奇点的情形以后讨论.

最后, 我们还应该对于应用留数定理计算定积分的基本思想有一个比较深入的理解. 这里不妨再重复一下前面的叙述:

> 为了能够应用留数定理计算无穷积分, 我们必须:
>
> 1. 补上适当的积分路径而形成闭合围道, 计算 $\oint f(z)\mathrm{d}z$;
>
> 2. 在补上的路径上的积分, 或者与所要求计算的无穷积分直接相关, 或者可以简单方便地计算出来.

因此, 如果是 $f(x)$ 偶函数, 则对于积分 $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 由于

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

所以仍然可以采用图 8.2 的围道, 并重复上面的讨论, 而得到

$$\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\, f(z). \tag{8.20}$$

基于同样的考虑, 可以想到, 如果在积分 $\int_0^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 中, 被积函数 $f(z)$ 具有某种对称性质, 例如

$$f(z) = f(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}), \tag{8.21}$$

那么, 也可以采用图 8.3 中的围道来计算.

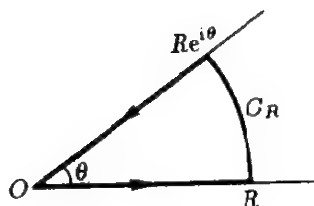


图 8.3

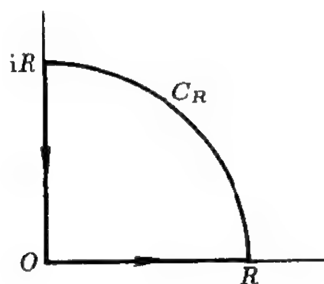


图 8.4

例 8.6 计算定积分 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解 由于这里的被积函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^4}$ 是 x^4 的函数，所以，我们可以采用图8.4的围道：沿正实轴由 0 到 R，沿圆弧到达正虚轴，再沿正虚轴由 iR 回到原点．这样，根据留数定理，有

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} &= \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}+\int_R^0 \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{d}y}{1+(\mathrm{i}y)^4}\\ &=(1-\mathrm{i})\int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}\\ &=2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}\ \frac{1}{1+z^4}\bigg|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}}\\ &=\frac{\pi}{2}\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

取极限 $R\to\infty$，因为

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{1}{1+z^4}=0,$$

所以，根据引理 3.1，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}=0.$$

于是，就得到

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi.$$

在这个例子中，当然仍然可以采用半圆形的围道．这时被积函数 $1/(1+z^4)$ 在围道内有两个奇点：$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 和 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}3\pi/4}$．计算

量当然要略微大一些. 可以设想, 如果要计算定积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^{100}}.$$

采用夹角为 $\pi/50$ 的扇形围道, 围道内只有一个奇点; 而采用半圆形围道, 围道内则有 50 个奇点. 两者在计算量上的差异明显可见.

如果说, 在上面这些例子中, 扇形围道和半圆形围道两者还都可供选择的话, 那么, 在下面这个例子中, 扇形围道就只能是唯一的选择.

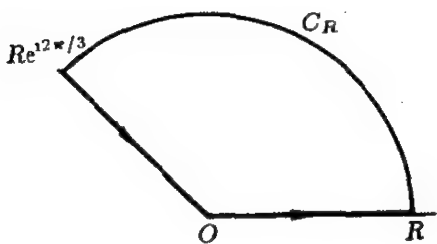


图 8.5

例 8.7 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$.

解 显然, 这时应该考虑夹角为 $2\pi/3$ 的扇形围道 (图 8.5).

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{1+z^3} &= \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} + \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^3} + \int_R^0 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}\mathrm{d}x}{1+x^3} \\
&= \left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}\right) \int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} + \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^3} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\ \operatorname{res} \left.\frac{1}{1+z^3}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}} = \frac{2\pi}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}.
\end{aligned}$$

取极限 $R\to\infty$, 因为

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{1}{1+z^3} = 0,$$

所以

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^3} = 0.$$

最后就得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/6}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}} = \frac{\pi}{3\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

练习 8.9 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1-x+x^2}$.

8.4 含三角函数的无穷积分

第三类可以应用留数定理计算的定积分是

$$I=\int_0^\infty f(x)\cos px\mathrm{d}x \quad 或 \quad I=\int_0^\infty f(x)\sin px\mathrm{d}x. \tag{8.22}$$

这里不妨假设 $p>0$.

处理这种类型的积分，仍可以采用半圆形的围道 (图 8.2)．但是被积函数不能简单地取为 $f(z)\cos pz$ 或 $f(z)\sin pz$．这是因为，当 $0\le\arg z\le\pi,\ |z|=R\to\infty$ 时，函数 $\cos pz$ 和 $\sin pz$ 的行为复杂①，不便于直接计算

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\cos pz\mathrm{d}z \quad 或 \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\sin pz\mathrm{d}z.$$

正确的做法是将被积函数取为 $f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}$．如果函数 $f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}$ 在上半平面内只有有限个奇点，则

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z &= \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\\ &= \int_{-R}^{R} f(x)\left[\cos px+\mathrm{i}\sin px\right]\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\mathrm{i}\sum_{上半平面}\mathrm{res}\left\{f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\}.\end{aligned} \tag{8.23}$$

这样，只要能够计算出

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z,$$

那么，分别比较实部和虚部，当然就可以求得 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,\mathrm{d}x$ 和

---

① 读者当然记得，$z=\infty$ 是函数 $\sin z$ 或 $\cos z$ 的本性奇点．这意味着当 z 以不同方式趋于 ∞ 时，$\sin z$ 或 $\cos z$ 可以逼近于不同的数值．这当然会给

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\cos pz\mathrm{d}z \quad 或 \quad \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\sin pz\mathrm{d}z$$

的计算带来一定的困难．但是，绝对不要误认为这两个极限不存在．

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\mathrm{d}x$．为此，介绍一个引理.

引理 8.1(Jordan 引理) 设在 $0 \le \arg z \le \pi$ 的范围内，当 $|z| \to \infty$ 时，$Q(z)$ 一致地趋近于 0，则

$$\boxed{\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0,} \tag{8.24}$$

其中 $p>0$，C_R 是以原点为圆心，R 为半径的上半圆 ①.

证 当 z 在 C_R 上时，$z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^{\pi} Q\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pR(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{d}\theta\right| \\ &\le \int_0^{\pi}\left|Q\left(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}R\mathrm{d}\theta \\ &< \varepsilon R\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= 2\varepsilon R\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-pR\sin\theta}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

证明的关键在于精确估计 $\sin\theta$ 值. 由图 8.6 可见，当 $0\le\theta\le\pi/2$ 时，有 $\sin\theta \ge 2\theta/\pi$，所以

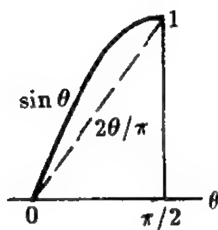


图 8.6

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z\right| &< 2\varepsilon R\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-pR\cdot2\theta/\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= 2\varepsilon R\frac{\pi}{2pR}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right) \\ &= \frac{\varepsilon\pi}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pR}\right).\end{aligned}$$

这样，就证明了

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} Q(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\mathrm{d}z = 0. \quad \square$$

于是，在满足 Jordan 引理的条件下，

① 从证明过程可以看出，引理中 $p>0$ 的限制可以放宽为 $\mathrm{Re}\,p>0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \mathrm{res}\left\{f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\}. \tag{8.25}$$

分别取实部和虚部，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos px\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \mathrm{res}\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right]\right\} \tag{8.26a}$$

$$= -2\pi\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{\text{上半平面}} \mathrm{res}\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right]\right\}, \tag{8.26b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin px\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \mathrm{res}\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right]\right\} \tag{8.26c}$$

$$= 2\pi\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{\text{上半平面}} \mathrm{res}\left[f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right]\right\}. \tag{8.26d}$$

例 8.8 计算积分 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$，$a>0$.

解 根据上面的讨论，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}a} = \pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-a}.$$

所以

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{e}^{-a}, \qquad \int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-a}. \tag{8.27}$$

与此同时，还得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = 0. \tag{8.28}$$

这是显然的，因为被积函数是奇函数.

如果 $f(x)$ 是复函数， $f(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$ ，那么，重复上面的计算，还可以得到

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[u(x)+\mathrm{i}v(x)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{上半平面}} \mathrm{res}\left\{\left[u(z)+\mathrm{i}v(z)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\}.$$

于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(x)\cos px - v(x)\sin px\right]\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{Re}\left\{2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\left[u(z)+\mathrm{i}v(z)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\} \tag{8.29a}$$

$$= -2\pi\,\mathrm{Im}\left\{\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\left[u(z)+\mathrm{i}v(z)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\}, \tag{8.29b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[u(x)\sin px + v(x)\cos px\right]\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\left[u(z)+\mathrm{i}v(z)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\} \tag{8.29c}$$

$$= 2\pi\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{res}\left[u(z)+\mathrm{i}v(z)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}pz}\right\}. \tag{8.29d}$$

8.5 实轴上有奇点的情形

如果实变积分是一个瑕积分[①]，例如，瑕点是 c，这样，在处理相应的复变积分 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$ 时，实轴上的 c 点也是被积函数的

---

① 瑕积分的定义是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta_1\to 0}\int_a^{c-\delta_1} f(x)\mathrm{d}x + \lim_{\delta_2\to 0}\int_{c+\delta_2}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

如果这两个极限单独都不存在，但是 $\lim\limits_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right]$ 存在，则称为瑕积分的主值存在，记为

$$\mathrm{v.p.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0}\left[\int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\right].$$

当然，如果瑕积分及其主值都存在，那么它们一定相等.

奇点，必须绕开奇点而构成闭合的积分围道. 下面我们通过两个例子来具体说明处理这类积分的基本精神.

例 8.9 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}$.

解 这是一个反常积分，反常性既表现在积分区间为无穷区间，又表现为被积函数在 $x=0$ 点不连续 ($x=0$ 点为瑕点) . 此积分在主值意义下存在，

$$
\begin{aligned}
&\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}\\
&\quad=\lim_{R_1\to\infty}\int_{-R_1}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\lim_{R_2\to\infty}\int_{1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}\\
&\qquad+\lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-1}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{\delta}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}\right].
\end{aligned}
$$

因此，在应用留数定理计算此积分时，应该考虑复变积分

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)},$$

其中的积分围道 C 如图 8.7 所示，由以原点为圆心、δ 为半径的小半圆弧 C_δ 和以原点为圆心、R 为半径的大半圆弧 C_R 以及直线段 $-R\to-\delta$ 和 $\delta\to R$ 构成. 于是，根据留数定理，有

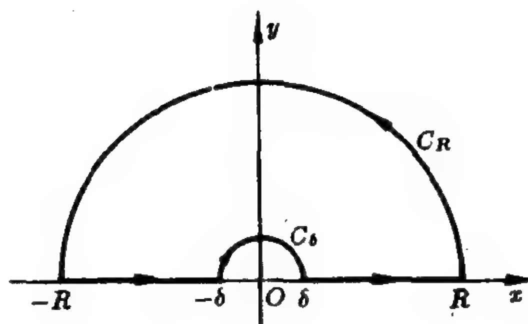


图 8.7

$$
\begin{aligned}
\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}&=\int_{-R}^{-\delta}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}\\
&\quad+\int_{\delta}^{R}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)}+\int_{C_R}\frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)}
\end{aligned}
$$

$$= 2\pi\mathrm{i} \cdot \operatorname{res} \left.\frac{1}{z(1+z+z^2)}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}}$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \mathrm{i}\pi.$$

因为

$$\lim_{z\to\infty} z \cdot \frac{1}{z(1+z+z^2)} = 0,$$

所以，根据引理 3.1，有

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)} = 0.$$

又因为在 $z=0$ 点的邻域内，

$$\frac{1}{z(1+z+z^2)} = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots,$$

所以

$$\int_{C_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)} = \int_{C_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{C_\delta} [a_0 + a_1 z + \cdots] \mathrm{d}z.$$

在极限情形 $\delta \to 0$ 下，有

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{C_\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z(1+z+z^2)} = -\pi\mathrm{i}.$$

这样，取极限 $R \to \infty$， $\delta \to 0$，就得到

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x+x^2)} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}. \tag{8.30}$$

思考题 如果积分围道中的小半圆弧是从下半平面绕过 $z=0$ 点，因而把 $z=0$ 点包围在围道内，是否会得到不同的结果？为什么？

从上面的计算中可以看出，对于积分路径上有奇点的情形，我们总要计算围绕奇点的小圆弧上的积分值(准确地说，要计算它的极限值)．这时我们可以利用下面更普遍的结果．

引理 8.2 如果函数 $f(z)$ 在 $z=a$ 点的邻域内连续，并且当 $\theta_1 \le \arg(z-a) \le \theta_2$, $|z-a| \to 0$ 时，$(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k，则

$$\boxed{\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1),} \qquad (8.31)$$

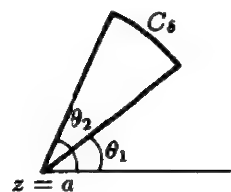


图 8.8

其中 C_δ 是以 $z=a$ 为圆心，δ 为半径，夹角为 $\theta_2-\theta_1$ 的圆弧，$|z-a|=\delta,\ \theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$，见图 8.8．

证 此引理的证明和引理 3.1 的证明相仿．因为

$$\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{d}z}{z-a} = \mathrm{i}(\theta_2-\theta_1),$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)\right| &= \left|\int_{C_\delta}\left[f(z)-\frac{k}{z-a}\right]\mathrm{d}z\right| \\ &\le \int_{C_\delta}|(z-a)f(z)-k|\frac{|\mathrm{d}z|}{|z-a|}.\end{aligned}$$

由于当 $\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2$， $z-a\to 0$ 时， $(z-a)f(z)$ 一致地趋近于 k，这意味着任给 $\varepsilon>0$，存在 (与 $\arg(z-a)$ 无关的) $r(\varepsilon)>0$，使当 $|(z-a)|=\delta<r$ 时， $|(z-a)f(z)-k|<\varepsilon$． 所以

$$\left|\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z - \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1)\right| \le \varepsilon(\theta_2-\theta_1),$$

即

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1). \quad \square$$

在有些情况 (例如，含三角函数的无穷积分) 下，本来实变积分并不是瑕积分，但由于在相应的复变积分中，并不是简单地将被积函数 $f(x)$ 换成 $f(z)$，因而在复变函数的围道积分中，积分路径上却可以出现奇点．这从下面的例子中可以看出．

例 8.10 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$．

解 很自然地，应当考虑积分 $\displaystyle\oint_C\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z$，积分围道 C 和例 8.9

相同 (图 8.7) .

$$\oint_{C}\frac{e^{iz}}{z}dz=\int_{-R}^{-\delta}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_\delta}\frac{e^{iz}}{z}dz+\int_{\delta}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz.$$

在积分围道包围的区域内，被积函数解析，故围道积分为 0 . 根据 Jordan 引理和引理 8.2 ，分别有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}dz=0,\qquad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{e^{iz}}{z}dz=-\pi i.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx=\pi i.$$

比较两端的实部和虚部，即得

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x}dx=0,\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi. \tag{8.32}$$

关于这种类型的积分，还可以举出

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\pi; \tag{8.33}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx=\frac{3}{4}\pi; \tag{8.34}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}dx=\frac{2}{3}\pi; \tag{8.35}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^5 x}{x^5}dx=\frac{115}{192}\pi; \tag{8.36}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^6 x}{x^6}dx=\frac{11}{20}\pi; \tag{8.37}$$

或者，更普遍的结果 ① ：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^n x}{x^n}dx=\frac{\pi}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-)^k\binom{n}{k}\left(\frac{n-2k}{2}\right)^{n-1}. \tag{8.38}$$

计算这些积分，关键在于正确地选择复变积分的被积函数. 例如,

① 见 T. M. Apostol, Math. Mag. 53(1980), 183.

为了计算 (8.33) 式中的积分，就应该考虑复变积分

$$\oint_C \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2z}}{z^2}\mathrm{d}z,$$

积分围道 C 仍如图 8.7．这里，就复变积分而言，在实轴上可以有奇点．但这种奇点，一般说来，只能是可去奇点或一阶极点．这从引理 8.2 就可以看出．如果是二阶或二阶以上的极点，或是本性奇点，沿小圆弧 C_δ 的积分就可能趋于 ∞．

8.6 多值函数的积分

以上几节中讨论的都是单值函数的积分．现在再来讨论多值函数的积分[①]．一种常见的多值函数积分是

$$I=\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x, \tag{8.39}$$

其中 s 为实数，$Q(x)$ 单值，在正实轴上没有奇点．为了保证积分收敛，要求

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to\infty} x^sQ(x)=0.$$

我们考虑相应的复变积分

$$\begin{aligned}\oint_C z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z \;=&\int_\delta^R x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z\\ &+\int_R^\delta \left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\right)^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x+\int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

由于 $z=0$ 及 $z=\infty$ 是被积函数的枝点，所以需要将平面沿正实轴割开，并规定沿割线上岸 $\arg z=0$．这时的积分路径由割开的大小圆弧 (半径分别为 R 和 δ) 及割线上下岸组成 (见图 8.9)．沿割线上下岸的积分显然直接与所要计算的实变积分有关．问题是如何计算沿大小圆弧的积分值．

---

① 准确地说，这里所说的多值函数的积分是从复变函数的角度说的．从复数域来看，实变定积分中的积分变量 x 在 $x>0$ 时应该理解为 $\arg x=0$．

由引理 3.1 和引理 8.2 可以看出，如果在 $0 \le \arg z \le 2\pi$ 的范围内，

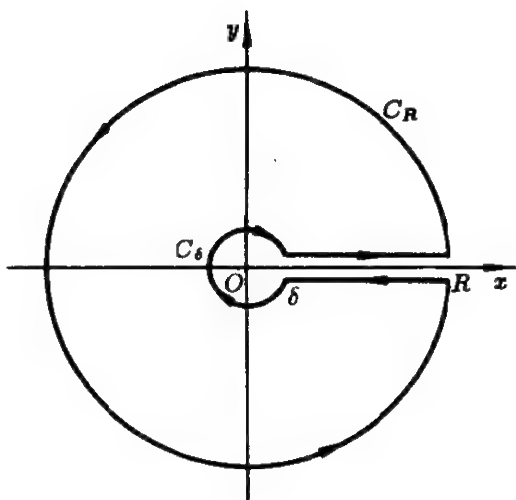


图 8.9

$$\lim_{z\to 0} z^s Q(z) = 0,$$

$$\lim_{z\to\infty} z^s Q(z) = 0,$$

则

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = 0,$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} z^{s-1}Q(z)\mathrm{d}z = 0.$$

更进一步，如果 $Q(z)$ 在全平面上除了有限个孤立奇点值解 (不在正实轴上) 外，是单析的，因而可以应用留数定理. 在取极限 $\delta \to 0$, $R\to\infty$ 后，就得到

$$\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s}\right)\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{z^{s-1}Q(z)\right\}.$$

所以

$$\int_0^\infty x^{s-1}Q(x)\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s}}\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{z^{s-1}Q(z)\right\}. \tag{8.40}$$

需要注意，在计算留数时，要遵守上面对于多值函数 z^s 所作的限制，即 $0\le\arg z\le 2\pi$.

思考题 如果规定在割线上岸 $\arg z = 2\pi$ ，是否影响最后结果？

思考题 如果 $Q(x)$ 具有一定的对称性质，例如是 x 的奇函数或偶函数，是否可以取其他形式的围道？

例 8.11 计算积分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}x$ ， $0<\alpha<1, -\pi<\varphi<\pi$.

解 这里的被积函数显然满足上述讨论中的要求，因此

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi\alpha}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\pi)(\alpha-1)} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\alpha-1)}. \tag{8.41}$$

从这个积分还可以推出一些更进一步的结果. 例如, 作为这个积分的特殊情形, $\varphi = 0$, 则

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}. \tag{8.42}$$

在 Γ 函数一章中要直接应用到这个结果. 又如, 比较 (8.41) 式两端的虚部, 还可以得到 ①

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{x^2+2x\cos\varphi+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\frac{\sin(1-\alpha)\varphi}{\sin\varphi}. \tag{8.43}$$

这个结果是在 $0 < \alpha < 1$ 的条件下得到的, 但是可以解析延拓到 $0 < \alpha < 2$. 比较 (8.41) 式两端的实部, 也可以得到同样的结果.

例 8.12 计算积分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\mathrm{d}x$, 其中 $0 < \alpha < 1$.

解 这个积分当然可以模仿上面讲过的一般步骤处理, 只是要注意这时在正实轴上有一个奇点, $z = 1$, 因此必须将图 8.9 中的积分围道修改为从 $z = 1$ 点的上方和下方绕过 (如图 8.10). 请读者自己完成这个计算.

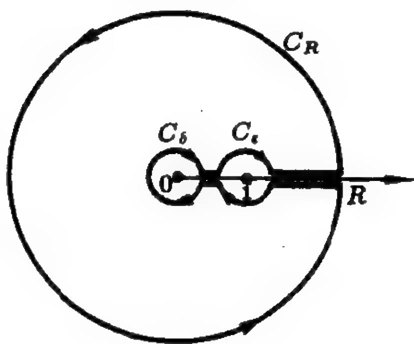


图 8.10

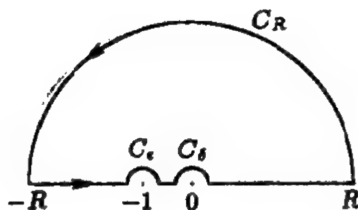


图 8.11

下面, 我们也可以直接利用例 8.11 中的结果 (8.42) 而计算出这个积分. 为此, 作围道如图 8.11. 于是有

---

① 1785 年, Euler 实际上已经得到了这个结果, 或者说, 这个结果的特殊情形, 即 α 为有理数 m/n 的情形.

$$\oint_C \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}\mathrm{d}z = \int_\delta^R \frac{x^{\alpha-1}}{x+1}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}\mathrm{d}z$$
$$+ \int_R^{1+\epsilon} \frac{\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^{\alpha-1}}{1-x}(-\mathrm{d}x) + \int_{C_\epsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}\mathrm{d}z$$
$$+ \int_{1-\epsilon}^{\delta} \frac{\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^{\alpha-1}}{1-x}(-\mathrm{d}x) + \int_{C_\delta} \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}\mathrm{d}z = 0.$$

容易证明

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}\mathrm{d}z = 0, \qquad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}\mathrm{d}z = 0,$$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{C_\epsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{z+1}\mathrm{d}z = -\mathrm{i}\pi\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(\alpha-1)},$$

所以

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\mathrm{d}x - \mathrm{i}\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\alpha} - \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\mathrm{d}x = 0.$$

这样最后就得到

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\mathrm{d} = \pi\mathrm{i} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\mathrm{d}x$$
$$= \pi\mathrm{i} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi\alpha}\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} = \pi\cot\pi\alpha. \tag{8.44}$$

另一种多值函数的积分涉及对数函数. 先讨论下面的例子.

例 8.13 计算积分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$.

解 取围道如图 8.9，计算复变积分

$$\oint_C \frac{\ln z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z = \int_\delta^R \frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + \int_{C_R} \frac{\ln z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$$
$$+ \int_R^\delta \frac{\ln\left(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}\right)}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + \int_{C_\delta} \frac{\ln z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{全平面}} \mathrm{res}\left\{\frac{\ln z}{1+z+z^2}\right\}$$
$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right) = -\frac{4\pi^2\mathrm{i}}{3\sqrt{3}}.$$

因为

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{\ln z}{1+z+z^2}=0,\qquad \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{\ln z}{1+z+z^2}=0,$$

根据引理 3.1 和引理 8.2 ，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\ln z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z=0,\qquad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{\ln z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z=0.$$

所以，取极限 $R\to\infty, \delta\to 0$ ，即得

$$\int_0^\infty\frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x-\int_0^\infty\frac{\ln x+2\pi\mathrm{i}}{1+x+x^2}\mathrm{d}x=-\frac{4\pi^2\mathrm{i}}{3\sqrt{3}}.$$

尽管现在沿割线上下岸的积分都与所要计算的积分有关，但是，非常不巧，它们却相互抵消掉了，而只剩下一个并非我们所要计算的定积分

$$\int_0^\infty\frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}. \tag{8.45}$$

这样，试图通过围道积分 $\oint_C\frac{\ln z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$ 计算 $\int_0^\infty\frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x$ 的努力就失败了！失败的原因是，和根式函数不同，对数函数 $\ln z$ 的多值性表现在虚部上，因此沿割线上下岸积分时，其实部 (即 $\ln x$) 抵消掉了. 但是，应该说，这种“失败”，标志着我们对于应用留数定理计算定积分的认识的深化. 上面的计算， 除了具体的计算结果外，至少还有两方面的收获. 第一，对于定积分 $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$ ，如果 $f(x)$ 不是偶函数 (因此可能无法用 8.3 节中的方法计算)，可以通过应用留数定理计算围道积分 $\oint_C f(z)\ln z\,\mathrm{d}z$ 来求得. 第二，如果要计算积分 $\int_0^\infty f(x)\ln x\mathrm{d}x$ ，则可以考虑复变积分 $\oint_C f(z)\ln^2 z\,\mathrm{d}z$. 因为这时割线上下岸 $\ln^2 z$ 的函数值 $\ln^2 x$ 和 $(\ln x+2\pi\mathrm{i})^2$ 相互抵消，剩下的正好有我们所需要的 $\ln x$ 项.

现在就来完成例 8.13 中所要求的积分计算. 为此，考虑积分

$\oint_C \frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\mathrm{d}z$，围道 C 不变．重复上面的计算步骤，就得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\ln^2 x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{(\ln x + 2\pi\mathrm{i})^2}{1+x+x^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\mathrm{i} \sum_{\text{全平面}} \mathrm{res}\left\{\frac{\ln^2 z}{1+z+z^2}\right\} \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{16}{9}\pi^2 - \frac{4}{9}\pi^2\right] = \frac{8}{3\sqrt{3}}\pi^3.
\end{aligned}$$

于是

$$-4\pi\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x + 4\pi^2\int_0^\infty \frac{1}{1+x+x^2}\mathrm{d}x = \frac{8}{3\sqrt{3}}\pi^3.$$

所以，就可以得到我们所要求的积分

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x+x^2}\mathrm{d}x = 0. \tag{8.46}$$

除此之外，也还可以再次得到 (8.45) 式的结果．

思考题 如果 $f(x)$ 具有一定的对称性质，例如是 x 的奇函数或偶函数，是否可以取其他形式的围道？

以上讨论了留数定理的一种最基本的应用 —— 计算定积分．由于篇幅的限制，这里只介绍了最常见的几种类型的定积分．除了这几种类型之外，还有其他一些类型的定积分，包括像 4.5 节中的含参量的无穷积分 (4.29)，也可以用留数定理计算．读者可以参阅有关书籍，例如参考书目 [1, 2, 8]．

当然，留数定理也不是万能的，有些类型的定积分 (例如，见后面第十章 (10.30) 式的积分)，就难以利用留数定理来计算．在本书的第十章和第十一章中，也还介绍了计算定积分的其他方法．

*8.7 应用留数定理计算无穷级数的和

本节将讨论留数定理的另一个应用，即计算某些无穷级数的

和. 设有无穷级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$，其中 $f(z)$ 是已知函数，除了有限个非整数的极点外，它在全平面解析. 如果存在另一个函数 $G(z)$，$z=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是它的一阶极点，且在这些极点处的留数均为 1，除了这些极点外，$G(z)$ 也在全平面解析. 这样，作一个闭合围道 C_N，将 $n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm N$ 包围在内，于是，根据留数定理，有

$$\oint_{C_N} G(z)f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left\{\sum_{n=-N}^{N} f(n) + \sum_{f(z)\text{的极点}} \mathrm{res}\left[G(z)f(z)\right]\right\}.$$

如果当 $N\to\infty$ 时，能求出 $\oint_{C_N} G(z)f(z)\mathrm{d}z$ 的极限值 (例如，在一定条件下为零)，则我们可以算出 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$.

这里有两个问题需要解决. 一是要找到这样的函数 $G(z)$，二是如何求出 $\oint_{C_N} G(z)f(z)\mathrm{d}z$ 的极限值. 对于前一个问题，回答是 $G(z)$ 可取为 $\pi\cot\pi z$. 对于后一个问题，我们用下面的引理解决.

引理 8.3 设 $f(z)$ 除了有限个孤立奇点外处处解析，若存在常数 $R>0$ 和 $M>0$，使当 $|z|>R$ 时，$|zf(z)|\le M$. 则

$$\oint_{C_N} \pi\cot\pi z\, f(z)\,\mathrm{d}z \to 0, \qquad \text{当} N\to\infty, \tag{8.47}$$

其中 C_N 为正方形围道 (如图 8.12 所示)，顶点为

$$(N+1/2)(1\pm\mathrm{i})$$

和

$$-(N+1/2)(1\pm\mathrm{i}).$$

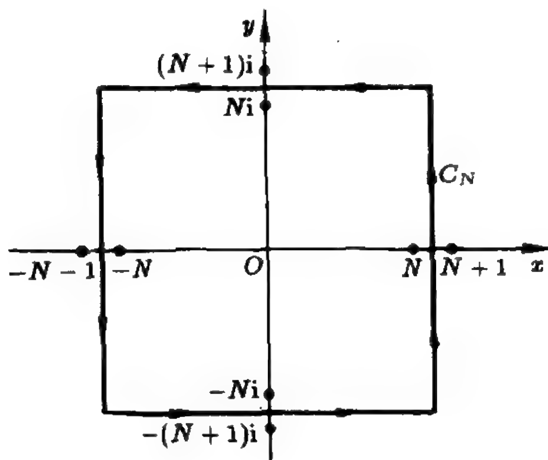


图 8.12

证 首先，在上面取定的围道 C_N 下，考虑积分

$$\oint_{C_N} \frac{\pi\cot\pi z}{z}\mathrm{d}z.$$

由留数定理，有

$$\oint_{C_N} \frac{\pi\cot\pi z}{z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{res}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{z}\right\}_{z=0} + 2\pi\mathrm{i}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{res}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{z}\right\}_{z=\pm n}.$$

但 $\pi\cot\pi z/z$ 为偶函数，在 $z=0$点的留数必为零；而在 $z=n$ 处，

$$\mathrm{res}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{z}\right\}_{z=n} = \left.\frac{\pi\cos\pi z}{z(\sin\pi z)'}\right|_{z=n} = \frac{1}{n},$$

$\pi\cot\pi z/z$ 在 $z=\pm n$ 处的留数互相抵消．所以，就有

$$\oint_{C_N} \frac{\pi\cot\pi z}{z}\mathrm{d}z = 0, \tag{8.48}$$

于是，等式

$$\oint_{C_N} \pi\cot\pi z\, f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_N} \pi\cot\pi z\left[f(z)-\frac{k}{z}\right]\mathrm{d}z$$

一定成立，k 为任意常数．但因为 $|zf(z)|$ 有界，$f(z)$ 在 $|z|>R$ 之外不可能有奇点，即全部奇点均在 $|z|\le R$ 内，而且 $zf(z)$ 在 ∞ 点解析，所以

$$zf(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots, \qquad |z|>R,$$

或

$$f(z) - \frac{a_0}{z} = \frac{a_1 + a_2 z + \cdots}{z^2}, \qquad |z|>R.$$

而 $a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots$ 在 $|z|<1/R$ 内代表一个解析函数，故在闭区域 $|z|\le 1/R'$ 中 $(R'>R)$，$|a_1+a_2z+a_3z^2+\cdots|\le M'$，即

$$\left|f(z)-\frac{a_0}{z}\right| \le \frac{M'}{|z|^2}, \quad |z|\ge R'.$$

当 N 足够大，可使 C_N 上的所有点均满足 $|z|\ge R'$，则

$$\left|\oint_{C_N} \pi\cot\pi z\left[f(z)-\frac{a_0}{z}\right]\mathrm{d}z\right| \le \frac{\pi M'\left(N+\dfrac{1}{2}\right)}{\left(N+\dfrac{1}{2}\right)^2}\times(\cot\pi z\text{在}C_N\text{上的上界}).$$

但当 z 处于 C_N 的两条垂边上，$x=\pm(N+1/2)$，$|\cot\pi z|\le 1$；当 z 处于 C_N 的上下两条边上，$y=\pm(N+1/2)$，$|\cot\pi z|$ 在 $x=0$ 点取极大，故

$$\cot\pi z\text{在}C_N\text{上的上界}=\frac{\mathrm{e}^{2\pi(N+1/2)}+1}{\mathrm{e}^{2\pi(N+1/2)}-1}\le 2.$$

因此，当 $N\to\infty$ 时，

$$\lim_{N\to\infty}\oint_{C_N}\pi\cot\pi z\left[f(z)-\frac{a_0}{z}\right]\mathrm{d}z=0,$$

即

$$\lim_{N\to\infty}\oint_{C_N}\pi\cot\pi z\,f(z)\,\mathrm{d}z=0.\quad\square$$

根据这个引理，我们立即可以得到下面的结果：

定理 若函数 $f(z)$ 除了有限个非整数的极点外，在全平面解析，且存在常数 $R>0$ 和 $M>0$，使当 $|z|>R$ 时，$|zf(z)|\le M$，则

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}f(n)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)\\&=-\sum_{f(z)\text{的极点}}\operatorname{res}\left\{\pi\cot\pi z\,f(z)\right\}.\end{aligned}\tag{8.49}$$

证 取图 8.12 中的方形围道 C_N，考虑积分

$$\oint_{C_N}\pi\cot\pi z\,f(z)\,\mathrm{d}z.$$

只要 N 足够大，则 C_N 一定包围了 $f(z)$ 的全部极点于其内．这样，在 C_N 中，除了有 $f(z)$ 的全部极点外，还有 $\pi\cot\pi z$ 的奇点 (一阶极点) $z=n,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm N$．在后面这些奇点处，留数为

$$\left.\frac{\pi\cos\pi z}{(\sin\pi z)'}\cdot f(z)\right|_{z=n}=f(n).$$

于是，根据留数定理，有

$$\oint_{C_N} \pi\cot\pi z\, f(z)\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left\{\sum_{n=-N}^{N} f(n) + \sum_{f(z)\text{的极点}} \mathrm{res}\left[\pi\cot\pi z\, f(z)\right]\right\}.$$

两边取极限，即得所求． □

例 8.14 求无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 之和．

解 按照上面的讨论，可取 $f(z)=1/z^2$．但是，$f(z)$ 的极点为整数，所以不能直接引用定理的结果，而应该仿照前面的做法，从留数定理出发，得到

$$\oint_{C_N} \frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{n=-N}^{N}\mathrm{res}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\right\}_{z=n}.$$

在 $z=0$ 点，

$$\mathrm{res}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\right\}_{z=0}$$

$$= \frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\text{在}z=0\text{点邻域内展开式中}z^{-1}\text{的系数}$$

$$= \pi\cot\pi z\text{在}z=0\text{点邻域内展开式中}z\text{的系数}$$

$$= -\frac{\pi^2}{3}.$$

这里用到了 5.4 节中 (5.22) 式的结果．在 $z=n\neq 0$ 点，

$$\mathrm{res}\left\{\frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\right\}_{z=n} = \frac{1}{n^2}.$$

所以

$$\oint_{C_N} \frac{\pi\cot\pi z}{z^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left\{-\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\right\}.$$

令 $N\to\infty$，左边为零，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{8.50}$$

练习 8.10 求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 之和.

练习 8.11 求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}, k\geq 1$ 之和.

练习 8.12 求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 之和.

提示：考虑积分 $\oint_{C_N}\frac{\pi}{z^2\sin\pi z}\mathrm{d}z$.

*8.8 留数定理的其他应用

有时我们反过来由围道积分来计算函数的留数.

例 8.15 求函数 $\tan^{2n-1}\pi z$ 在 $z=1/2$ 点的留数，其中 n 为正整数[①].

解 $z=1/2$ 是函数 $f(z)=\tan^{2n-1}\pi z$ 的 $2n-1$ 阶极点. 不难发现，采用 (8.6) 式计算留数 $\mathrm{res}\,f(1/2)$ 是相当困难的. 如果直接由

$$\begin{aligned}\tan^{2n-1}z &= -\cot^{2n-1}\left(z-\frac{1}{2}\right)\\ &= -\left[\frac{1}{z-1/2}-\frac{1}{3}\left(z-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{45}\left(z-\frac{1}{2}\right)^3\right.\\ &\qquad\left.-\frac{2}{945}\left(z-\frac{1}{2}\right)^5-\cdots\right]^{2n-1}\end{aligned}$$

求出 $(z-1/2)^{-1}$ 的系数，对于较小的 n 值是可行的. 但难以得到任意 n 值下的普遍结果. 所以，为了求得 $\tan^{2n-1}\pi z$ 在 $z=1/2$ 点的留数，比较简便的办法，反而是直接计算围道积分.

考虑到 $\tan^{2n-1}\pi z$ 的奇点为 $z=\pm(k+1/2)$ ， $n=0,1,2,\cdots$. 故取积分围道 C 如图 8.13，其顶点为 $z=-\mathrm{i}R$ ， $z=1-\mathrm{i}R$ ， $z=1+\mathrm{i}R$ 和 $z=\mathrm{i}R$ 点. 于是，

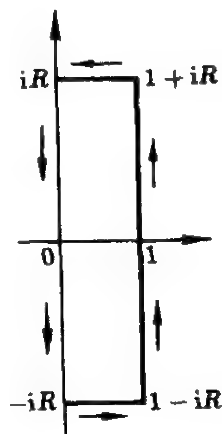


图 8.13

① 引自梯其玛希，《函数论》(吴锦译，科学出版社， 1964 年)，第 118 页.

$$\begin{aligned}\operatorname{res}\ \left\{\tan^{2n-1}\pi z\right\}\Big|_{z=1/2} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z\\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left\{\int_{-\mathrm{i}R}^{1-\mathrm{i}R}\tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z+\int_{1-\mathrm{i}R}^{1+\mathrm{i}R}\tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z\right.\\ &\qquad\left.+\int_{1+\mathrm{i}R}^{\mathrm{i}R}\tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z+\int_{\mathrm{i}R}^{-\mathrm{i}R}\tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z\right\}.\end{aligned}$$

因为 $\tan\pi z$ 的周期为 1，故

$$\int_{1-\mathrm{i}R}^{1+\mathrm{i}R}\tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z=\int_{-\mathrm{i}R}^{\mathrm{i}R}\tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z.$$

所以

$$\begin{aligned}&\operatorname{res}\left\{\tan^{2n-1}\pi z\right\}\Big|_{z=1/2}\\ &\quad=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\left\{\int_{-\mathrm{i}R}^{1-\mathrm{i}R}\tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z+\int_{1+\mathrm{i}R}^{\mathrm{i}R}\tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z\right\}.\end{aligned}$$

因为

$$\tan\pi z=\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(x+\mathrm{i}y)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(x+\mathrm{i}y)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi(x+\mathrm{i}y)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi(x+\mathrm{i}y)}}\to\pm\mathrm{i},\qquad y\to\pm\infty,$$

故当 $R\to\infty$ 时，

$$\int_{-\mathrm{i}R}^{1-\mathrm{i}R}\tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z\ \to\ (-\mathrm{i})^{2n-1}=(-)^n\mathrm{i},$$

$$\int_{1+\mathrm{i}R}^{\mathrm{i}R}\tan^{2n-1}\pi z\,\mathrm{d}z\ \to\ -\mathrm{i}^{2n-1}\quad=(-)^n\mathrm{i}.$$

所以

$$\operatorname{res}\left\{\tan^{2n-1}\pi z\right\}\Big|_{z=1/2}=\frac{(-1)^n}{\pi}.\tag{8.51}$$

第九章　Γ 函　数

9.1　Γ 函数的定义

Γ函数是最基本的特殊函数．常用的定义是第二类 Euler 积分

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t,\qquad \mathrm{Re}\,z>0, \tag{9.1}$$

其中的积分变量 t 应该理解为 $\arg t=0$．

首先证明积分在右半平面代表一个解析函数．因为这是一个反常积分，它既是一个瑕积分 (在 $t=0$ 端)，又是一个无穷积分，所以要把它拆成两部分来分别讨论．

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t+\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t. \tag{9.2}$$

先看第二部分．显然，当 $t\geq 1$ 时，被积函数 $\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}$ 是 t 的连续函数，并且作为 z 的函数，在全平面解析．由定理 4.2 可知，要证明它代表一个解析函数，就只需证明积分一致收敛．因为

$$\mathrm{e}^t=\sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!},$$

所以对于任意正整数 N，

$$\mathrm{e}^t>\frac{t^N}{N!},\qquad \mathrm{e}^{-t}<\frac{N!}{t^N}.$$

故对于 z 平面上任一闭区域 (此区域内的任意一点，均有 $\mathrm{Re}\,z<x_0$，见图 9.1)

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right|<N!\cdot t^{x_0-N-1}.$$

这样，只要选择足够大的 N (使得

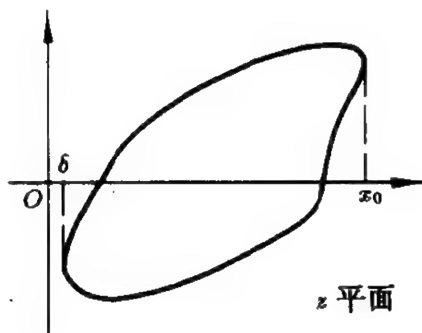


图　9.1

$N > x_0$)，积分 $\int_1^\infty t^{x_0-N-1}\mathrm{d}t$ 就收敛，故 $\int_1^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$ 在 z 平面的任一闭区域中一致收敛，因此在全平面解析.

要证明第一部分的积分在右半平面解析，关键也是证明它的一致收敛性. 因为

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}, \qquad x = \mathrm{Re}\, z.$$

因此，对于 z 平面上右半平面的任一区域，有 $\mathrm{Re}\, z = x \geq \delta > 0$，

$$\left|\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\right| \leq t^{\delta-1},$$

而 $\int_0^1 t^{\delta-1}\mathrm{d}t$ 收敛，故积分 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$ 在 z 平面上右半平面的任一闭区域中一致收敛，因此在右半平面解析.

把两部分合起来，就得到

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$$

在 z 的右半平面解析. □

下面再把 Γ 函数的定义加以扩充. 首先，上面的积分定义中，积分路径并不需要限定在实轴上，而可以修改为

$$\Gamma(z) = \int_L \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}\, z > 0, \tag{9.3}$$

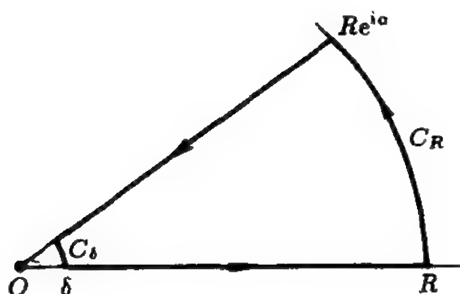


图 9.2

积分路径 L 是 t 平面上从 $t = 0$ 出发的半射线，$\arg t = \alpha$ 为常数，$|\alpha| < \pi/2$. 取围道 C 如图 9.2，应用留数定理讨论复变积分 $\oint_C \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t$，就能证得这个结论. 请读者补足这个证明.

这个结果还可以进一步修改：积分路径 L 可以是 t 平面上从 $t = 0$ 出发的任意分段光滑曲线，只要最后以 $\mathrm{Re}\, t \to +\infty$ 的方式趋于无穷远点即可. 也请读者自己补足这个证明.

上面介绍的 Γ 函数的定义当然还只适用于 $\mathrm{Re}\,z>0$．为了延拓到 z 的全平面，我们注意在前面的证明中，积分的第二部分是在全平面解析的，因此，只要用适当的方法将积分第一部分延拓到全平面即可．比较直接的方法是将指数函数作 Taylor 展开

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\int_0^1 t^{n+z-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\frac{1}{n+z}.$$

这个结果是在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 的条件下得到的．但是，在这个等式中，左端是在右半平面解析的，而右端的级数显然在全平面上 $(z\neq 0,-1,-2,\cdots)$ 一致收敛，因此在全平面解析 $(z\neq 0,-1,-2,\cdots)$．这说明，等式右端的级数表达式就是左端积分表达式在全平面上的解析延拓．于是就完成了 Γ 函数的解析延拓

$$\Gamma(z)=\int_1^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\frac{1}{n+z}. \tag{9.4}$$

9.2 Γ 函数的基本性质

性质 1 $\Gamma(1)=1$． (9.5)

直接在 Γ 函数的定义中代入 $z=1$ 即可得到这个结果．

性质 2 $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$． (9.6)

证 根据 Γ 函数的定义

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1)&=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z}\mathrm{d}t\\&=-\mathrm{e}^{-t}t^{z}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}zt^{z-1}\mathrm{d}t\\&=z\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t=z\Gamma(z).\quad\square\end{aligned}$$

对于这个结果可以从两个角度来理解．一是尽管在证明过程中用到了条件 $\mathrm{Re}\,z>0$．但是，由于 $\Gamma(z+1)$ 和 $z\Gamma(z)$ 都在全平面解析 ($z=0,-1,-2,\cdots$ 除外)，因此，根据解析延拓的原理，可以断定，这个递推关系在全平面均成立．另一方面，我们也可以直接

通过递推关系来完成 Γ 函数的解析延拓．这时，可将递推关系改写成

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\Gamma(z+1).$$

上式左端的函数在半平面 $\mathrm{Re}\,z>0$ 上解析，右端的函数在半平面 $\mathrm{Re}\,z>-1$ 上解析；两者在公共区域 $\mathrm{Re}\,z>0$ 上相等；由此可见，$\Gamma(z+1)/z$ 就是右端的 $\Gamma(z)$ 在区域 $\mathrm{Re}\,z>-1$ 上的解析延拓．而且，如果把延拓后得到的结果仍记为 $\Gamma(z)$，这就是说，可以把

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z}\Gamma(z+1),\qquad z\neq 0 \tag{9.7}$$

看成是 $\Gamma(z)$ 在区域 $\mathrm{Re}\,z>1$ 上的定义，而 $z=0$ 点是 Γ 函数的一阶极点， $\mathrm{res}\,\Gamma(0)=1$ ．

重复上述步骤，还可以将 Γ 函数延拓到区域 $\mathrm{Re}\,z>-2$ ，

$$\Gamma(z)=\frac{1}{z(z+1)}\Gamma(z+2),\qquad z\neq 0,-1. \tag{9.8}$$

$z=-1$ 也是 Γ 函数的一阶极点， $\mathrm{res}\,\Gamma(-1)=-1$ ．

如此继续，就可以将 Γ 函数解析延拓到全平面，而 $z=0,-1,-2,\cdots$ 都是 Γ 函数的一阶极点，

$$\mathrm{res}\,\Gamma(-n)=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}. \tag{9.9}$$

推论 1　对于正整数 n ，

$$\Gamma(n)=(n-1)!. \tag{9.10}$$

正是因为这个原因， Γ 函数又称为阶乘函数．

性质 3　互余宗量定理

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}. \tag{9.11}$$

这个公式的证明见后面的第 9.5 节．

推论 2　$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$ ．　(9.12)

只要在上面的性质 3 中代入 $z=1/2$ ，并且注意 $\Gamma(1/2)>0$(因为被积函数值恒为正) 即可得到此结果．

推论 3　Γ 函数在全平面无零点．

证 因为 $\pi/\sin\pi z \neq 0$，所以 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) \neq 0$．这样，如果在 $z = z_0$ 点有 $\Gamma(z_0) = 0$，则必有 $\Gamma(1-z_0) = \infty$．这只能发生在 $1-z_0 = -n$（亦即 $z_0 = n+1$），$n = 0, 1, 2, \cdots$ 时．但此时 $\Gamma(z_0) = \Gamma(n+1) = n!$，与所设矛盾．因此 Γ 函数在全平面无零点． □

图 9.3 中给出了 $\Gamma(x)$（x 为实数）的图形．它从实数范围直观地表现出这个推论以及 Γ 函数的奇点分布．

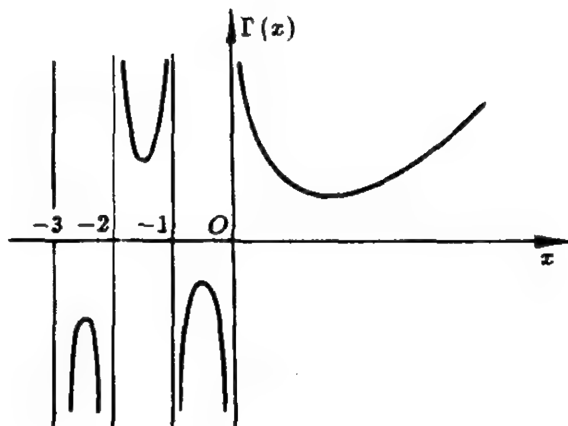


图 9.3　自变量取实数时的 Γ 函数值

性质 4　倍乘公式

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right). \tag{9.13}$$

这个公式的证明也见 9.5 节．

性质 5　Γ 函数的渐近展开，即 Stirling 公式：当 $|z| \to \infty$，$|\arg z| < \pi$ 时，有

$$\begin{aligned}\Gamma(z) \sim\ & z^{z-1/2}e^{-z}\sqrt{2\pi}\left\{1+\frac{1}{12z}\right.\\ & \left.+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}+\cdots\right\},\end{aligned} \tag{9.14}$$

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(z) \sim\ & \left(z+\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln(2\pi)\\ & +\frac{1}{12z}-\frac{1}{360z^3}+\frac{1}{1260z^5}-\frac{1}{1680z^7}+\cdots.\end{aligned} \tag{9.15}$$

在物理中更常用的结果是

$$\ln n! \sim n\ln n - n. \tag{9.16}$$

在下面的 9.7 节中，我们将就实数的情形推导 (9.14) 式．复数的普遍情形下的推导，可参阅参考书目 [1]，9.6 节．

关于渐近展开的概念，见本书 4.7 节．

9.3 Γ 函数值的计算

由于 Γ 函数是最基本的特殊函数，在实用中常需要计算它的数值. 当 $|z|$ 很大时可以利用 Γ 函数的渐近展开. 当 $|z|$ 不太大时，则不妨先利用 Γ 函数的递推关系，转化为求 Γ 函数在 $0 < \mathrm{Re}\, z \leq 1$ 时的数值. 这时需要区别两种情形.

(1) z 为实数 (即 x)， $0 < x \leq 1$. 这时可利用 Γ 函数的多项式近似来求出它的近似值. 实际的近似公式是

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_8 x^8 + \varepsilon(x), \\ &\qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad |\varepsilon(x)| \leq 3 \times 10^{-7},\end{aligned} \tag{9.17}$$

其中

$$\begin{aligned} b_1 &= -0.577191652, & b_2 &= -0.756704078, \\ b_3 &= 0.988205891, & b_4 &= 0.482199394, \\ b_5 &= -0.897056937, & b_6 &= -0.193527818, \\ b_7 &= 0.918206857, & b_8 &= 0.035868343. \end{aligned}$$

(2) z 为复数，则可用下列公式分别求出 Γ 函数的模和辐角

$$\left|\Gamma(x+\mathrm{i}y)\right| = \left|\Gamma(x)\right| \prod_{n=0}^{\infty}\left[1 + \frac{y^2}{(x+n)^2}\right]^{-1/2}, \tag{9.18}$$

$$\arg\Gamma(x+\mathrm{i}y) = y\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{x+n} - \arctan\frac{y}{x+n}\right). \tag{9.19}$$

9.4 ψ 函 数

ψ 函数是 Γ 函数的对数微商

$$\psi(z) = \frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{9.20}$$

根据 Γ 函数的性质，可以得出 $\psi(z)$ 的下列性质：

1. $z=0,-1,-2,\cdots$ 都是 $\psi(z)$ 的一阶极点，留数均为 -1 ；除了这些点以外， $\psi(z)$ 在全平面解析.

2. $$\psi(z+1)=\psi(z)+\frac{1}{z}. \tag{9.21}$$

$$\psi(z+n)=\psi(z)+\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1},\quad n=2,3,\cdots. \tag{9.22}$$

3. $$\psi(1-z)=\psi(z)+\pi\cot\pi z. \tag{9.23}$$

4. $$\psi(z)-\psi(-z)=-\frac{1}{z}-\pi\cot\pi z. \tag{9.24}$$

5. $$\psi(2z)=\frac{1}{2}\psi(z)+\frac{1}{2}\psi\left(z+\frac{1}{2}\right)+\ln 2. \tag{9.25}$$

6. $$\psi(z)\sim\ln z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\frac{1}{120z^4}-\frac{1}{252z^6}+\cdots,\qquad z\to\infty,\ |\arg z|<\pi. \tag{9.26}$$

7. $$\lim_{n\to\infty}\left[\psi(z+n)-\ln n\right]=0. \tag{9.27}$$

ψ 函数的特殊值有

$$\psi(1)=-\gamma,\qquad \psi'(1)=\frac{\pi^2}{6},$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2,\qquad \psi'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2},$$

$$\psi\left(-\frac{1}{2}\right)=-\gamma-2\ln 2+2,\qquad \psi'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}+4,$$

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2}-3\ln 2,\qquad \psi\left(\frac{3}{4}\right)=-\gamma+\frac{\pi}{2}-3\ln 2,$$

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right)=-\gamma-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\ln 3,\qquad \psi\left(\frac{2}{3}\right)=-\gamma+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{3}{2}\ln 3.$$

其中 $\gamma=-\psi(1)$ 是数学中的一个基本常数，称为 Euler 常数[①]，

$$\gamma=0.5772\ 1566\ 4901\ 5328\ 6060\ 6512\ 0900\ 8240\ \cdots.$$

---

① Euler 常数是最基本的数学常数之一．虽然猜想它是一个超越数，但至今还不知道它是不是无理数． 1980 年有文章报道，已经计算它到 30100 位小数 (见 R. P. Brent and E. M. McMillan, Math. Comp. 第 34 卷 (1980 年) 第 305 页)．

利用 ψ 函数，可以方便地求出通项为有理式的无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(n)}{d(n)} \tag{9.28}$$

之和，其中 $p(n)$ 和 $d(n)$ 都是 n 的多项式. 为了保证级数收敛，$p(n)$ 的次数至少要比 $d(n)$ 的次数低 2，即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot u_n = 0.$$

如果 $d(n)$ 是 n 的 m 次多项式，并且全部零点都是一阶零点，

$$d(n) = (n+\alpha_1)(n+\alpha_2)\cdots(n+\alpha_m),$$

即 u_n 只有一阶极点，则可部分分式为

$$u_n = \frac{p(n)}{d(n)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{n+\alpha_k}.$$

利用 ψ 函数的递推关系 (9.22)，即可求得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n &= \sum_{k=1}^{m} a_k\left[\psi(\alpha_k+N)-\psi(\alpha_k)\right]\\ &= \sum_{k=1}^{m} a_k\left[\psi(\alpha_k+N)-\ln N-\psi(\alpha_k)\right],\end{aligned}$$

其中利用了 $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k = 0$. 取极限 $N\to\infty$，注意到 (9.27) 式，即得

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} u_n &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{m} a_k\left[\psi(\alpha_k+N)-\ln N-\psi(\alpha_k)\right]\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{m} a_k\left[\psi(\alpha_k+N)-\ln N\right]-\sum_{k=1}^{m} a_k\psi(\alpha_k)\\ &= -\sum_{k=1}^{m} a_k\psi(\alpha_k).\end{aligned} \tag{9.29}$$

例 9.1 求无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$ 之和.

解 因为

$$\frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{1}{6}\frac{1}{n+1/3} - \frac{1}{3}\frac{1}{n+2/3} + \frac{1}{6}\frac{1}{n+1},$$

所以，根据上面给出的求和公式，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = -\frac{1}{6}\left[\psi\left(\frac{1}{3}\right) - 2\psi\left(\frac{2}{3}\right) + \psi(1)\right].$$

代入 ψ 函数的特殊值，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 3\right].$$

例 9.2 求无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$ 之和，其中 $a > 0$.

解 因为

$$\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\mathrm{i}}{2a}\left(\frac{1}{n+\mathrm{i}a} - \frac{1}{n-\mathrm{i}a}\right),$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = -\frac{\mathrm{i}}{2a}\left[\psi(\mathrm{i}a) - \psi(-\mathrm{i}a)\right].$$

利用上面列出的 ψ 函数的性质 4，

$$\psi(\mathrm{i}a) - \psi(-\mathrm{i}a) = -\frac{1}{\mathrm{i}a} - \pi\cot \mathrm{i}\pi a = \mathrm{i}\left[\frac{1}{a} + \pi \coth \pi a\right],$$

就可以求得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2}\left[1 + \pi a \coth \pi a\right].$$

这个结果也可以用其他方法得到，例如，见 10.5 节，例 10.11 .

如果 u_n 还有二阶极点，例如，

$$d(n) = (n+\alpha_1)(n+\alpha_2)\cdots(n+\alpha_m)(n+\beta_1)^2(n+\beta_2)^2\cdots(n+\beta_l)^2,$$

则

$$u_n = \frac{p(n)}{d(n)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{n+\alpha_k} + \sum_{k=1}^{l}\left[\frac{b_{1k}}{n+\beta_k} + \frac{b_{2k}}{(n+\beta_k)^2}\right]. \tag{9.30}$$

相应地，级数收敛的条件是

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{l} b_{1k} = 0. \tag{9.31}$$

根据 ψ 函数的递推关系，即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = -\sum_{k=1}^{m} a_k \psi(\alpha_k) - \sum_{k=1}^{l} \left[b_{1k}\psi(\beta_k) - b_{2k}\psi'(\beta_k)\right]. \tag{9.32}$$

例 9.3 求无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2}$ 之和.

解 因为

$$\frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2} = \left[\frac{4}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}\right] - \left[\frac{4}{n+1/2} - \frac{1}{(n+1/2)^2}\right],$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2(2n+1)^2} &= -\left[4\psi(1) - \psi'(1)\right] + \left[4\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \psi'\left(\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= \frac{2\pi^2}{3} - 8\ln 2.\end{aligned}$$

9.5 B 函 数

B 函数是由第一类 Euler 积分定义的:

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{Re}\,p > 0, \quad \mathrm{Re}\,q > 0. \tag{9.33}$$

令 $t = \sin^2\theta$，还可以得到 B 函数的另一个表达式

$$\mathrm{B}(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\, \mathrm{d}\theta. \tag{9.34}$$

B 函数可以用 Γ 函数表示出来，

$$\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{9.35}$$

证 在 $\mathrm{Re}\,p > 0$， $\mathrm{Re}\,q > 0$ 的条件下，显然有

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{p-1}\mathrm{d}t = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x^{2p-1}\mathrm{d}x,$$

$$\Gamma(q) = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2} y^{2q-1}\mathrm{d}y.$$

于是

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $x=r\sin\theta$， $y=r\cos\theta$， 得

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q)&=4\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r^2}(r\sin\theta)^{2p-1}(r\cos\theta)^{2q-1}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=4\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r^{2(p+q)-1}\mathrm{d}r\int_0^{\pi/2}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\mathrm{d}\theta\\&=\Gamma(p+q)\mathrm{B}(p,q).\quad\square\end{aligned}$$

利用这个关系式，可把 B 函数解析延拓到 p 和 q 的全平面.

从 B 函数的定义，或者从上面这个关系式，还可以立即看出 $\mathrm{B}(p,q)$ 对于 p 和 q 是对称的：

$$\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p).\tag{9.36}$$

现在根据 B 函数和 Γ 函数的关系式 (9.35) 证明 Γ 函数的两个性质，即互余宗量定理 (9.11) 和倍乘公式 (9.13). 首先，在 (9.35) 式中令 $p=z, q=1-z$， 即得

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)}=\Gamma(z)\Gamma(1-z).$$

另一方面，

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{-z}\mathrm{d}t.$$

令 $x=t/(1-t)$， 上式即可化为

$$\mathrm{B}(z,1-z)=\int_0^{\infty}\frac{x^{z-1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

这个积分在第 8.6 节中已经计算过 (见 (8.42) 式)， 这样就证得

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\mathrm{B}(z,1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

这个证明当然是在 $0<\mathrm{Re}\,z<1$ 的条件下得到的. 但是，由于等式的两端在全平面都解析，因此，这个等式在全平面均成立. □

至于 (9.13) 式，则可以通过积分

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Re}\,z>0$$

的计算得到．令 $x^2=t$，则得

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x\\
&\quad=2\int_{0}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}(1-t)^{z-1}t^{-1/2}\mathrm{d}t\\
&\quad=\mathrm{B}\left(z,\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}.
\end{aligned}$$

若作变换 $1+x=2t$， $1-x=2(1-t)$，则有另一种形式的结果：

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{z-1}\mathrm{d}x&=2^{2z-1}\int_{0}^{1}t^{z-1}(1-t)^{z-1}\mathrm{d}t\\
&=2^{2z-1}\mathrm{B}(z,z)=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)}.
\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(1/2)}{\Gamma(z+1/2)}=2^{2z-1}\frac{\Gamma(z)\Gamma(z)}{\Gamma(2z)},$$

即 (9.13) 式

$$\Gamma(2z)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

这里的证明仍然是在 $\mathrm{Re}\,z>0$ 的条件下进行的．但是，正如前面多次论证过的，这个结果在全平面都成立． □

*9.6 Γ 函数的无穷乘积表示

在 9.1 节中我们介绍了适用于右半平面的 Γ 函数的积分表达式，并且把它解析延拓到了整个 z 平面．本节介绍 Γ 函数的另一

种表达式 —— 无穷乘积表示

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{z}\right\}, \tag{9.37}$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-z/n}\right], \tag{9.38}$$

其中

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right] = 0.5772156649\cdots \tag{9.39}$$

就是 9.4 节中见到的 Euler 常数．这种无穷乘积表示的优点是适用于 z 的全平面．

证 因为

$$\mathrm{e}^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n},$$

所以可以设想，当 $n\to\infty$ 时应该有

$$\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}t^{z-1}\mathrm{d}t \to \Gamma(z).$$

为了证实这个设想，不妨计算

$$\begin{aligned}&\Gamma(z)-\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}t^{z-1}\mathrm{d}t\\ &\quad=\int_0^n\left[\mathrm{e}^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right]t^{z-1}\mathrm{d}t+\int_n^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对于第一项，利用不等式 (后面补证)

$$0 \le \mathrm{e}^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} \le \frac{1}{n}t^2\mathrm{e}^{-t}, \tag{9.40}$$

可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^n\left[\mathrm{e}^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right]t^{z-1}\mathrm{d}t\right|\\ &\quad\le\int_0^n\left|\mathrm{e}^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right|t^{\mathrm{Re}\,z-1}\mathrm{d}t\\ &\quad\le\frac{1}{n}\int_0^n\mathrm{e}^{-t}t^{\mathrm{Re}\,z-1}\mathrm{d}t\to 0 \qquad (n\to\infty).\end{aligned}$$

对于第二项，

$$\begin{aligned}\left|\int_n^\infty e^{-t}t^{z-1}dt\right| &\le \int_n^\infty e^{-t}t^{\text{Re}\,z-1}dt\\ &\le n^{\text{Re}\,z-1}\int_n^\infty e^{-t}dt\\ &= n^{\text{Re}\,z-1}e^{-n}\to 0 \qquad (n\to\infty).\end{aligned}$$

因此，的确有

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt \qquad\qquad (\text{令}\, t=n\tau)\\ &= \lim_{n\to\infty} n^z\int_0^1(1-\tau)^n\tau^{z-1}d\tau\\ &= \lim_{n\to\infty} n^z \text{B}(n+1,z)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)\cdots(z+n)}n^z\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{z(z+1)\cdots(n+n-1)}n^z.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)} &= \frac{1}{z}\frac{1}{\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n-1}\right)}\\ &= \frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1},\end{aligned}$$

还可以将 n^z 改写成

$$n^z=\left(\frac{2}{1}\right)^z\left(\frac{3}{2}\right)^z\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)^z=\prod_{m=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^z,$$

所以

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n-1}\left\{\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^z\right\}\\ &= \frac{1}{z}\prod_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^z\right\}.\end{aligned}$$

又若将 n^z 写成

$$n^z = e^{z\ln n} = \exp\left\{z\left[\ln n - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right\}\prod_{m=1}^{n} e^{z/m},$$

则

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{z\left[\ln n - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]\right\}\frac{1}{z}\prod_{m=1}^{n}\left[\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}e^{z/m}\right] \\ &= \frac{1}{z}e^{-\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{m}\right)^{-1}e^{z/m}\right],\end{aligned} \tag{9.41}$$

或

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{m=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-z/m}\right]. \quad \square$$

下面补证前面用到的两个结果.

首先证明不等式 (9.40) . 因为当 $0\le\alpha\le 1$ 时[①],

$$1+\alpha\le e^{\alpha}\le(1-\alpha)^{-1},$$

令 $\alpha = t/n$， $0\le t\le n$，则有

$$1+\frac{t}{n}\le e^{t/n}\le\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-1}.$$

于是

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\le e^{-t}\le\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}.$$

所以

$$0\le e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}.$$

而

$$\begin{aligned}e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} &= e^{-t}\left[1-e^{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right] \\ &\le e^{-t}\left[1-\left(1+\frac{t}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}\right] \\ &\le e^{-t}\left[1-\left(1-n\cdot\frac{t^2}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{n}t^2e^{-t},\end{aligned}$$

① 将 e^{α} 和 $(1-\alpha)^{-1}$ 作展开，即可证得.

所以

$$0 \le e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \le \frac{1}{n} t^2 e^{-t}. \quad \square$$

再证明 $\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right]$ 存在. 为此，定义

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n,$$

则有

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{k+1} < 0. \end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调递降序列. 更进一步，因为当 t 增大 ($1/t$ 减小) 时，

$$\frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} < \frac{1}{k-1}, \qquad k \ge 2,$$

所以

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} < \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1},$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 < \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

所以

$$-1 < -a_n < -\frac{1}{n} \qquad \text{或} \qquad \frac{1}{n} < a_n < 1,$$

即 $\{a_n\}$ 是有界序列. 因此极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right]$$

存在 (由此即定义了 Euler 常数 γ). $\square$

从 Γ 函数的无穷乘积表示，可以得到一系列有意义的结果. 例如

$$\sin \pi z = \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \pi z \prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\frac{z^2}{m^2}\right], \tag{9.42}$$

$$\cos \pi z = \frac{\sin 2\pi z}{2\sin \pi z} = \prod_{m=1}^{\infty}\left[1-\frac{4z^2}{(2m-1)^2}\right]. \tag{9.43}$$

将这两式求对数微商，又可以得到

$$\pi \tan \pi z = -8z\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4z^2-(2m-1)^2}, \quad z \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \cdots, \tag{9.44}$$

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{z^2-m^2}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{9.45}$$

$$\begin{aligned}\pi \csc \pi z &= \frac{\pi}{2}\left[\tan\frac{z}{2}+\cot\frac{z}{2}\right] \\ &= \frac{1}{z} + 2z\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{z^2-m^2}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,\end{aligned} \tag{9.46}$$

$$\begin{aligned}\pi \sec \pi z &= \pi \csc\left(\frac{1}{2}-z\right) \\ &= 4\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m-1)}{z^2-(2m-1)^2}, \quad z \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \cdots.\end{aligned} \tag{9.47}$$

这些展开式称为有理分式展开. 它们的展开形式不同于我们过去所见过的 Taylor 展开和 Laurent 展开；它们的收敛范围都是全平面 (奇点处除外)，也不是某一圆域或环域. 能够作有理分式展开的，只限于在有限区域内除极点外没有其他奇点的单值函数，即亚纯函数 (见 5.7 节). 在这种展开中，能把函数在它的全部极点的奇异性同时表现无遗.

将 $\tan \pi z$ 和 $\cot \pi z$ 的有理分式展开再求微商，还可以进一步得到

$$\pi^2 \sec^2 \pi z = 4\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{[2z-(2m-1)]^2}, \quad z \neq \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \cdots, \tag{9.48}$$

$$\pi^2\csc^2\pi z = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-m)^2}, \qquad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{9.49}$$

以上的结果当然可以很方便地推广到双曲函数.

*9.7 Γ 函数的渐近展开

在 9.2 节中，我们曾经介绍了 $z\to\infty$ 时 $\Gamma(z)$ 的渐近展开. 这一节就 z 为实数 x 的情形，推导一下这个公式 ①.

我们的出发点是

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^x \mathrm{d}x, \qquad x > 0. \tag{9.50}$$

分析一下这个积分，被积函数在 $t=0$ 时为 0，随着 t 的增大而增大，当 $t=x$ 时达到极大，而后又单调下降. 由于指数函数的变化特点，被积函数对积分的贡献主要来自 $t=x$ 附近的一个很窄的区间. 这时，可以将被积函数写成

$$\mathrm{e}^{-t} t^x = \mathrm{e}^{-t+x\ln t},$$

再将函数 $-t+x\ln t$ 在 $t=x$ 点作 Taylor 展开：

$$\begin{aligned} -t+x\ln t &= -t + x\ln\left[x\left(1+\frac{t-x}{x}\right)\right] \\ &= -t + x\ln x + x\ln\left(1+\frac{t-x}{x}\right) \\ &= -t + x\ln x + x\left[\frac{t-x}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{t-x}{x}\right)^2 + - \cdots\right] \\ &= x\ln x - x - \frac{(t-x)^2}{2x} + - \cdots. \end{aligned} \tag{9.51}$$

所以，就得到 Γ 函数的近似表达式

① 本节的推导方法引自 T. C. Bradbury, Mathematical Methods with Applications to Problems in the Physical Sciences, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984. 其基本思想仍是鞍点法，只不过由于限于实数情形，因而比较简单.

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &\approx x^x \mathrm{e}^{-x} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(t-x)^2/2x} \mathrm{d}t \\
&= x^x \mathrm{e}^{-x} \int_{-x}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2/2x} \mathrm{d}\xi \\
&\approx x^x \mathrm{e}^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2/2x} \mathrm{d}\xi = x^x \mathrm{e}^{-x} \sqrt{2\pi x}.
\end{aligned} \tag{9.52}
$$

这样，可以预料， $\Gamma(x+1)$ 的渐近展开式应该为

$$
\Gamma(x+1) = x^x \mathrm{e}^{-x} \sqrt{2\pi x} \left[1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \cdots\right]. \tag{9.53}
$$

下面的问题是如何确定系数 $A, B, C, \cdots$. 巧妙的办法是利用 Γ 函数的递推关系 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ，从而得到

$$
\begin{aligned}
& x^x \mathrm{e}^{-x} \sqrt{2\pi x} \left[1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \cdots\right] \\
&\quad = x(x-1)^{x-1} \mathrm{e}^{-x+1} \sqrt{2\pi(x-1)} \\
&\qquad \times \left[1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \cdots\right],
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
& 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \cdots \\
&\quad = \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-1/2} \\
&\qquad \times \left[1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \cdots\right].
\end{aligned} \tag{9.54}
$$

由于

$$
\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-1/2} = \exp\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right\},
$$

当 x 很大时，

$$
\begin{aligned}
\left(x - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) &= \left(x - \frac{1}{2}\right) \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \cdots\right] \\
&= -1 - \frac{1}{12x^2} - \frac{1}{12x^3} - \cdots,
\end{aligned}
$$

所以

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-1/2} = \exp\left\{-1-\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{12x^3}-\cdots\right\}$$
$$= \exp\{-1\}\exp\left\{-\frac{1}{12x^2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{12x^3}\right\}\cdots$$
$$= \exp\{-1\}\left[1-\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{12x^3}+\cdots\right]. \tag{9.55}$$

同时，将 $(x-1)^{-n}$ 也作展开，

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots, \tag{9.56}$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\cdots, \tag{9.57}$$

$$\frac{1}{(x-1)^3} = \frac{1}{x^3}+\cdots, \tag{9.58}$$

$$\vdots$$

将 (9.55) ~ (9.58) 各式代入， (9.54) 式就变为

$$1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\cdots$$
$$=\left[1-\frac{1}{12x^2}-\frac{1}{12x^3}+\cdots\right]$$
$$\times\left[1+\frac{A}{x}+\frac{A}{x^2}+\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{2B}{x^3}+\frac{C}{x^3}+\cdots\right]$$
$$=1+\frac{A}{x}+\left(A+B-\frac{1}{12}\right)\frac{1}{x^2}$$
$$+\left(\frac{11}{12}A+2B+C-\frac{1}{12}\right)\frac{1}{x^3}+\cdots. \tag{9.59}$$

比较系数，就得到

$$A+B-\frac{1}{12}=B, \qquad \frac{11}{12}A+2B+C-\frac{1}{12}=C,$$

于是，就求得

$$A=\frac{1}{12}, \qquad B=\frac{1}{288}. \tag{9.60}$$

当然，如果在 (9.54) ~ (9.58) 式中，写出的更高次负幂项，就可以定出系数 $C, D, \cdots$.

*9.8 几个特殊函数公式的订正

本节介绍几个特殊函数的公式，它们是正弦积分和余弦积分的几个无穷级数和[①]：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n \mathrm{si}[2(2n+1)\pi] = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}; \tag{9.61}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ci}(2n\pi) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \gamma\right); \tag{9.62}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n \mathrm{ci}(2n\pi) = 1 - \frac{\gamma}{2} - \ln 2. \tag{9.63}$$

其中 γ 是 Euler 常数，$\mathrm{si}(z)$ 和 $\mathrm{ci}(z)$ 是正弦积分和余弦积分[②]，

$$\mathrm{si}(z) = -\int_z^{\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u, \tag{9.64}$$

$$\mathrm{ci}(z) = -\int_z^{\infty}\frac{\cos u}{u}\mathrm{d}u. \tag{9.65}$$

在《数学手册》(数学手册编写组，人民教育出版社 1979 年版，第 597 页) 和《常用数学公式》(王梓坤主编，重庆出版社 1991 年版，第 456 ~ 457 页) 都收入了这几个级数，结果和上面的不同．可惜，这两本书都没有注明出处，故未能作进一步的考证．

下面就给出这几个公式的推导．推导过程中，用到一些关于 ψ 函数的公式，包括

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n+\alpha} = \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right], \tag{9.66}$$

$$\int_0^{\infty}\big[\psi(1+t) - \ln t\big]\cos 2\pi\alpha t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big[\psi(\alpha+1) - \ln\alpha\big], \tag{9.67}$$

---

① 感谢郭敦仁先生和梁昆淼先生审阅过这些公式的计算手稿．

② 正弦积分和余弦积分的定义也还有

$$\mathrm{Si}(z) = \int_0^z \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u, \qquad \mathrm{Ci}(z) = \mathrm{ci}(z).$$

前者可由 (9.21) 及 (9.26) 式导出，后者在参考书目 [17] 中可以找到. 作者也进行了复核.

为了证明 (9.61) 式，可利用

$$\mathrm{si}[2(2n+1)\pi] = -\int_{2(2n+1)\pi}^{\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = -\int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi u}{u+(2n+1)}\mathrm{d}u,$$

因此，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{si}[2(2n+1)\pi] &= -\int_0^{\infty} \sin 2\pi u\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{u+(2n+1)}\Big]\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi u}{2}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n+(u+1)/2}\Big]\mathrm{d}u \\
&= -\int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi u}{2}\frac{1}{2}\Big[\psi\left(\frac{1}{2}+\frac{u+1}{4}\right) - \psi\left(\frac{u+1}{4}\right)\Big]\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

令 $u=4t$，就可以得到

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{si}[2(2n+1)\pi] &= \int_0^{\infty} \sin 8\pi t\Big[\psi\left(\frac{1}{4}+t\right) - \psi\left(\frac{3}{4}+t\right)\Big]\mathrm{d}t \\
&= \int_{1/4}^{\infty} \psi(t)\sin 8\pi t\,\mathrm{d}t - \int_{3/4}^{\infty} \psi(t)\sin 8\pi t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{1/4}^{3/4} \psi(t)\sin 8\pi t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{1/4}^{1/2} \psi(t)\sin 8\pi t\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^{3/4} \psi(t)\sin 8\pi t\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{1/4}^{1/2} \psi(t)\sin 8\pi t\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^{1/4} \psi(1-t)\sin 8\pi(1-t)\,(-\mathrm{d}t) \\
&= \int_{1/4}^{1/2} \psi(t)\sin 8\pi t\,\mathrm{d}t - \int_{1/4}^{1/2} \psi(1-t)\sin 8\pi t\,\mathrm{d}t \\
&= -\pi\int_{1/4}^{1/2} \cot \pi t \sin 8\pi t\,\mathrm{d}t \\
&= -\pi\int_{1/4}^{0} \cot\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\sin 8\pi\left(\frac{1}{2}-\tau\right)(-\mathrm{d}\tau)
\end{aligned}$$

$$= \pi \int_0^{1/4} \tan \pi t \sin 8\pi t \, dt = \int_0^{\pi/4} \tan t \sin 8t \, dt.$$

这是一个三角函数的定积分，容易算出它的数值就是 $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}$ ，这样就证明了 (9.61) 式. □

再来证明关于余弦积分的两个级数和．我们可以把公式中出现的余弦积分写成

$$\mathrm{ci}(2n\pi) = -\int_{2n\pi}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du = -\int_n^{\infty} \frac{\cos 2\pi t}{t} dt = -\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi t}{t+n} dt,$$

于是

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \mathrm{ci}(2n\pi) &= -\int_0^{\infty} \Big[\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{t+n}\Big] \cos 2\pi t \, dt \\
&= -\int_0^{\infty} \big[\psi(1+N+t) - \psi(1+t)\big] \cos 2\pi t \, dt \\
&= \int_0^{\infty} \psi(1+t) \cos 2\pi t \, dt - \int_N^{\infty} \psi(1+t) \cos 2\pi t \, dt \\
&= \int_0^{N} \psi(1+t) \cos 2\pi t \, dt \\
&= \int_0^{N} \big[\psi(1+t) - \ln t\big] \cos 2\pi t \, dt + \int_0^{N} \ln t \cos 2\pi t \, dt.
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
\int_0^{N} \ln t \cos 2\pi t \, dt &= \frac{1}{2\pi} \ln t \sin 2\pi t \Big|_0^N - \frac{1}{2\pi} \int_0^N \frac{\sin 2\pi t}{t} dt \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2N\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\
&= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{2N\pi}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \mathrm{si}(2N\pi),
\end{aligned}$$

取极限 $N \to \infty$ ，根据 $\mathrm{si}(z)$ 的定义，就可以知道

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{si}(2N\pi) = 0.$$

因此，就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ci}(2n\pi) = \int_0^{\infty}\Big[\psi(1+t)-\ln t\Big]\cos 2\pi t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\psi(2)-\ln 1\Big]-\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\gamma\right).$$

这就是 (9.62) 式. □

同理，可以证得

$$\sum_{n=1}^{N}\mathrm{ci}(4n\pi) = -\int_0^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{t+n}\right]\cos 4\pi t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{N}\Big[\psi(1+t)-\ln t\Big]\cos 4\pi t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{4\pi}\left[\mathrm{si}(4N\pi)+\frac{\pi}{2}\right],$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ci}(4n\pi) = \int_0^{\infty}\Big[\psi(1+t)-\ln t\Big]\cos 4\pi t\,\mathrm{d}t-\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\psi(3)-\ln 2\Big]-\frac{1}{8} = \frac{5}{8}-\frac{\gamma}{2}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

这样，就可以证得 (9.63) 式，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\mathrm{ci}(4n\pi) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ci}(4n\pi)-\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{ci}(2n\pi)$$

$$=\frac{5}{4}-\gamma-\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{\gamma}{2}$$

$$=1-\frac{\gamma}{2}-\ln 2. \quad □$$

*9.9 Riemann ζ 函数和 Möbius 变换

另一个和 $\Gamma(z)$ 有关的函数是 Riemann ζ 函数. 它的定义是

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z},\qquad \mathrm{Re}\,z>1. \tag{9.68}$$

通过它的积分表示，可以延拓到整个 z 平面上. 与此相应地，可以推出 $\zeta(z)$ 的函数方程

$$\zeta(1-z)=\frac{2\Gamma(z)}{(2\pi)^z}\cos\frac{\pi z}{2}\,\zeta(z) \tag{9.69}$$

或

$$\pi^{-z/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\zeta(z)=\pi^{-(1-z)/2}\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right)\zeta(1-z), \tag{9.69'}$$

也可以由此求出 $\zeta(z)$ 在 $\mathrm{Re}\,z<1$ 时的值.

在全平面，$\zeta(z)$ 只有一个奇点，$z=1$，是它的一阶极点，留数为 1． $z=-2m\,(m=1,2,3,\cdots)$ 是 $\zeta(z)$ 的零点，其余的零点只能分布在 $0<\mathrm{Re}\,z<1$ 的带形区域内． Riemann 猜想，这些零点全都集中在 $\mathrm{Re}\,z=1/2$ 的直线上，但至今尚未得到完全的证明．截至 1982 年， Brent 等只证得在区域 $0\le \mathrm{Re}\,z\le 1,\ 0\le \mathrm{Im}\,z\le 81\,702\,130.19$ 内的 200 000 001 个零点，全都分布在 $\mathrm{Re}\,z=1/2$ 的直线上。

$\zeta(z)$ 的其他特殊值有

$$\zeta(0)=-\frac{1}{2},\qquad \zeta'(0)=-\frac{1}{2}\ln(2\pi),$$

$$\zeta(2m)=\frac{2^{2m-1}\pi^{2m}}{(2m)!}\mathrm{B}_m,\qquad \zeta(1-2m)=\frac{(-)^m}{2m}\mathrm{B}_m,$$

其中 $m=1,2,3,\cdots$， B_m 是 Bernoulli 数.

Riemann ζ 函数在数论中有重要的应用．例如，可以证明，

$$\frac{1}{\zeta(z)}=\prod_{\text{质数}\,p}\left(1-\frac{1}{p^z}\right)\qquad \mathrm{Re}\,z>1 \tag{9.70}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^z},\qquad \mathrm{Re}\,z>1, \tag{9.71}$$

其中的 $\mu(n)$ 称为 Möbius 函数，

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & n=1,\\ (-1)^r, & n\text{ 是 }r\text{ 个不同质因子的乘积},\\ 0, & n\text{ 中含有重复的质因子}.\end{cases} \tag{9.72}$$

例如，

$$\mu(1)=1,\quad \mu(2)=-1,\quad \mu(3)=-1,\quad \mu(4)=0,\quad \mu(5)=-1,$$

$$\mu(6)=1,\quad \mu(7)=-1,\quad \mu(8)=0,\quad \mu(9)=0,\quad \mu(10)=1,$$

$$\mu(11)=-1,\quad \mu(12)=0,\quad \mu(13)=-1,\quad \mu(14)=1,\quad \cdots.$$

应用 Möbius 函数，可以讨论 Möbius 变换的反演问题. 设 $f(n)$ 是一个数论函数 (即自变量为自然数 n 的函数)，则

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d) \tag{9.73}$$

称为 f 的 Möbius 变换，其中的求和是对 n 的所有因子 d (包括 1 和 n 本身) 进行的. 而且，由于

$$\sum_{d|n}f(d)=\sum_{(n/d)|n}f\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}f\left(\frac{n}{d}\right),$$

所以，也可以把 (9.73) 式改写成

$$g(n)=\sum_{d|n}f\left(\frac{n}{d}\right). \tag{9.73$'$}$$

还存在 Möbius 变换的反演，即由 $g(n)$ 可以唯一地求出

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right). \tag{9.74}$$

把 Möbius 变换应用于处理数学分析中的一般数学问题时，需要面对的是无穷级数，例如

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{x}{n}\right). \tag{9.75}$$

我们不妨称之为函数 f 的修正的 Möbius 变换. 假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都可以在 $x=0$ 点展开为 Taylor 级数，

$$f(x)=\sum_{k=2}^{\infty}c_kx^k, \tag{9.76}$$

$$g(x)=\sum_{k=2}^{\infty}d_kx^k. \tag{9.77}$$

这里的级数中缺少 $k=0$ 和 1 项，是为了保证 (9.75) 式中的级数收敛. 将 (9.76) 和 (9.77) 式代入 (9.75) 式，并进一步假设可以交换求和次序，就可以得到

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{k=2}^{\infty} c_k \left(\frac{x}{n}\right)^k\right] = \sum_{k=2}^{\infty} c_k x^k \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}\right] \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} c_k \zeta(k) x^k = \sum_{k=2}^{\infty} d_k x_k,
\end{aligned}
$$

所以，应该有

$$
d_k = c_k \zeta(k) \quad 即 \quad c_k = \frac{d_k}{\zeta(k)}. \tag{9.78}
$$

再代回到 (9.76) 中，就得到

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{\zeta(k)} x^k = \sum_{k=2}^{\infty} d_k \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^k}\right] x^k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left[\sum_{k=2}^{\infty} d_k \left(\frac{x}{n}\right)^k\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right).
\end{aligned} \tag{9.79}
$$

这就是修正的 Möbius 反演公式.

对于

$$
g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) \tag{9.80}
$$

形式的级数，也可以得到类似的结果：

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) g(nx), \tag{9.81}
$$

只要 $f(x)$ 和 $g(x)$ 能在 $x = \infty$ 点作 Taylor 展开即可.

练习 9.1 证明更一般的 Möbius 变换及其反演公式

$$
g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(n^{\alpha} x\right), \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)\, g\left(n^{\alpha} x\right).
$$

上面提到的修正的 Möbius 变换及其反演公式，在一些关于数论的著作中已经 (或者实际上已经) 出现过，但长期以来并未得到重视与应用. 1990 年，我国北京科技大学的陈难先教授[①]再次得到这个结果，并且成功地应用于讨论了凝聚态物理中的两个重

① Nan-xian Chen, Modified Möbius inverse formula and its applications in physics, Phys. Rev. Lett., **64** (1990) 1193.

要问题：声子态密度和黑体辐射的反问题，出人意料然而恰到好处地给出了问题的精确解，开辟了应用纯粹数学工具解决物理问题的新途径. 此后，陈难先等还讨论了其他一些物理问题中的反演问题，包括 Bose 体系和 Fermi 体系的问题. 特别是，还第一次给出了交错级数

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n-1}f(nx) \tag{9.82}$$

的反演公式

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\left[\sum_{m=1}^{\infty}2^{m-1}f(2^{m-1}nx)\right]. \tag{9.83}$$

在本节中，为了使得反演公式的证明过程比较简单明了，我们对函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 作了一定的限制. 实际上，我们完全可以不必把 $f(x)$ 和 $g(x)$ 理解为复变函数. 例如，如果限定 x 是实数、甚至是正实数的话，那么，只要展开式 (9.76) 和 (9.77) 在相应的条件下成立，并且能够交换求和次序即可.

把修正的 Möbius 变换反演公式应用到现有的无穷级数上，可以得到一些有意义的结果. 例如，从

$$\coth\pi x = \frac{1}{\pi x}+\frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+n^2}, \tag{9.84}$$

$$\cot\pi x = \frac{1}{\pi x}+\frac{2x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2-n^2} \tag{9.85}$$

(见 9.4 节例 9.2 和 9.6 节 (9.45) 式)，就可以推出

$$\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\left[\frac{\pi x}{n}\coth\frac{\pi x}{n}-1\right],\quad |x|<1, \tag{9.86}$$

$$\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\left[\frac{\pi x}{n}\cot\frac{\pi x}{n}-1\right],\quad |x|<1. \tag{9.87}$$

第十章　Laplace 变换

Laplace 变换是常用的一种积分变换. 在数学、物理及工程科学中有广泛的应用. 本章介绍 Laplace 变换的定义及其基本性质，以及它的简单应用.

10.1 Laplace 变换

Laplace 变换 (简称拉氏变换) 是一种积分变换，它把 $f(t)$ 变换为 $F(p)$，

$$F(p)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{10.1}$$

这里的 t 是实数，p 是复数，$p=s+\mathrm{i}\sigma$. $F(p)$ 称为 $f(t)$ 的 Laplace 换式，简称拉氏换式. e^{-pt} 是 Laplace 变换的核. 通常把 Laplace 变换简写为

$$F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\} \qquad 或 \qquad F(p)\doteq f(t); \tag{10.2}$$

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\} \qquad 或 \qquad f(t)\doteq F(p). \tag{10.3}$$

$f(t)$ 和 $F(p)$ 有时也分别称为 Laplace 变换的原函数和象函数.

需要说明，在本章中约定：$f(t)$ 应该理解为 $f(t)\eta(t)$，其中

$$\eta(t)=\begin{cases}1, & t>0,\\ 0, & t<0.\end{cases} \tag{10.4}$$

或者说，当 $t<0$ 时应该理解为 $f(t)=0$.

例 10.1　函数 $f(t)=1$ 的 Laplace 换式为

$$1\doteq\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{p},\qquad \mathrm{Re}\,p>0. \tag{10.5}$$

这里的限制条件 $\mathrm{Re}\,p>0$ 是为了保证积分收敛，或者说是 Laplace 变换存在的条件.

例 10.2 函数 $f(t)=\mathrm{e}^{\alpha t}$ 的 Laplace 换式为

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\alpha t} &\doteq \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\cdot\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-(p-\alpha)t}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha}, \qquad \mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\alpha. \qquad (10.6)
\end{aligned}
$$

这里的限制条件 $\mathrm{Re}\,p>\mathrm{Re}\,\alpha$ 同样是为了保证积分收敛，即 Laplace 变换存在.

从例 10.1 和例 10.2 可以看出，由于 Laplace 变换的核是 e^{-pt}，所以对于相当广泛的函数 $f(t)$，其拉氏换式都存在；甚至当 $t\to\infty$, $f(t)\to\infty$ 时， $f(t)$ 的拉氏换式也可能存在.

Laplace 变换存在的条件也就是积分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛的条件. 在绝大多数实际问题中， $f(t)$ 都能满足

1. $f(t)$ 在区间 $0\le t<\infty$ 中除了第一类间断点外都是连续的，而且有连续导数，在任何有限区间中这种间断点的数目是有限的；

2. $f(t)$ 有有限的增长指数，即存在正数 $M>0$ 及 $s'\ge 0$，使对于任何 t 值 (实际上，只要对于足够大的 t 值)，

$$|f(t)|<M\mathrm{e}^{s't}. \qquad (10.7)$$

这是 Laplace 变换存在的充分条件. 一般问题中遇到的函数都能满足这个要求.

当然，如果 s' 存在的话，它一定并不唯一，因为比 s' 大的任何正数显然也符合要求. s' 的下界称为收敛横标，记为 s_0.

10.2 Laplace 变换的基本性质

Laplace 变换具有下列基本性质：

性质 1 Laplace 变换是一个线性变换，即若

$$f_1(t) \risingdotseq F_1(p), \quad f_2(t) \risingdotseq F_2(p),$$

则

$$\boxed{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \risingdotseq \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p).} \tag{10.8}$$

这个性质很容易从 Laplace 变换的定义得到，因为它只不过是积分运算的线性性质的反映. 根据这个性质，立即得到

$$\begin{aligned}
\sin\omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \\
&\risingdotseq \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right] = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};
\end{aligned} \tag{10.9}$$

$$\begin{aligned}
\cos\omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} \\
&\risingdotseq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right] = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.
\end{aligned} \tag{10.10}$$

练习 10.1 证明：

$$\begin{aligned}
f(t - \tau) &\risingdotseq e^{p\tau} F(p); \\
f(at) &\risingdotseq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right), \quad a > 0; \\
e^{p_0 t} f(t) &\risingdotseq F(p - p_0).
\end{aligned}$$

性质 2 Laplace 换式的解析性.

如果函数 $f(t)$ 满足 Laplace 变换存在的充分条件，则

$$\left|e^{-pt} f(t)\right| < M e^{-(s - s_0)t}, \qquad s = \mathrm{Re}\,p.$$

当 $s - s_0 \geq \delta > 0$ 时，

$$\left|e^{-pt} f(t)\right| < M e^{-\delta t}.$$

而积分 $\int_0^\infty M e^{-\delta t}\,dt$ 收敛，故 $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt$ 在 $\mathrm{Re}\,p \geq s_0 + \delta$ 中一致收敛，因而在 $\mathrm{Re}\,p > s_0$ 的半平面内代表一个解析函数，即 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,p > s_0$ 内解析.

这个性质可以用来确定收敛横标 s_0 ，这在求 Laplace 变换的反演时是非常重要的.

性质 3 若 $f(t)$ 满足 Laplace 变换存在的充分条件，则

$$\boxed{F(p)\to 0,\quad \text{当}\,\mathrm{Re}\,p=s\to+\infty.} \tag{10.11}$$

证 因为

$$|F(p)|\le\int_0^\infty\left|\mathrm{e}^{-pt}f(t)\right|\mathrm{d}t\le M\int_0^\infty \mathrm{e}^{(s-s_0)t}\,\mathrm{d}t=\frac{M}{s-s_0},$$

故当 $\mathrm{Re}\,p=s\to+\infty$ 时， $F(p)\to 0$. □

实际上，由 Riemann-Lebesque 定理[①] 还可证明，当 $\mathrm{Re}\,p=s>s_0$ 时，

$$\boxed{\lim_{\mathrm{Im}\,p\to\pm\infty}F(p)=0.}$$

性质 4 原函数的导数的 Laplace 变换. 设 $f(t)$ 及 $f'(t)$ 都满足 Laplace 变换存在的充分条件， $f(t)\risingdotseq F(p)$ ，则因为

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f'(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t &= f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\\ &= pF(p)-f(0),\end{aligned}$$

所以

$$\boxed{f'(t)\risingdotseq pF(p)-f(0).} \tag{10.12}$$

因此，对原函数 $f(t)$ 的微商运算就转化为对象函数 $F(p)$ 的乘法运算，而且还自动包括了 $f(t)$ 的初值. 正因为这个特点，所以 Laplace 变换方法是求解微分方程的一种重要方法.

同样，只要 $f(t), f'(t), f''(t),\cdots, f^{(n)}(t)$ 都满足 Laplace 变换存

① Riemann-Lebesque 定理的内容是：如果函数 $f(t)$ 在区间 $a\le t\le b$ 上分段连续，则

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(t)\sin\omega t\,\mathrm{d}t=0,\qquad \lim_{\omega\to\infty}\int_a^b f(t)\cos\omega t\,\mathrm{d}t=0.$$

在的充分条件， $f(t) \doteq F(p)$ ，则

$$f''(t) \doteq p^2F(p) - pf(0) - f'(0), \tag{10.13}$$

$$f^{(3)}(t) \doteq p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0), \tag{10.14}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{10.15}$$

例 10.3 LR 串联电路 (见图 10.1) ， K 合上之前电路中没有电流，求 K 合上后电路中的电流.

解 根据 Kirchhoff 定律，可列出微分方程

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E, \tag{10.16a}$$

$$i(0) = 0. \tag{10.16b}$$

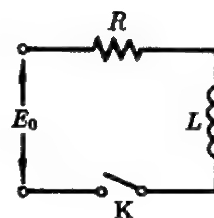


图 10.1

设 $i(t) \doteq I(p)$ ，则

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \doteq pI(p) - i(0) = pI(p).$$

所以

$$LpI(p) + RI(p) = \frac{E}{p}, \qquad \big(Lp + R\big)I(p) = \frac{E}{p}.$$

这样，经过 Laplace 变换，求解常微分方程的问题就转化为求解代数方程

$$I(p) = \frac{E}{p}\,\frac{1}{Lp+R} = \frac{E}{R}\left[\frac{1}{p} - \frac{L}{Lp+R}\right]. \tag{10.17}$$

所以

$$i(t) = \frac{E}{R}\left[1 - \mathrm{e}^{-(R/L)t}\right]. \tag{10.18}$$

从象函数反过来求原函数的问题称为反演．在这个例子中，将象函数部分分式，再利用指数函数、三角函数等函数的 Laplace 变换公式，就能求出原函数.

性质 5 原函数的积分的 Laplace 变换．设 $f(t)$ 满足 Laplace

变换存在的充分条件，则

$$\left|\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \leq \int_0^t |f(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leq \int_0^t M\mathrm{e}^{s_0\tau}\,\mathrm{d}\tau = \frac{M}{s_0}\left(\mathrm{e}^{s_0 t}-1\right),$$

所以 $\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 的 Laplace 变换也存在，

$$f(t) \doteq F(p),$$

$$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \doteq \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}.$$

但是，因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)$ ，根据性质 4 ，就有

$$F(p) = p\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\} - 0.$$

所以

$$\boxed{\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{F(p)}{p}.} \tag{10.19}$$

练习 10.2　证明：

$$\int_0^\infty f(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau \doteq \int_0^\infty F(p,\tau)\,\mathrm{d}\tau, \qquad \int_t^\infty \frac{f(\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau \doteq \frac{1}{p}\int_0^p F(q)\,\mathrm{d}q,$$

假定有关的积分均存在.

例 10.4　LC 串联电路 (见图 10.2)

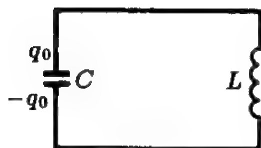


图　10.2

$$\frac{q}{C} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}, \tag{10.20a}$$

$$q = -\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau + q_0. \tag{10.20b}$$

所以

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{q_0}{C}.$$

这是关于未知函数 $i(t)$ 的微分积分方程. 设 $i(t) \doteq I(p)$ ，则有

$$L\,p\,I(p) + \frac{1}{C}\frac{I(p)}{p} = \frac{q_0}{C}\frac{1}{p}.$$

所以求解微分积分方程的问题也转化为求解代数方程

$$I(p)=\frac{q_0}{LCp^2+1}.$$

利用性质 1 中的结果求反演，即得

$$i(t)=\frac{q_0}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}. \tag{10.21}$$

10.3 Laplace 变换的反演

象函数的导数的反演 设 $f(t)$ 满足 Laplace 变换存在的充分条件，$f(t)\risingdotseq F(p)$，则 $F(p)$ 在 $\mathrm{Re}\,p\geq s_1>s_0$ 的半平面中解析，因而可以在积分号下求导

$$F^{(n)}(p)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty(-t)^n f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

所以

$$F^{(n)}(p)\risingdotseq(-t)^n f(t). \tag{10.22}$$

根据这个公式，可以容易地得到

$$\frac{1}{p^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\frac{1}{p}\risingdotseq t, \tag{10.23}$$

$$\frac{1}{p^3}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p^2}\frac{1}{p}\risingdotseq\frac{1}{2}t^2. \tag{10.24}$$

这样，若 $F(p)$ 是有理函数，则总可以通过部分分式求反演．例如

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^3(p+\alpha)}&=\frac{1}{\alpha}\frac{1}{p^3}-\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{p^2}+\frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p}-\frac{1}{\alpha^3}\frac{1}{p+\alpha}\\&\risingdotseq\frac{1}{2\alpha}t^2+\frac{1}{\alpha^2}t+\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\alpha^3}\mathrm{e}^{-\alpha t}.\end{aligned} \tag{10.25}$$

象函数的积分的反演 如果 $\int_p^\infty f(q)\,\mathrm{d}q$ 存在[①]，且当 $t\to 0$

---

① 这里的积分上限应了解为 $\mathrm{Re}\,p\to+\infty$，并且积分路径在 $F(p)$ 的解析区域内，因而积分与路径无关．

时， $|f(t)/t|$ 有界，则

$$\boxed{\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q \doteq \frac{f(t)}{t}.} \tag{10.26}$$

证 将 $F(q)$ 的表达式代入，并交换积分次序

$$\begin{aligned}\int_p^\infty F(q)\,\mathrm{d}q &= \int_p^\infty \mathrm{d}q \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-qt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t \int_p^\infty \mathrm{e}^{-qt}\,\mathrm{d}q \\ &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

由此即证得 (10.26) 式. 证明中用到了交换积分次序，关于它的合法性的讨论，见参考书目 [1]． □

利用这个公式，又可以得到许多函数的 Laplace 变换. 例如，

$$\frac{\sin\omega t}{t} \doteq \int_p^\infty \frac{\omega}{q^2+\omega^2}\,\mathrm{d}q = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{p}{\omega}. \tag{10.27}$$

特别是，如果 $p\to 0$ 时， (10.26) 式两端的积分均存在，则有

$$\boxed{\int_0^\infty F(p)\,\mathrm{d}p = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.} \tag{10.28}$$

利用这个结果，可以计算 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ 型的积分. 例如

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}\,\mathrm{d}p = \frac{\pi}{2}. \tag{10.29}$$

这个积分我们曾经应用留数定理计算过. 大家看到，这里的计算更为简便.

不仅如此，有些积分，例如

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t \qquad a>0,\, b>0$$

无法用留数定理计算，但却可以用这个办法计算：

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}\,\mathrm{d}t \risingdotseq \int_0^\infty \left(\frac{p}{p^2+a^2} - \frac{p}{p^2+b^2}\right)\mathrm{d}p$$
$$= \frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}\bigg|_0^\infty = \ln b - \ln a. \tag{10.30}$$

象函数在 ∞ 点解析的情形　现在研究一个更特殊的情形，它特别容易求出原函数．如果可以将 $F(p)$ 由半平面 $\mathrm{Re}\,p > s_0$(单值地) 解析延拓到含有 $p=\infty$ 点在内的一定区域内，且在 $p=\infty$ 点解析，这样，函数 $F(p)$ 就可以在 $p=\infty$ 点作 Taylor 级数展开

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, p^{-n}. \tag{10.31}$$

级数中不含 $n=0$ 项，是因为 $F(p)$ 作为 Laplace 换式，应当满足 $\mathrm{Re}\,p \to +\infty$ 时 $F(p)\to 0$ 的要求．将级数逐项求反演，就得到

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n.} \tag{10.32}$$

这种作法的合法性在于要证明此级数收敛，从而确认 $f(t) \risingdotseq F(p)$．为此作圆周 $C_R: |p| = R$，在 C_R 外无 $F(p)$ 的奇点，

$$c_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{C_R} F(p)\, p^{n-1}\,\mathrm{d}p.$$

因为 $p=\infty$ 是 $F(p)$ 的零点，所以

$$|F(p)| < \frac{M}{R}, \qquad 当\ |p| > R,$$

因之，$|c_n| < MR^{n-1}$．由此可以得到

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n+1}}{n!} t^n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_{n+1}|}{n!} |t|^n < M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} R^n |t|^n = M\mathrm{e}^{R|t|},$$

故级数收敛．这里同时也证明了 $f(t)$ 具有有限的增长指数，因而它的 Laplace 变换存在．□

应用这个方法可以求出函数 $\dfrac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ 的反演．这是一个多值

函数，如果规定单值分枝

$$\left.\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\right|_{p\to\infty} \to \frac{1}{p},$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{p^2+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\,\frac{1}{p^{2k+1}} \\ &\risingdotseq \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k \frac{1}{2^{2k}(k!)^2}\,t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,k!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}. \qquad (10.33)\end{aligned}$$

这正是 5.4 节例 5.7 和 6.4 节中见到过的 Bessel 函数 $\mathrm{J}_0(t)$.

另一个例子是

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-1/p} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n \frac{1}{n!}\,\frac{1}{p^{n+1}} \\ &\risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\,n!}t^n = \mathrm{J}_0(2\sqrt{t}). \qquad (10.34)\end{aligned}$$

根据 Laplace 变换的线性性质，如果 Laplace 换式 $F(p)$ 可以分解为两个函数 $F_1(p)$ 和 $F_2(p)$ 之和，那么，它的反演问题当然就很简单：只要 $F_1(p)$ 和 $F_2(p)$ 的原函数都存在， $F(p)$ 的原函数就是 $F_1(p)$ 和 $F_2(p)$ 的原函数之和．如果 $F(p)$ 可以分解为 $F_1(p)$ 和 $F_2(p)$ 之积，其反演问题就需要用到下面的卷积定理．

卷积定理 设 $F_1(p)\risingdotseq f_1(t)$ ， $F_2(p)\risingdotseq f_2(t)$ ，则

$$\boxed{F_1(p)F_2(p) \risingdotseq \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.} \qquad (10.35)$$

证

$$\begin{aligned}F_1(p)F_2(p) &= \int_0^{\infty} f_1(\tau)\,\mathrm{e}^{-p\tau}\,\mathrm{d}\tau \int_0^{\infty} f_2(\nu)\,\mathrm{e}^{-p\nu}\,\mathrm{d}\nu \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_0^{\infty} f_2(\nu)\,\mathrm{e}^{-p(\tau+\nu)}\,\mathrm{d}\nu \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_{\tau}^{\infty} f_2(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

可以在 $Ot\tau$ 平面上画出积分区域 (见图 10.3)，然后改变积分次序，

即得

$$F_1(p)F_2(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau,$$

定理得证. □

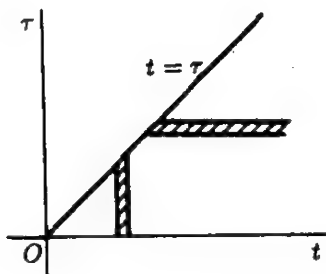


图 10.3

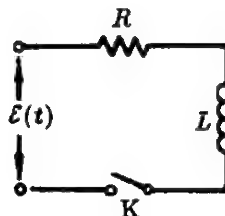


图 10.4

例 10.5 在 LR 串联电路 (见图 10.4) 中加上一方形脉冲电压

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} E_0, & 0 \le t \le T; \\ 0, & t > T. \end{cases} \tag{10.36}$$

求电路中的电流 $i(t)$，设 $i(0) = 0$.

解 列方程

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \mathcal{E}(t),$$
$$i(0) = 0.$$

作 Laplace 变换：设 $i(t) \risingdotseq I(p)$, $\mathcal{E}(t) \risingdotseq E(p)$，则

$$LpI(p) + RI(p) = E(p) \quad 即 \quad I(p) = \frac{1}{Lp+R}\cdot E(p).$$

所以

$$\begin{aligned} i(t) &= \int_0^t \mathcal{E}(\tau)\frac{1}{L}e^{-R(t-\tau)/L}\,d\tau \\ &= \begin{cases} \dfrac{E_0}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right), & 0 \le t \le T; \\ \dfrac{E_0}{R}\left(e^{RT/L} - 1\right)e^{-Rt/L}, & t > T. \end{cases} \end{aligned}$$

10.4 普遍反演公式

若函数 $F(p)$, $p=s+\mathrm{i}\sigma$ 满足：(1) $F(p)$ 在区域 $\mathrm{Re}\,p>s_0$ 中解析，(2) 在区域 $\mathrm{Re}\,p>s_0$ 中，当 $|p|\to\infty$ 时，$F(p)$ 一致地趋于 0，(3) 对于所有的 $\mathrm{Re}\,p=s>s_0$，沿直线 $L:\mathrm{Re}\,p=s$ 的无穷积分

$$\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}|F(p)|\,\mathrm{d}\sigma\qquad(s>s_0)$$

收敛，则对于 $\mathrm{Re}\,p=s>s_0$，$F(p)$ 是

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p}\tag{10.37}$$

的 Laplace 变换，其中 t 为实变量.

证 分三步证明上面给出的 $f(t)$ 就是 $F(p)$ 的原函数.

第一步，证明 (10.37) 式左端的积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$

与 s 无关，而作为变量 t 的函数 (记为 $f(t)$)，具有有限的增长指数.

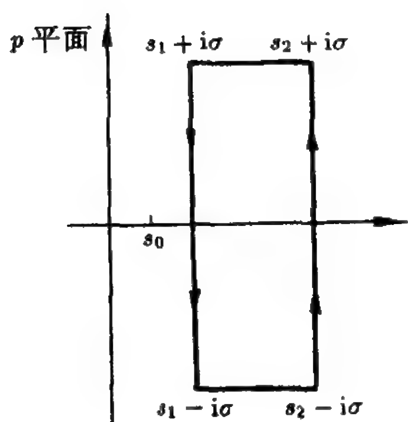


图 10.5

为此，在区域 $\mathrm{Re}\,p>s_0$ 中，考虑图10.5 中的矩形围道，其顶点为 $s_1-\mathrm{i}\sigma$, $s_2-\mathrm{i}\sigma$, $s_2+\mathrm{i}\sigma$, $s_1+\mathrm{i}\sigma$；$s_2>s_1>s_0$，$\sigma>0$. 因为围道完全处在 $F(p)$ 的解析区域中，故根据 Cauchy 定理

$$\oint F(p)\,\mathrm{d}p=0.$$

固定 s_1,s_2 而让 $\sigma\to\infty$，则由已知条件 (2)，有

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_{s_1-\mathrm{i}\sigma}^{s_2-\mathrm{i}\sigma}F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=0,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\int_{s_2+\mathrm{i}\sigma}^{s_1+\mathrm{i}\sigma}F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=0.$$

因此

$$\int_{s_1-\mathrm{i}\infty}^{s_1+\mathrm{i}\infty} F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p = \int_{s_2-\mathrm{i}\infty}^{s_2+\mathrm{i}\infty} F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p.$$

由于 s_1 和 s_2 的任意性，这就证明了积分 $\dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}}\displaystyle\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s-\mathrm{i}\infty} F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$ 与 s 无关，只是变量 t 的函数 (记为 $f(t)$)．再根据已知条件 3，有

$$\left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} \left|F(p)\mathrm{e}^{pt}\right|\cdot|\mathrm{d}p|$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{st}}{2\pi}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} |F(p)|\,\mathrm{d}\sigma \le \frac{M}{2\pi}\mathrm{e}^{st},$$

故 $f(t)$ 具有有限的增长指数，收敛横标就是 s_0．从上面的不等式出发，同时也可证得积分的一致收敛性．

第二步，证明对于 $t<0$, $f(t)\equiv 0$．这时可考虑图 10.6 中的围道 C．由 Cauchy 定理

$$\oint_C F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p = 0.$$

可是，按照 Jordan 引理，当 $R\to\infty$ 时，沿 C_R 的积分趋于 0，因此

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p \equiv 0,$$

$$t<0,\quad \mathrm{Re}\,p > s_0.$$

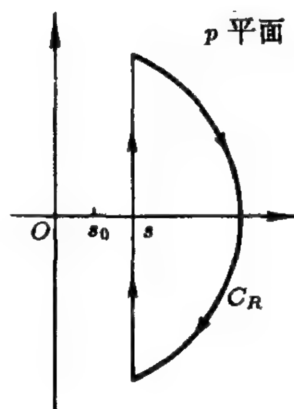


图 10.6

第三步，证明这个积分定义的 $f(t)$ 的 Laplace 变换

$$\int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(q)\,\mathrm{e}^{qt}\,\mathrm{d}q,\quad \mathrm{Re}\,p > s_0$$

就是 $F(p)$．因为上式右端内层的积分与 s 无关，故可取 $\mathrm{Re}\,p > s > s_0$，并交换积分次序 (由于积分的一致收敛性，这是合法的)，从而得到

$$\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} F(q)\,\mathrm{d}q \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(p-q)t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} \frac{F(q)}{p-q}\,\mathrm{d}q.$$

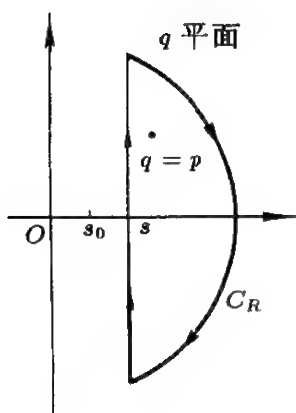


图 10.7

这个积分可以应用留数定理来计算. 取围道如图 10.7. 根据已知条件 (2), 由引理 3.1 可知, 当 $R\to\infty$ 时沿 C_R 的积分趋于 0. 再考虑到被积函数在右半平面只有唯一一个奇点, 一阶极点 $q=p$, 并且积分是沿边界负向进行的, 故

$$f(t) \doteq \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = F(p).$$

因而证得 $f(t)$ 的 Laplace 变换即为 $F(p)$.

综合上面三步的结果, 也就完全证明了 Laplace 变换的普遍反演公式. □

由普遍反演公式求 Laplace 变换的原函数, 涉及复平面上的无穷积分. 一般可利用留数定理来计算. 下面举几个例子.

例 10.6 用普遍反演公式求 Laplace 换式 $F(p)=1/(p^2+\omega^2)^2$ $(\omega>0)$ 的原函数.

解 由普遍反演公式, 此象函数的原函数为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} \frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p.$$

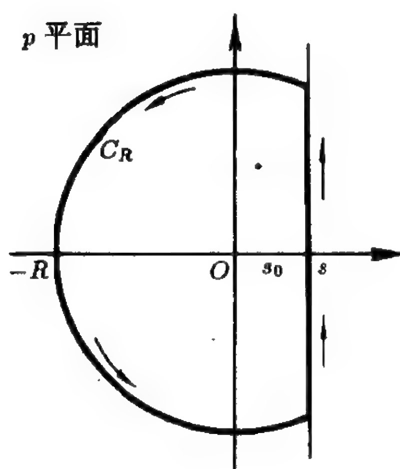


图 10.8

由于函数 $1/(p^2+\omega^2)^2$ 的奇点都在虚轴上, 所以这里积分路径中的 $s>0$ 即可. 前面已经普遍证明过, 当 $t<0$ 时一定有 $f(t)=0$. 因此下面只需讨论 $t>0$ 的情形. 这时, 可取围道如图 10.8. 由于

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}=0,$$

所以，根据推广的 Jordan 引理[①]，可以断定

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=0.$$

这样，由留数定理，就得到

$$\begin{aligned}
f(t)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=\sum_{\text{全平面}}\mathrm{res}\left\{\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}\,\mathrm{e}^{pt}\right\}\\
&=\left\{\left[\frac{t}{(p+\mathrm{i}\omega)^2}-\frac{2}{(p+\mathrm{i}\omega)^3}\right]\mathrm{e}^{pt}\right\}_{p=\mathrm{i}\omega}\\
&\quad+\left\{\left[\frac{t}{(p-\mathrm{i}\omega)^2}-\frac{2}{(p-\mathrm{i}\omega)^3}\right]\mathrm{e}^{pt}\right\}_{p=-\mathrm{i}\omega}\\
&=\frac{1}{2\omega^3}\big[\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\big].
\end{aligned}\tag{10.38}$$

下面再举一个象函数 $F(p)$ 为 p 的多值函数的情形.

例 10.7 用普遍反演公式求 Laplace 换式 $F(p)=\dfrac{1}{\sqrt{p}}\,\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}$，$\alpha>0$ 的原函数.

解 由普遍反演公式，原函数为

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\,\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\doteq\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}\,\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p.$$

其中的积分路径 $L:\mathrm{Re}\,p=s>0$ 是右半平面上的一条平行于虚轴的无穷直线. 考虑到被积函数是多值函数，$p=0$ 和 $p=\infty$ 是枝点，所以，在应用留数定理计算这个积分时，应该取积分围道如图 10.9 . 因为在积分围道内无奇点，所以

---

① 这里所谓推广的 Jordan 引理，指的是将原始的 Jordan 引理 (见 8.4 节) 作了如下的变化与扩充：

- 将 Jordan 引理所讨论的圆弧旋转了 90° .
- 现在的圆弧是和直线 $L:\mathrm{Re}\,p=s>0$ 相交，所以要略大于半圆弧. 但是，可以证明 (从略)，只要圆弧与虚轴的距离 (即 s) 固定 (因而当圆弧的半径 $R\to\infty$ 时，虚轴右方圆弧的张角 $\to 0$)，则引理仍然成立.

$$\oint_{C}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$
$$=\int_{A}^{B}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p+\int_{C_R}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$
$$+\int_{C_1}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p+\int_{C_\delta}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$
$$+\int_{C_2}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p+\int_{C'_R}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=0.$$

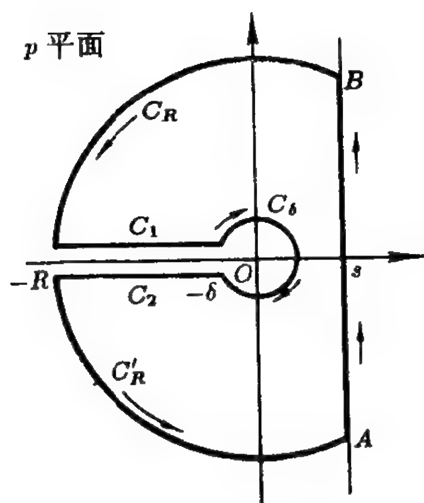


图 10.9

由推广的 Jordan 引理，可知

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=0,$$
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C'_R}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=0.$$

又根据引理 8.2，有

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=0.$$

在 C_1 和 C_2 上，

$$\arg p=\pm\pi,$$

故可分别令 $p=r\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi}$ 而得到

$$\int_{C_1}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=-\mathrm{i}\int_{\delta}^{R}\frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}r,$$
$$\int_{C_2}\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p=-\mathrm{i}\int_{\delta}^{R}\frac{1}{\sqrt{r}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}r.$$

所以，在取极限 $R\to\infty$, $\delta\to 0$ 后，就有

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\doteq\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{r}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\right]\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\mathrm{e}^{-x^2t}\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{4t}\right\}.\tag{10.39}$$

这里用到了 (4.29) 式的结果

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2 t} \cos \alpha x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2}{4t}\right\}. \tag{10.40}$$

第十九章中要用到这个例题以及下一个例题的结果.

例 10.8 用普遍反演公式求 Laplace 换式 $\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}}$, $\alpha > 0$ 的原函数.

解 由普遍反演公式，仍然有

$$\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}} \doteqdot \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{s-\mathrm{i}\infty}^{s+\mathrm{i}\infty} \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p.$$

其中的积分路径 $L : \mathrm{Re}\, p = s > 0$ 仍如图 10.9 . 完全重复上面例 10.7 的步骤，可以得到

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p = &\int_A^B \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p + \int_{C_R} \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p \\ &+ \int_{C_1} \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p + \int_{C_\delta} \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p \\ &+ \int_{C_2} \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p + \int_{C_R'} \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p \\ =&\, 0.\end{aligned}$$

由推广的 Jordan 引理，可知

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p = 0,$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R'} \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p = 0.$$

又根据引理 8.2 ，有

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p = -2\pi\mathrm{i}.$$

同样可以将沿 C_1 和 C_2 的积分化为

$$\int_{C_1} \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p = -\int_\delta^R \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}r,$$

$$\int_{C_2} \frac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p = \int_{\delta}^{R} \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\,\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}r.$$

所以，在取极限 $R \to \infty$, $\delta \to 0$ 后，又有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{1}{p}\,\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p &= 1 - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{\infty} \frac{1}{r}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sqrt{r}}\right]\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}r \\ &= 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha\sqrt{r}}{r}\,\mathrm{e}^{-rt}\,\mathrm{d}r \\ &= 1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{e}^{-x^2 t}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为

$$\int_0^{\alpha} \cos\zeta x\,\mathrm{d}\zeta = \frac{\sin\alpha x}{x},$$

所以，将 (10.40) 式对 α 积分，就可以化简这里的积分，

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,\mathrm{e}^{-x^2 t}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2 t}\left[\int_0^{\alpha}\cos\zeta x\,\mathrm{d}\zeta\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\alpha}\left[\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2 t}\cos\zeta x\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\int_0^{\alpha}\exp\left\{-\frac{\zeta^2}{4t}\right\}\mathrm{d}\zeta \\ &= \sqrt{\pi}\int_0^{\alpha/2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x. \qquad (10.41)\end{aligned}$$

这样就求出了

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}} &\doteq 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha/2\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha/2\sqrt{t}}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}. \qquad (10.42)\end{aligned}$$

这里用到了

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = 1. \qquad (10.43)$$

*10.5 利用 Laplace 变换计算级数和

Laplace 变换也可以用来计算某些级数 $\sum F(n)$ 之和. 其基本思路是利用 Laplace 变换

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t,$$

将级数的通项表示成积分，而后交换积分和级数求和的次序

$$\sum F(n) = \sum \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-nt}\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t)\left[\sum \mathrm{e}^{-nt}\right]\mathrm{d}t,$$

这样，就把级数求和的问题转化为定积分的计算. 由于函数 e^{-nt} 的存在，在一般情况下常常可以保证交换次序的合法性.

在计算中常用到的 Laplace 变换的结果有

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p-\alpha}, \qquad \int_0^\infty t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(\alpha)}{p^\alpha},$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\sin\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\cos\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\sinh at\,\mathrm{d}t = \frac{a}{p^2-a^2}, \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\cosh at\,\mathrm{d}t = \frac{p}{p^2-a^2}.$$

下面通过几个例子来具体说明.

例 10.9 计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 之和.

解 首先利用

$$\int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p^2}, \qquad \mathrm{Re}\,p > 0,$$

将级数化为

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty t\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty t\left[\sum_{n=1}^\infty \mathrm{e}^{-nt}\right]\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{10.44}$$

为了计算这个积分，考虑复变积分 $\oint_C \frac{z^2}{e^z-1}dz$，围道如图 10.10．这时，根据留数定理就有

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z^2}{e^z-1}dz &= \int_0^R \frac{x^2}{e^x-1}dx + \int_0^{2\pi}\frac{(R+iy)^2}{e^{R+iy}-1}i\,dy \\ &\quad + \int_R^{\delta}\frac{(x+2\pi i)^2}{e^x-1}dx + \int_{C_\delta}\frac{z^2}{e^z-1}dz \\ &\quad + \int_{2\pi-\delta}^0 \frac{(iy)^2}{e^{iy}-1}i\,dy \\ &= 0.\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{R\to\infty}(R+iy)\cdot\frac{(R+iy)^2}{e^{R+iy}-1}=0,\qquad \lim_{z\to 2\pi i}(z-2\pi i)\cdot\frac{z^2}{e^z-1}=-4\pi^2,$$

所以

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{(R+iy)^2}{e^{R+iy}-1}i\,dy=0,\qquad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{z^2}{e^z-1}dz=2\pi^3 i.$$

又因为

$$\int_{2\pi-\delta}^0\frac{(iy)^2}{e^{iy}-1}i\,dy=-\frac{i}{2}\int_0^{2\pi-\delta}\left(1+i\cot\frac{y}{2}\right)y^2\,dy,$$

所以，取极限 $R\to\infty, \delta\to 0$，并比较等式两端的虚部，即可求得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\int_0^{\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\frac{1}{6}\pi^2. \tag{10.45}$$

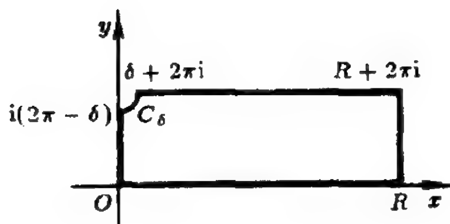


图 10.10

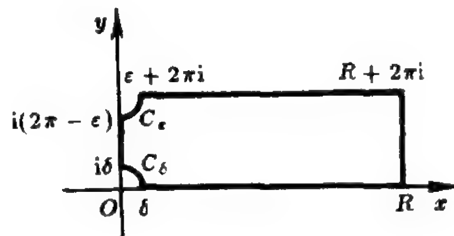


图 10.11

例 10.10 计算级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-a^2}$ 之和，其中 a 不为整数，且不妨设 $\operatorname{Re}a>0$.

解 这个级数和在 9.4 节已经遇到过，当时是作为 Γ 函数无穷乘积表示的直接应用而得到的．这里再采用 Laplace 变换的办法讨论．因为

$$\int_0^{\infty}\sinh at\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\frac{a}{p^2-a^2},\qquad \operatorname{Re}p>\operatorname{Re}a,$$

所以，级数可化为

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}&=-\frac{1}{a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\sinh at\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t\\&=-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\frac{\sinh at}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这个结果只在 $\operatorname{Re}a<1$ 时成立．我们可以在此条件下应用留数定理算出上面的积分．为此，采用图 10.11 中的围道计算复变积分

$$\begin{aligned}\oint_C\frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z=&\int_\delta^R\frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{a(R+\mathrm{i}y)}}{\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y}-1}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}y\\&+\int_R^{\epsilon}\frac{\mathrm{e}^{a(x+2\pi\mathrm{i})}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x+\int_{C_\epsilon}\frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z\\&+\int_{2\pi-\epsilon}^{\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ay}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-1}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}y+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z\\=&\,0.\end{aligned}$$

因为

$$\lim_{R\to\infty}(R+\mathrm{i}y)\cdot\frac{\mathrm{e}^{a(R+\mathrm{i}y)}}{\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y}-1}=0,$$

$$\lim_{z\to2\pi\mathrm{i}}(z-2\pi\mathrm{i})\cdot\frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^z-1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi a},$$

$$\lim_{z\to0}z\cdot\frac{\mathrm{e}^{az}}{\mathrm{e}^z-1}=1,$$

所以

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+iy)}}{e^{R+iy}-1}\,i\,dy=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{az}}{e^z-1}\,dz=-\frac{\pi i}{2}e^{i2\pi a},$$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{e^{az}}{e^z-1}\,dz=-\frac{\pi i}{2}.$$

又因为

$$\int_{2\pi-\varepsilon}^{\delta}\frac{e^{iay}}{e^{iy}-1}\,i\,dy=-\frac{i}{2}\int_{\delta}^{2\pi-\varepsilon}\left(1+i\cot\frac{y}{2}\right)e^{iay}\,dy,$$

所以，取极限 $R\to\infty,\ \varepsilon\to 0,\ \delta\to 0$ ，即得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}\frac{e^{ax}}{e^x-1}dx&=\frac{\pi i}{2}\frac{1+e^{i2\pi a}}{1-e^{i2\pi a}}-\frac{i}{2}\frac{1}{1-e^{i2\pi a}}\int_0^{2\pi}\left(1+i\cot\frac{y}{2}\right)e^{iay}dy\\&=-\frac{\pi}{2}\cot\pi a+\frac{1}{4\sin\pi a}\int_0^{2\pi}\left(1+i\cot\frac{y}{2}\right)e^{ia(y-\pi)}dy\\&=-\frac{\pi}{2}\cot\pi a+\frac{1}{4\sin\pi a}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-i\tan\frac{t}{2}\right)e^{iat}dt.\end{aligned}$$

类似地，

$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}}{e^x-1}\,dx=\frac{\pi}{2}\cot\pi a-\frac{1}{4\sin\pi a}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-i\tan\frac{t}{2}\right)e^{-iat}\,dt,$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}&=-\frac{1}{a^2}-\frac{\pi}{2a}\cot\pi a\\&\quad+\frac{1}{4a\sin\pi a}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-i\tan\frac{t}{2}\right)\cos at\,dt\\&=-\frac{1}{a^2}-\frac{\pi}{2a}\cot\pi a+\frac{1}{4a^2\sin\pi a}\sin at\Big|_{-\pi}^{\pi}\\&=-\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{2a}\cot\pi a.\end{aligned}\tag{10.46}$$

上面的结果是在 $0<\mathrm{Re}\,a<1$ 的条件下得到的．但是很容易延拓到 $\mathrm{Re}\,a>0$ ．

下面证明，如果 a 为纯虚数，这个结果仍然成立.

例 10.11 计算级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2}$ 之和，其中 $a>0$.

解 这个级数在上一章也已经讨论过，现在也再利用 Laplace 变换求出它的和. 仿照例 10.10，可将级数化为

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} &= \frac{1}{a^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\sin at\,\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\int_0^{\infty}\frac{\sin at}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

为了计算这个积分，可以采用和例 10.10 同样的围道 (图 10.11)，考虑围道积分

$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z.$$

这时，根据留数定理就有

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z &= \int_\delta^R \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x+\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a(R+\mathrm{i}y)}}{\mathrm{e}^{R+\mathrm{i}y}-1}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}y\\ &\quad+\int_R^{\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a(x+\mathrm{i}2\pi)}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x+\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z\\ &\quad+\int_{2\pi-\varepsilon}^{\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\cdot\mathrm{i}y}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}-1}\,\mathrm{i}\,\mathrm{d}y+\int_{C_\delta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z\\ &=0.\end{aligned}$$

完全仿照例 10.10 中的讨论，就可以得到

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi a}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}+\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}\int_0^{2\pi}\left(1+\mathrm{i}\cot\frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{-ay}\,\mathrm{d}y\\ &=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}\coth\pi a+\frac{\mathrm{i}}{4\sinh\pi a}\int_0^{2\pi}\left(1+\mathrm{i}\cot\frac{y}{2}\right)\mathrm{e}^{a(\pi-y)}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

比较等式两端的虚部，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\sin at}{e^t-1}\,dt &= \frac{\pi}{2}\coth\pi a + \int_0^{2\pi} e^{a(\pi-y)}\,dy \\ &= -\frac{1}{2a} + \frac{\pi}{2}\coth\pi a,\end{aligned}$$

因此即可求出

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}\coth\pi a. \tag{10.47}$$

实际上，作为这个和式的特殊情况，也还可以取 $a=0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \lim_{a\to 0}\left[-\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a}\coth\pi a\right] = \frac{1}{6}\pi^2. \tag{10.48}$$

例 10.12 将例 10.11 的结果积分，还可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{a^2}{n^2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a \frac{2x}{n^2+x^2}\,dx \\ &= \int_0^a \left(-\frac{1}{x} + \pi\coth\pi x\right)dx \\ &= \ln\frac{\sinh\pi a}{\pi a}. \end{aligned} \tag{10.49}$$

第十一章 δ 函数

在这一章中，我们要介绍一种新的"函数"，δ 函数. 它是由物理学家 P. A. M. Dirac 首先引进的，在近代物理学中有着广泛的应用. 它可以用于描写物理学中的一切点量，例如点质量、点电荷、瞬时源等，物理图象清晰. 在数学上，δ 函数可以当作普通函数一样进行运算，如进行微分和积分变换，甚至应用于求解微分方程，而且得到的结果和物理结论是一致的. 总之，运用 δ 函数，可以为我们处理有关的数学物理问题，带来极大的便利.

但是，δ 函数是一类"奇怪"的函数，按照 20 世纪以前的数学概念是无法理解的. 它的严格数学理论，要涉及泛函分析的知识. 本章将从物理学的直观出发，引进 δ 函数的概念，介绍它的最基本的知识及其初步应用.

11.1 δ 函数

作为 δ 函数的物理背景，先讨论点源、例如点电荷的电荷分布密度函数的数学表示. 为简单起见，主要讨论一维情形.

如图 11.1，设在无穷直线上 $0 < x < l$ 区间内有均匀的电荷分布，总电量为 1 个单位，在区间外无电荷，则电荷密度函数为

$$\delta_l(x) = \begin{cases} 0, & 当\, x < -\dfrac{l}{2}; \\ \dfrac{1}{l}, & 当\, -\dfrac{l}{2} < x < \dfrac{l}{2}; \\ 0, & 当\, x > \dfrac{l}{2}. \end{cases} \tag{11.1}$$

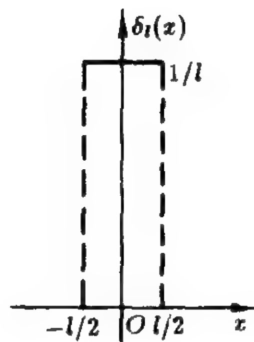


图 11.1 单位点电荷的电荷密度

对于任意一个在 $-l/2 < x < l/2$ 内连续的函数 $f(x)$ ，则根据中值定理，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x = f(\theta l), \qquad -1/2 \leq \theta \leq 1/2. \tag{11.2}$$

实际上，积分限不一定是 $\pm\infty$. 只要 $a < -l/2, b > l/2$ ，就有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(\theta l), \qquad -1/2 \leq \theta \leq 1/2. \tag{11.3}$$

作为极限情形，当 $l \to 0$ 时，就得到点电荷的密度函数，记为

$$\delta(x) = \lim_{l\to 0}\delta_l(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0; \\ \infty, & \text{当 } x = 0; \\ 0, & \text{当 } x > 0. \end{cases} \tag{11.4}$$

而且，对于任意一个在 $x = 0$ 点连续的函数 $f(x)$ ，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0). \tag{11.5}$$

实际上，积分限不一定是 $\pm\infty$. 只要 $a < 0, b > 0$ ，就有

$$\int_a^b f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0). \tag{11.6}$$

显然，还可以把区间内的电荷分布函数修改为其他任意连续函数，再重复上面的讨论. 作为它们的极限情形，我们总会得到同样的结果.

这样定义的函数，并不是通常意义下的函数：它并没有给出函数与自变量之间的对应关系，或者说，它给出的对应关系

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \neq 0; \\ \infty, & \text{当 } x = 0 \end{cases}$$

在通常意义下是没有意义的. δ 函数表示的是 (任意阶可微) 函数序列的极限. 它所给出的“函数值”只是在积分运算中才有意义.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0), \qquad \text{特别是} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{11.7}$$

而且，这个积分应该理解为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = \lim_{l\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x.$$

从计算的角度来看，引进 δ 函数的目的，即在于简化对函数序列进行微积分计算、而后取极限的过程．由于函数序列是由具有足够好的连续性质的函数组成的，所以，在计算中可以把 δ 函数当作 (任意阶) 连续可微的函数处理，甚至可以定义 δ 函数的导数 $\delta'(x)$ ：对于任何一个在 $x=0$ 点连续并有连续导数的函数 $f(x)$ ，有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x &= f(x)\delta(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)\mathrm{d}x \\ &= -f'(0). \end{aligned} \tag{11.8}$$

这里，就把 δ 函数当作普通的连续函数一样进行分部积分．

正是因为 δ 函数并不是给出普通的数值之间的对应关系，因此，δ 函数也并不像普通的函数那样具有唯一、确定的表达式．事实上，凡是具有

$$\lim_{l\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_l(x)\mathrm{d}x = f(0) \tag{11.9}$$

性质的函数序列 $\delta_l(x)$ ，或是具有

$$\lim_{n\to \infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_n(x)\mathrm{d}x = f(0) \tag{11.10}$$

性质的函数序列 $\delta_n(x)$ (例如见图 11.2) ，它们的极限都是 δ 函数．

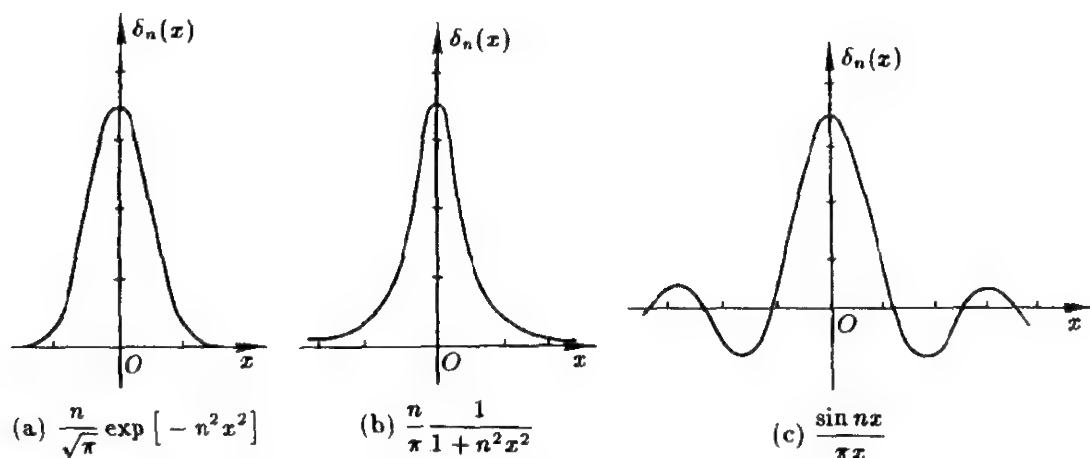


图 11.2　δ 函数的逼近序列举例

同样，有关 δ 函数的等式，也应当从积分意义下去理解. 例如

$$x\delta(x) = 0, \tag{11.11}$$

$$\delta(-x) = \delta(x), \tag{11.12}$$

$$\delta'(-x) = -\delta'(x), \tag{11.13}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \tag{11.14}$$

$$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x) \tag{11.15}$$

就分别应该理解为

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x\delta(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{11.16}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x, \tag{11.17}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(-x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x, \tag{11.18}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\frac{1}{|a|}\delta(x)\right]\mathrm{d}x, \tag{11.19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\delta(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\big[g(0)\delta(x)\big]\mathrm{d}x. \tag{11.20}$$

δ 函数还可以表示成初等函数的微商. 由于

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(x)\mathrm{d}x = \eta(x) \tag{11.21}$$

($\eta(x)$ 的定义见第十章)，因此，

$$\delta(x) = \frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}. \tag{11.22}$$

δ 函数也可以表示成初等函数的 Fourier 积分. 因为

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x = 1,$$

所以，根据 Fourier 变换的反演公式，有

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k. \tag{11.23}$$

也可以对 δ 函数作 Laplace 变换，

$$\delta(t-t_0) \doteq \int_0^{\infty} \delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-pt_0}, \qquad t_0 > 0. \tag{11.24}$$

现在把 δ 函数推广到二维或三维的情形. 显然，如果在平面上 (x_0, y_0) 点处有一个单位点电荷，那么，它的密度分布函数就是 $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$. 同样，在三维空间 (x_0, y_0, z_0) 处有一个单位点电荷，它的密度分布函数就是 $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$. 当然，从三维空间来看，所谓一维点电荷应该是三维空间内的面电荷；二维点电荷就是三维空间内的线电荷.

例 11.1 证明

$$\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}), \tag{11.25}$$

其中

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{11.26}$$

称为 Laplace 算符， $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

证 当 $r \neq 0$ 时，直接微商可得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= -\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{3x^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

同理，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{3y^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \frac{3z^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}.
\end{aligned}$$

所以，就证得

$$\nabla^2\frac{1}{r} = 0, \qquad r \neq 0.$$

当 $r=0$ 时不能直接微商. 但是，正像前面指出的，凡是涉及 δ 函数的等式都应该从积分意义下去理解，即应该去证明

$$\iiint\limits_V \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -4\pi, \tag{11.27}$$

其中 V 是包含原点在内的任一体积. 不妨将 V 就取为整个 (三维) 空间. 容易得到

$$\begin{aligned}\iiint \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \lim_{a\to 0} \iiint \nabla^2 \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= -\lim_{a\to 0} \iiint \frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}} r^2 \mathrm{d}r \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi \\ &= -12\pi \lim_{a\to 0} \int_0^\infty \frac{a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}} r^2 \mathrm{d}r,\end{aligned}$$

令 $x=r/a$，即可证明上面的积分与 a 无关，然后再令 $x=\tan\theta$，即得

$$\begin{aligned}\iiint \nabla^2 \frac{1}{r} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= -12\pi \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^{5/2}} \mathrm{d}x \\ &= -12\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^{3/2}} \mathrm{d}\theta \\ &= -12\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \mathrm{d}\theta \\ &= -12\pi \cdot \frac{1}{3} \sin^3\theta \Big|_0^{\pi/2} = -4\pi. \quad \square\end{aligned}$$

11.2 利用 δ 函数计算定积分

利用 δ 函数的常用积分表达式

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k,$$

或

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \cos kx \mathrm{d}k = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos kx \mathrm{d}k,$$

也可以计算定积分．下面通过几个例题来说明一般的计算步骤．

例 11.2 计算积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$．

解 考虑积分

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda x}{x}\mathrm{d}x,$$

显然有

$$F'(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos\lambda x\,\mathrm{d}x=2\pi\delta(\lambda).$$

所以

$$F(\lambda)=2\pi\eta(\lambda)+C,$$

其中 C 为积分常数，待定．故当 $\lambda>0$ 时，

$$F(\lambda)=2\pi+C,\qquad F(-\lambda)=C.$$

考虑到 $F(\lambda)$ 是 λ 的奇函数，

$$F(-\lambda)=-F(\lambda),\qquad F(0)=0,$$

即可定出 $C=-\pi$．因此

$$F(\lambda)=\begin{cases}\pi, & \lambda>0;\\ 0, & \lambda=0;\\ -\pi, & \lambda<0.\end{cases}$$

特别是，当 $\lambda=1$，就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi.$$

例 11.3 计算积分 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$．

解 可以引进辅助积分

$$F(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}}{x^2+x+1}\mathrm{d}x,$$

它满足微分方程

$$-F''(\lambda)-\mathrm{i}F'(\lambda)+F(\lambda)=2\pi\delta(\lambda).\tag{11.28}$$

这是一个特殊的二阶常微分方程：其非齐次项含有 δ 函数. 这种特殊性表现在两方面：一是当 $\lambda \neq 0$ 时，$\delta(\lambda)=0$，方程是齐次的，二是当 $\lambda=0$ 时，$F(\lambda)$ 是连续的，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}[F(0-\varepsilon)-F(0+\varepsilon)]=0,$$

但 $F'(\lambda)$ 并不连续. 这种不连续性，即 $F'(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点的左右极限存在但不相等，恰好反映了二阶微分方程 (11.28) 的非齐次项为 δ 函数. 为了定量描述 $F'(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点不连续性，可以将微分方程 (11.28) 积分，由 $\lambda=0$ 之左 $0-\varepsilon$ 积到 $\lambda=0$ 之右 $0+\varepsilon$，$\varepsilon>0$，于是就有

$$\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon}\Big[F''(\lambda)+\mathrm{i}F'(\lambda)-F(\lambda)\Big]\mathrm{d}\lambda=-2\pi\int_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon}\delta(\lambda)\mathrm{d}\lambda=-2\pi.$$

由于 $F(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点连续，故当 $\varepsilon\to+0$ 时，上式左端第二项和第三项的积分均趋于 0，于是

$$\lim_{\varepsilon\to+0}F'(\lambda)\Big|_{0-\varepsilon}^{0+\varepsilon}=-2\pi.$$

现在回到微分方程的求解上. 因为当 $\lambda\neq0$ 时 $\delta(\lambda)=0$，所以

$$F(\lambda)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}}+B\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}}, & \lambda>0;\\ C\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/6}}+D\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}}, & \lambda<0.\end{cases}$$

考虑到 $F(\lambda)$ 的有界性，A 和 D 必为 0，再因为 $F(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点连续，

$$B=C;$$

$F'(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点不连续，

$$\frac{-\mathrm{i}-\sqrt{3}}{2}B-\frac{-\mathrm{i}+\sqrt{3}}{2}C=-2\pi,$$

因此求得

$$B=C=2\pi/\sqrt{3}.$$

所以

$$F(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\lambda/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}, & \lambda>0;\\ \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\sqrt{3}\lambda/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}, & \lambda<0.\end{cases}$$

所要求的积分即为

$$I=\operatorname{Im}F(2)=-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\sqrt{3}}\sin 1.$$

下面直接验证一下 $F'(\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 点的不连续性. 根据上面所得的结果，可以求出

$$F'(\lambda)=\begin{cases}-\left[1+\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right]\pi\mathrm{e}^{-\sqrt{3}\lambda/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}, & \lambda>0;\\ \left[1-\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right]\pi\mathrm{e}^{\sqrt{3}\lambda/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}, & \lambda<0,\end{cases}$$

或者统一写成

$$F'(\lambda)=\left[1-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}-2\eta(\lambda)\right]\pi\mathrm{e}^{-\sqrt{3}|\lambda|/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda/2}.$$

特别是，在 $\lambda=0$ 点， $F'(\lambda)$ 的左右极限为

$$\lim_{\varepsilon\to+0}F'(0\pm\varepsilon)=-\frac{\pi\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\mp\pi.$$

例 11.4 计算积分 $I=\displaystyle\int_0^\infty\frac{x\sin x}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

解 先讨论积分

$$F(\lambda)=\int_0^\infty\frac{\cos\lambda x}{x^4+1}\mathrm{d}x.$$

因为

$$F^{(4)}(\lambda)+F(\lambda)=\pi\delta(\lambda),$$

这是一个关于 $F(\lambda)$ 的四阶常微分方程. 当 $\lambda>0$ 时， $\delta(\lambda)=0$ ，即方程是齐次的，通解为

$$\begin{aligned}F(\lambda)\;=\;&\mathrm{e}^{-\lambda/\sqrt{2}}\left[A\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}+B\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right]\\&+\mathrm{e}^{\lambda/\sqrt{2}}\left[C\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}}+D\cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right].\end{aligned}$$

考虑到 $F(\lambda)$ 的有界性，应该有

$$C = D = 0.$$

为了定出积分常数 A 和 B，可利用

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

$$F''(0) = \int_0^\infty \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+1} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

因此

$$A = B = \pi/2\sqrt{2}.$$

所以，当 $\lambda > 0$ 时，

$$F(\lambda) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\lambda/\sqrt{2}}\left[\sin\frac{\lambda}{\sqrt{2}} + \cos\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right].$$

由此即可求得

$$I = -F'(1) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-1/\sqrt{2}}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

11.3 常微分方程初值问题的 Green 函数

在上一节中，我们讨论了一类特殊的常微分方程，非齐次项为 δ 函数的常微分方程. 这类方程在理论上和实用上都具有特殊的重要性，有必要再进行进一步的讨论. 为了确定起见，先讨论这类方程在齐次初值条件下的解，以及解的最基本性质.

在开始下面的具体讨论之前，需要强调，第一，在传统的意义下，这类常微分方程的非齐次项是没有意义的，我们只应该把方程的非齐次项理解为一个函数序列的极限，函数序列中的每一项都具有足够好的连续性 (因此，在取极限之前，方程是有意义的)，我们在求解微分方程后再取极限. 引进 δ 函数的目的就在于使得我们可以直接处理这种极限情形的微分方程求解问题，而不必考虑具体的函数序列以及它的极限过程. 第二，正因为 δ 函数不是传

统意义下的函数，这使得非齐次项为 δ 函数的微分方程的解具有独特的连续性质. 就二阶常微分方程而言，我们将要看到，它的解是连续的，但是解的一阶导数是不连续的. 正是由于一阶导数的不连续，才使得它正好是非齐次项 δ 函数的常微分方程的解. 第三，常微分方程的非齐次项为 δ 函数，又使得这种非齐次方程不是一般情形下的非齐次方程：除了在使 δ 函数的宗量为无穷的个别点外，方程是齐次的！这使得这种非齐次常微分方程又很容易求解. 在特殊情形下甚至可以直接积分而求得方程的通解.

下面从一个最简单的例子开始我们的讨论.

例 11.5 求解常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t), \qquad t > 0, \tag{11.29a}$$

$$g(0) = 0, \quad g'(0) = 0. \tag{11.29b}$$

解 将方程 (11.29a) 直接积分，就得到

$$g'(x) = \eta(x-t) + \alpha(t). \tag{11.30}$$

注意

$$\eta(x-t) = \begin{cases} 0, & x < t; \\ 1, & x > t, \end{cases}$$

就容易将上面的结果再积分一次，得到

$$g(x) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t). \tag{11.31}$$

这里用到了 $g(x)$ 在 $x = t$ 点必须连续的要求，因为不然的话，在 $g'(x)$ 中一定会出现 δ 函数.

将解式 (11.31) 代入初值 (11.29b)，由此可以定出积分常数

$$\alpha(t) = 0, \qquad \beta(t) = 0,$$

因此即可求得

$$g(x) = (x-t)\eta(x-t). \tag{11.32}$$

对于这个例子，有必要进行一点特别补充讨论. 首先要特别

强调 $g(x)$ 在 $x=t$ 点的连续性质：

$$g(x)\text{连续}, \qquad g'(x)\text{ 不连续}, \; g'(x)\Big|_{t-0}^{t+0}=1. \tag{11.33}$$

不难理解，在更普遍的情形下，如果在关于 $g(x)$ 的二阶常微分方程中，非齐次项为 $\delta(x-t)$ ，则在 $x=t$ 点一定有 $g(x)$ 连续和 $g'(x)$ 不连续，这是这类方程解的最基本特征.

其次，还能看到，上面求得的解在 $x<t$ 时恒为 0 . 这个结论具有普遍性. 因为 $x<t$ 时，方程是齐次的，所以有通解

$$g(x)=c_1g_1(x)+c_2g_2(x),$$

代入齐次初值条件，就得到方程组

$$c_1g_1(0)+c_2g_2(0)=0, \qquad c_1g_1'(0)+c_2g_2'(0)=0.$$

但由于 $g_1(x,t)$ 和 $g_2(x,t)$ 是线性无关的，

$$W[g_1(x),\,g_2(x)]\equiv\begin{vmatrix} g_1(x) & g_2(x)\\ g_1'(x) & g_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0,$$

这意味着

$$\begin{vmatrix} g_1(x) & g_2(x)\\ g_1'(x) & g_2'(x)\end{vmatrix}_{x=0}\neq 0,$$

所以，上面的方程组，作为 c_1 和 c_2 的线性齐次代数方程组，一定只有零解 $c_1=0, c_2=0$ ，即

$$g(x)\equiv 0, \qquad x<t. \tag{11.34}$$

所以，上面的初值条件 (11.29b) 完全等价于

$$g(x)\Big|_{x<t}=0, \qquad g'(x)\Big|_{x<t}=0. \tag{11.35}$$

这里的证明并没有涉及微分方程的具体形式，得到的结论自然是普遍成立的.

最后，我们看到，这个问题的解不仅是自变量 x 的函数，而且还含有参数 t . 这当然也具有普遍性，所以，以后就将把这类问题的解记为 $g(x;t)$.

在此基础上，再举一个略为复杂一点的例子.

例 11.6 求解常微分方程初值问题

$$\frac{d^2g(x;t)}{dx^2}+k^2g(x;t)=\delta(x-t),\quad t>0,\, k>0, \tag{11.36a}$$

$$g(0;t)=0,\quad \left.\frac{dg(x;t)}{dx}\right|_{x=0}=0. \tag{11.36b}$$

解 此方程和 (11.29a) 不同之处在于难以直接积分，故可介绍另一种解法．注意到，当 $x\neq t$ 时，方程的非齐次项为 0 ，所以

$$g(x;t)=\big[A(t)\sin kx+B(t)\cos kx\big]\eta(x-t). \tag{11.37}$$

后面将要证明，这时的 $g(x;t)$ 仍应具有和例 11.5 中相同的连续性质，即在 $x=t$ 点

$$g(x;t)\text{连续},\qquad \frac{dg(x;t)}{dx}\text{不连续},\quad \left.\frac{dg(x;t)}{dx}\right|_{t-0}^{t+0}=1,$$

于是

$$A(t)\sin kt+B(t)\cos kt=0,\qquad A(t)\cos kt-B(t)\sin kt=\frac{1}{k}.$$

解之即得

$$A(t)=\frac{1}{k}\cos kt,\qquad B(t)=-\frac{1}{k}\sin kt.$$

这样，就得到

$$g(x;t)=\frac{1}{k}\sin k(x-t)\eta(x-t). \tag{11.38}$$

现在，补证一下前面用到的一个结论，即例 11.6 和例 11.5 中的 $g(x;t)$ 具有同样的连续性质．为此，考虑一个更为普遍的情形，即证明常微分方程初值问题

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dg(x;t)}{dx}\right]+q(x)g(x;t)=\delta(x-t),\quad t>0; \tag{11.39a}$$

$$g(0;t)=0,\quad \left.\frac{dg(x;t)}{dx}\right|_{x=0}=0 \tag{11.39b}$$

和

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dg_0(x;t)}{dx}\right]=\delta(x-t),\quad t>0; \tag{11.40a}$$

$$g_0(0;t)=0,\quad \left.\frac{dg_0(x;t)}{dx}\right|_{x=0}=0 \tag{11.40b}$$

中的解也一定具有同样的连续性质. 为了保证这两个问题在数学上合理，需要假设函数 $p(x)$ 在区间 $[0,\infty)$ 上连续， $p'(x)$ 和 $q(x)$ 连续或分段连续， $p(x)$ 无零点；而且，根据物理上的实际需要，还假设算符 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)$ 在 $x\to -x$(“时间反演”) 下不变，即

$$p(x)=p(-x),\qquad q(x)=q(-x).$$

首先将方程 (11.40a) 积分，有

$$p(x)\frac{\mathrm{d}g_0(x;t)}{\mathrm{d}x}=\eta(x-t)+\alpha(t),$$

再积分一次，

$$g_0(x;t)=\eta(x-t)\int_t^x\frac{\mathrm{d}\zeta}{p(\zeta)}+\alpha(t)\int_0^x\frac{\mathrm{d}\zeta}{p(\zeta)}+\beta(t).$$

代入初值条件 (11.40b)，可以定出积分常数 $\alpha(t)=0,\ \beta(t)=0$. 所以，最后就得到 (11.39) 的解为

$$g_0(x;t)=\eta(x-t)\int_t^x\frac{\mathrm{d}\zeta}{p(\zeta)}. \tag{11.41}$$

在这里，我们看到， $g_0(x;t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的连续函数，而

$$\frac{\mathrm{d}g_0(x;t)}{\mathrm{d}x}=\frac{\eta(x-t)}{p(x)}$$

在 $x=t$ 点不连续，

$$\left.\frac{\mathrm{d}g_0(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{t-0}^{t+0}=\frac{1}{p(t)}.$$

现在设常微分方程初值问题 (11.39) 的解为

$$g(x;t)=g_0(x;t)+w(x;t), \tag{11.42}$$

代入 (11.39a)，并注意 $g_0(x;t)$ 是 (11.40a) 的解，就得到 $w(x;t)$ 所满足的常微分方程是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}w(x;t)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)w(x;t)=-q(x)g_0(x;t). \tag{11.43}$$

由此可见， $w(x;t)$ 一定是 x 的连续函数，否则，在 $\mathrm{d}w(x;t)/\mathrm{d}x$ 中就会出现 δ 函数，因此，方程 (11.39a) 中就会出现 δ 函数的导数.

这样，将方程 (11.43) 再积分一次，又能得到

$$p(x)\frac{\mathrm{d}w(x;t)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x_1}^{x_2} = -\int_{x_1}^{x_2} q(\zeta)\Big[w(\zeta;t) + g_0(\zeta;t)\Big]\mathrm{d}\zeta,$$

所以 $p(x)\big[\mathrm{d}w(x;t)/\mathrm{d}x\big]$ 也是 x 的连续函数，因而 $\mathrm{d}w(x;t)/\mathrm{d}x$ 也是 x 的连续函数. 这样，就最终证明了 $g(x;t)$ 和 $g_0(x;t)$ 具有相同的连续性质. □

例 11.7 求解常微分方程初值问题 (11.39)，设常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)g(x;t) = 0 \tag{11.44}$$

的两个线性无关解是 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$.

解 在例 11.5 后面的讨论中，我们已经证明了一定有

$$g(x;t) = 0, \qquad x < t;$$

而当 $x > t$ 时，方程 (11.39a) 也还是齐次的，故通解为

$$g(x;t) = c_1(t)y_1(x) + c_2(t)y_2(x). \tag{11.45}$$

根据上面指出的， $g(x;t)$ 应该在 $x = t$ 点连续，而 $\mathrm{d}g(x;t)/\mathrm{d}x$ 在该点不连续，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=t-\varepsilon}^{x=t+\varepsilon} = \frac{1}{p(t)},$$

所以

$$c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) = 0, \quad c_1(t)y_1'(t) + c_2(t)y_2'(t) = \frac{1}{p(t)}.$$

解之即得

$$c_1(t) = -\frac{1}{p(t)}\frac{y_2(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)},$$

$$c_2(t) = \frac{1}{p(t)}\frac{y_1(t)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)},$$

代入 (11.44)，并和 $x < t$ 时的结果结合起来，就可以写出常微分方程初值问题 (11.39) 的解

$$g(x;t) = \frac{1}{p(t)}\frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)}\eta(x-t). \tag{11.46}$$

为了以后的需要，我们现在证明常微分方程初值问题 (11.39) 的解 $g(x;t)$ 的一个重要性质，关于 $g(x;t)$ 的对称性

$$g(x;t) = g(-t;-x). \tag{11.47}$$

证 (11..47) 式当然可以直接由 $g(x;t)$ 的具体表达式 (11.46) 得出，只要注意在 $p(-x)=p(x)$ 和 $q(-x)=q(x)$ 的条件下，方程 (11.44) 的两个线性无关解一定分别是偶函数和奇函数，例如

$$y_1(-x) = y_1(x), \qquad y_2(-x) = -y_2(x).$$

现在，我们介绍另外一种方法，它不涉及到解的具体表达式，而只是直接从微分方程以及初值条件出发来证明.

显然， (11.47) 式在 $x<t$ (因此 $-t<-x$) 时成立，因为两端的函数均为 0 . 所以，下面只需证明等式在 $x>t$ 时也成立.

我们已经知道， $g(x;t)$ 是常微分方程初值问题 (11.39) 的解，现在，再引入 $g(-x;-t')$ ，显然，它是常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-x)}\left[p(-x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}(-x)}\right] + q(-x)g(-x;-t') = \delta(-x+t'), \quad t'>0$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)g(-x;-t') = \delta(x-t'), \quad t'>0 \tag{11.48}$$

的解. 这里不妨假设 $t'>t>0$. 用 $g(-x;-t')$ 和 $g(x;t)$ 分别乘以方程 (11.39a) 和 (11.48) ，相减，就得到

$$\begin{aligned}
&g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] - g(x;t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]\\
&\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\left[g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x} - g(x;t)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]\\
&\quad = g(-x;-t')\delta(x-t) - g(x;t)\delta(x-t').
\end{aligned}$$

在区间 $[0,\infty)$ 上积分，注意到

$$g(x,t)\Big|_{x<t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}g(x,t)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x<t} = 0,$$

和

$$g(-x,-t')\Big|_{-x<-t'}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}g(-x,-t')}{\mathrm{d}x}\Big|_{-x<-t'}=0$$

即

$$g(-x,-t')\Big|_{x>t'}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}g(-x,-t')}{\mathrm{d}x}\Big|_{x>t'}=0,$$

就有

$$\begin{aligned}&g(-t;-t')-g(t';t)\\&\quad=p(x)\left[g(-x;-t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}-g(x;t)\frac{\mathrm{d}g(-x;-t')}{\mathrm{d}x}\right]_{x=0}^{x=\infty}\\&\quad=0.\end{aligned}$$

将这里的 t' 改写成 x， $x>t$，又一次得到 (11.47) 式. 这样就完成了 (11.47) 式的全部证明. □

由 $g(x;t)$ 的对称性，可以得到 $g(x;t)$ 作为 t 的函数所满足的常微分方程初值问题. 因为 $g(-t;-x)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(-t)}\left[p(-t)\frac{\mathrm{d}g(-t;-x)}{\mathrm{d}(-t)}\right]+q(-t)g(-t;-x)=\delta(x-t),\quad x>0,$$

$$g(-t;-x)\big|_{-t<-x}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}g(-t;-x)}{\mathrm{d}(-t)}\Big|_{-t<-x}=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(-t;-x)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(-t;-x)=\delta(x-t),\quad x>0,$$

$$g(-t;-x)\big|_{t>x}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}g(-t;-x)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t>x}=0,$$

再利用对称关系 (11.47)，就得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(x;t)=\delta(x-t),\quad x>0; \tag{11.49a}$$

$$g(x;t)\big|_{t>x}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t>x}=0. \tag{11.49b}$$

我们不准备讨论非齐次初值条件的情形. 比较浅显的理由是，这时完全可以重复上面的求解过程，只不过定出的积分常数不同

而已. 更深层次的原因与研究这类方程的背景有关. 我们之所以对这类非齐次项为 δ 函数的微分方程感兴趣，是因为它就可以提供非齐次项为任意函数且初值条件亦为非齐次时微分方程的解. 例如，由常微分方程初值问题 (11.39) 的解 $g(x;t)$ ，就可以构造出最普遍的常微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y(x)=f(x), \tag{11.50a}$$

$$y(0)=A, \qquad y'(0)=B \tag{11.50b}$$

的解. 为了得到这一结果，可以先将 (11.50a) 和 (11.50b) 中的自变量 x 改写成 t ，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)y(t)=f(t), \tag{11.51a}$$

$$y(0)=A, \qquad y'(0)=B. \tag{11.51b}$$

将方程 (11.49a) 和 (11.51a) 分布乘以 $y(t)$ 和 $g(x;t)$ ，再相减，就有

$$\begin{aligned}
y(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]-g(x;t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t)\left[y(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}-g(x;t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]\\
&=y(t)\delta(x-t)-g(x;t)f(t).
\end{aligned}$$

所以，积分一次，就能得到

$$\begin{aligned}
y(x) &= \int_0^\infty g(x;t)f(t)\mathrm{d}t+p(t)\left[y(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}-g(x;t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]_0^\infty\\
&= \int_0^x g(x;t)f(t)\mathrm{d}t-p(0)\left[A\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}-Bg(x;t)\right]_{t=0}.
\end{aligned} \tag{11.52}$$

这样，如果 $g(x;t)$ 满足的不是齐次初值条件，那么，上面的结果中便不可能去掉 $t=\infty$ 或 $t=x$ 时的项. 由于 $y(t)$ 在 $t=\infty$ 或 $t=x$ 时的数值是未知的，我们就不能达到用已知量 (已知函数 $f(x)$ 与初值 $y(0)$ 和 $y'(0)$) 以及 $g(x;t)$ 表示出 $y(x)$ 的目的.

通过以上的讨论，我们看到，一旦我们求出了常微分方程初值问题 (11.39) 的解 $g(x;t)$ ，就一定可以构造出相应的常微分方程

初值问题 (11.50) 的解 $y(x)$ ，而不论它的非齐次项 $f(x)$ 是何形式或是有何初值 $y(0), y'(0)$. 这样，这种特殊的非齐次常微分方程初值问题 (非齐次项为 δ 函数的常微分方程的齐次初值问题) 的重要性，就不言自明了. 正是由于这个原因，我们就把常微分方程初值问题 (11.39) 的解 $g(x;t)$ 称为相应的常微分方程初值问题 (11.50) 的 Green 函数. Green 函数方法是求解非齐次常微分方程的一种重要方法，也是求解非齐次偏微分方程的重要方法. 在这一章里，我们只讨论常微分方程初值问题的情形. 在数学物理方程部分中还讨论偏微分方程的 Green 函数解法.

11.4 常微分方程边值问题的 Green 函数

在上一节中，讨论了非齐次项为 δ 函数的常微分方程的齐次初值问题，或者说，讨论了常微分方程初值问题的 Green 函数问题. 在这一节中，讨论另一种类型的 Green 函数，即常微分方程边值问题的 Green 函数，它是非齐次项为 δ 函数的常微分方程在齐次边界条件下的解.

也还是讨论几个具体的例子.

例 11.8 求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(x;t)}{\mathrm{d}x^2} = \delta(x-t), \qquad a < t < b, \tag{11.53a}$$

$$g(a;t) = 0, \qquad g(b;t) = 0. \tag{11.53b}$$

解 这个问题和 (11.29) 不同之处在于定解条件，现在要求的是微分方程 (11.53a) 在给定齐次边界条件 (11.53b) 下的解. 我们仍然可以先写出方程的通解，然后根据边界条件定出积分常数.

上一节已经给出过常微分方程 (11.53a) 的通解，即 (11.31) 式，

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) + \alpha(t)x + \beta(t). \tag{11.54}$$

代入边界条件 (11.53b) ，有

$$a\alpha(t) + \beta(t) = 0, \qquad b - t + b\alpha(t) + \beta(t) = 0.$$

解之即得

$$\alpha(t) = -\frac{b-t}{b-a}, \qquad \beta(t) = \frac{a(b-t)}{b-a}.$$

代入 (11.54)，最后就求出了常微分方程边值问题 (11.53) 的解为

$$g(x;t) = (x-t)\eta(x-t) - \frac{b-t}{b-a}(x-a). \tag{11.55}$$

我们看到，和常微分方程初值问题 (11.29) 的解一样，这个问题的解也具有连续性质

$$g(x;t)\text{在 } x=t \text{ 点连续},$$

$$\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\text{在 } x=t \text{ 点不连续}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right|_{t-0}^{t+0} = 1,$$

这是因为，归根结底，这种连续性 ($g(x;t)$ 在 $x=t$ 点连续和 $\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}$ 在 $x=t$ 点不连续) 是由微分方程决定的.

例 11.9 求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(x;t)}{\mathrm{d}x^2} + k^2 g(x;t) = \delta(x-t), \quad a<t<b,\ k>0, \tag{11.56a}$$

$$g(a;t)=0, \qquad g(b;t)=0. \tag{11.56b}$$

解 在上一节的例 11.6 中，我们已经指出，方程 (11.56b) 的通解无法用直接积分的办法求得. 因此，也还不妨利用 δ 函数的性质，

$$\delta(x-t)=0, \qquad x\neq t,$$

来求解这一常微分方程的边值问题. 根据这一性质，当 $a<x<t$ 时，微分方程 (11.56a) 是齐次的，在 $x=a$ 点的齐次边界条件的限制下，它的解是

$$g(x;t) = A(t)\sin k(x-a), \qquad a<x<t.$$

又当 $t<x<b$ 时，微分方程 (11.56a) 也是齐次的，在 $x=b$ 点的齐次边界条件的限制下，它的解是

$$g(x;t) = B(t)\sin k(b-x), \qquad t<x<b.$$

利用 $g(x;t)$ 在 $x=t$ 点的连续性质，可以得到

$$B(t)\sin k(b-t) - A(t)\sin k(t-a) = 0,$$
$$B(t)\cos k(b-t) + A(t)\cos k(t-a) = -\frac{1}{k}.$$

这样就可以求得

$$A(t) = -\frac{1}{k}\frac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)}, \qquad B(t) = -\frac{1}{k}\frac{\sin k(t-a)}{\sin k(b-a)}.$$

最后，就得到 Green 函数

$$g(x;t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{k}\dfrac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)}\sin k(x-a), & a<x<t \\ -\dfrac{1}{k}\dfrac{\sin k(t-a)}{\sin k(b-a)}\sin k(b-x), & t<x<b \end{cases}$$
$$= -\frac{1}{k}\frac{\sin k(b-t)}{\sin k(b-a)}\sin k(x-a) + \frac{\sin k(x-t)}{k}\eta(x-t). \quad (11.57)$$

由此还可看出，当 $k(b-a)=n\pi\neq 0$ 时，此题无解.

例 11.10 在和例 11.7 同样的已知条件下，求解常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\right] + q(x)g(x;t) = \delta(x-t), \quad a<t<b, \quad (11.58a)$$

$$g(a;t)=0, \qquad g(b;t)=0. \quad (11.58b)$$

解 本题的解法和例 11.7 也非常相似，也是先在 $x\neq t$ 的两个区间中写出齐次方程 (11.58a) 在各自的齐次边界条件下的解，然后利用在 $x=t$ 点的连续性要求定出待定系数.

首先，分别在在区间 $a<x<t$ 和 $t<x<b$ 中，写出齐次方程 (11.58a) 在齐次边界条件 $g(a;t)=0$ 和 $g(b;t)=0$ 下的解，

$$g(x;t) = \begin{cases} A(t)\big[y_2(a)y_1(x) - y_1(a)y_2(x)\big], & a<x<t, \\ B(t)\big[y_2(b)y_1(x) - y_1(b)y_2(x)\big], & t<x<b. \end{cases}$$

利用 $g(x;t)$ 在 $x=t$ 点连续，而 $\dfrac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}$ 在该点不连续，

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=t-\varepsilon}^{x=t+\varepsilon} = \frac{1}{p(t)},$$

可以得到

$$B(t)\left[y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)\right]-A(t)\left[y_2(a)y_1(t)-y_1(a)y_2(t)\right] = 0,$$

$$B(t)\left[y_2(b)y_1'(t)-y_1(b)y_2'(t)\right]-A(t)\left[y_2(a)y_1'(t)-y_1(a)y_2'(t)\right] = \frac{1}{p(t)}.$$

由此可以求出

$$A(t) = -\frac{1}{p(t)}\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{y_1(b)y_2(a)-y_1(a)y_2(b)}\frac{1}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)},$$

$$B(t) = -\frac{1}{p(t)}\frac{y_2(a)y_1(t)-y_1(a)y_2(t)}{y_1(b)y_2(a)-y_1(a)y_2(b)}\frac{1}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)},$$

所以，最后就得到，在区间 $a<x<t$ 中，

$$g(x;t) = -\frac{1}{p(t)}\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{y_1(b)y_2(a)-y_1(a)y_2(b)}\frac{y_2(a)y_1(x)-y_1(a)y_2(x)}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}, \tag{11.59}$$

在区间 $t<x<b$ 中，

$$g(x;t) = -\frac{1}{p(t)}\frac{y_2(a)y_1(t)-y_1(a)y_2(t)}{y_1(b)y_2(a)-y_1(a)y_2(b)}\frac{y_2(b)y_1(x)-y_1(b)y_2(x)}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)}, \tag{11.60}$$

或者，合并写成

$$\begin{aligned} g(x;t) = &-\frac{1}{p(t)}\frac{y_2(b)y_1(t)-y_1(b)y_2(t)}{y_1(b)y_2(a)-y_1(a)y_2(b)}\frac{y_2(a)y_1(x)-y_1(a)y_2(x)}{y_1(t)y_2'(t)-y_1'(t)y_2(t)} \\ &+\frac{1}{p(t)}\frac{y_1(t)y_2(x)-y_2(t)y_1(x)}{y_1(t)y_2'(t)-y_2(t)y_1'(t)}\eta(x-t). \end{aligned} \tag{11.61}$$

和上一节一样，我们现在又面临三个命题．第一，证明由常微分方程边值问题 (11.58) 所定义的 Green 函数 $g(x;t)$ 和由所定义的 Green 函数 $g_0(x;t)$ 具有同样的连续性质；第二，关于 Green 函数 $g(x;t)$ 的对称性；第三，如何能用 $g(x;t)$ 构造出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y(x)=f(x), \quad a<t<b, \tag{11.62a}$$

$$y(a)=A, \qquad y(b)=B \tag{11.62b}$$

的解．对于第一个命题，证明方法和上一节基本相同，这里不再重复．不同的只是现在 $g_0(x;t)$ 的表达式中多了一项

$$g_0(x;t)=\alpha(t)\int_a^x\frac{\mathrm{d}\zeta}{p(\zeta)}+\eta(x-t)\int_t^x\frac{\mathrm{d}\zeta}{p(\zeta)}, \tag{11.63}$$

其中 $\alpha(t)=-\int_t^b \frac{\mathrm{d}\zeta}{p(\zeta)}\bigg/\int_a^b \frac{\mathrm{d}\zeta}{p(\zeta)}$.

对于第二个命题，要证明的 Green 函数 $g(x;t)$ 的对称性是

$$g(x;t)=g(t;x). \tag{11.64}$$

证明的方法[①] 仍然是再引入一个 Green 函数 $g(x;t')$ ，它是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)g(x;t')=\delta(x-t'),\ a<t'<b, \tag{11.65a}$$

$$g(a;t')=0, \qquad g(b;t')=0 \tag{11.65b}$$

的解. 用 $g(x;t')$ 和 $g(x;t)$ 分别乘以 (11.58a) 和 (11.65a) ，相减，再在区间 $[a,b]$ 上积分，即得

$$g(t;t')-g(t';t)=p(x)\left[g(x;t')\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}x}-g(x;t)\frac{\mathrm{d}g(x;t')}{\mathrm{d}x}\right]_a^b.$$

代入边界条件 (11.58b) 和 (11.65b) ，立即得到上式右方为 0 ，所以，

$$g(t;t')=g(t';t).$$

将 t' 换成 x ，这正好就是 (11.64) 式.

对于第三个命题，处理方法也和上一节基本上相同. 首先，将常微分方程边值问题 (11.62) 的自变量改写成 t ，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)y(t)=f(t), \tag{11.66a}$$

$$y(a)=A, \qquad y(b)=B. \tag{11.66b}$$

然后，再利用 $g(x;t)$ 的对称性写出 $g(x;t)$ 作为 t 的函数所满足的常微分方程边值问题，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[p(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right]+q(t)g(x;t)=\delta(x-t), \quad a<x<b, \tag{11.67a}$$

$$g(x;a)=0, \qquad g(x;b)=0. \tag{11.67b}$$

用 $g(x;t)$ 和 $f(t)$ 分别乘以 (11.66a) 和 (11.67a) ，相减，再在区间 $[a,b]$

---

① 当然，从 $g(x;t)$ 的具体表达式 (11.61) 就可以直接看出 (11.64) 式成立.

上 t 积分，整理，即得

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_a^b g(x;t)f(t)\mathrm{d}t + p(t)\left[y(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t} - g(x;t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]_a^b \\ &= \int_a^b g(x;t)f(t)\mathrm{d}t + Bp(b)\left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=b} \\ &\quad -Ap(a)\left.\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=a}. \end{aligned} \tag{11.68}$$

在最后一步，利用了边界条件 (11.66b) 和 (11.67b)．

再举一个无界区间的例子.

例 11.11 用 Green 函数方法求解无界区间内的常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2} - k^2y(x) = f(x), \quad k > 0, \tag{11.69a}$$

$$y(x)\big|_{x\to\pm\infty} \to 0. \tag{11.69b}$$

解 为此，先要求出此问题的 Green 函数，它是

$$\frac{\mathrm{d}^2g(x;t)}{\mathrm{d}x^2} - k^2g(x;t) = \delta(x-t), \quad k > 0, \tag{11.70a}$$

$$g(x;t)\big|_{x\to\pm\infty} \to 0 \tag{11.70b}$$

的解. 不难求出，

$$g(x;t) = -\frac{1}{2k}\mathrm{e}^{-k|x-t|}. \tag{11.71}$$

再模仿有界区间的做法，可以求得 $y(x)$ 和 $g(x;t)$ 之间的关系，即

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x;t)f(t)\mathrm{d}t + \left[y(t)\frac{\mathrm{d}g(x;t)}{\mathrm{d}t} - g(x;t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{-\infty}^{\infty}. \tag{11.72}$$

代入 (11.71) 式以及边界条件 (11.69b) 和 (11.70b)，就得到

$$y(x) = -\frac{1}{2k}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-k|x-t|}f(t)\mathrm{d}t. \tag{11.73}$$

最后，需要说明，我们在本节中只讨论了一种类型的边界条件，即函数在端点的数值已知 (齐次或非齐次)．也还可以是其他类型的边界条件，这里暂时不作讨论.

第二部分　数学物理方程

第十二章　数学物理方程和定解条件

数学物理方程，通常指从物理学及其他各门自然科学、技术科学中所产生的偏微分方程，有时也包括与此有关的积分方程、微分积分方程和常微分方程. 例如，

- 静电势和引力势满足的 Laplace 方程或 Poisson 方程
- 波的传播所满足的波动方程
- 热传导问题和扩散问题中的热传导方程
- 连续介质力学中的 Navier–Stockes 方程组和 Euler 方程组
- 描写电磁场运动变化的 Maxwell 方程组
- 作为微观物质运动基本规律的Schrödinger方程和Dirac 方程
- 弹性力学中的 Saint-Venant 方程组

等等. 这些方程 (组) 多是二阶线性偏微分方程 (组). 所以，在本课程中，将集中讨论几种典型的二阶线性偏微分方程.

对于数学物理方程，需要讨论各种典型问题的解，通过和实验或观测结果比较，来检验相关的物理理论，从而加深人们对于有关自然规律的认识，甚至预言新的现象. 在工程设计中，它也能提供必要的数据，使得工程建设有更加坚实可靠的基础. 在本课程中，将主要介绍分离变量法和积分解法，以及在求解过程中常用到

的特殊函数. 此外，还将简单介绍一种在理论上和实用上都十分重要的方法，即变分法.

作为本书的“数学物理方程”部分的开始，在这一章里，我们先从一些物理问题中导出一些典型的二阶线性偏微分方程. 以后再讨论这些方程的一般性质及解法.

12.1 弦的横振动方程

有一个完全柔软的均匀弦，沿水平直线绷紧，而后以某种方法激发，使弦在同一个平面上作小振动. 列出弦的横振动方程.

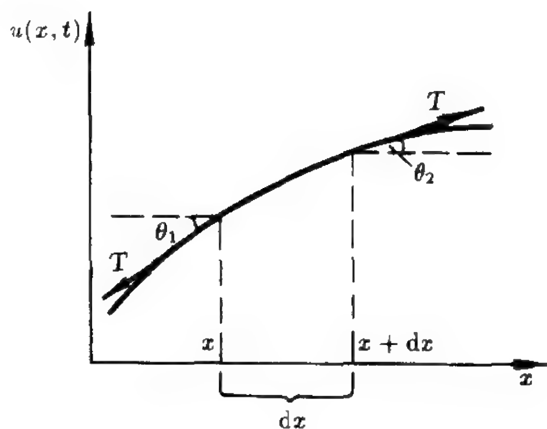


图 12.1　弦的横振动

$$\tan\theta_1 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x,\quad \tan\theta_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\mathrm{d}x}$$

取弦的平衡位置为 x 轴，且令一个端点的坐标为 $x=0$，另一个端点为与 $x=l$(如图 12.1 所示). 设 $u(x,t)$ 是坐标为 x 的弦上一点在 t 时刻的 (横向) 位移. 像在力学问题中常用的那样，在弦上隔离出长为 $\mathrm{d}x$ 的一小段. 这一段弦长是如此之小，以至于可以把它看成是质点.

这一小段弦在两个端点 x 及 $x+\mathrm{d}x$ 处受到张力的作用. 因此有

$$(T\sin\theta)_{x+\mathrm{d}x} - (T\sin\theta)_x, = \mathrm{d}m\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{12.1}$$

$$(T\cos\theta)_{x+\mathrm{d}x} - (T\cos\theta)_x = 0. \tag{12.2}$$

这里用到了弦是完全柔软的这个条件. 因为弦是完全柔软的，故只受到切向应力 —— 张力 T 的作用，而没有法向应力. 同时，这里还略去了重力的作用.

在小振动的条件下，$x+\mathrm{d}x$ 与 x 两点间任一时刻横向位移之

差 $u(x+\mathrm{d}x,t)-u(x,t)$ ，与 $\mathrm{d}x$ 相比是一个小量，即 $|\partial u/\partial x|\ll 1$. 因此

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \left(略去了\frac{\partial u}{\partial x}的三级项\right),$$

$$\cos\theta \approx 1 \qquad \left(略去了\frac{\partial u}{\partial x}的二级项\right).$$

这样，根据方程 (12.1) ，就有

$$(T)_{x+\mathrm{d}x}-(T)_x=0 \qquad 即 \qquad (T)_{x+\mathrm{d}x}=(T)_x, \tag{12.3}$$

表示弦中各点的张力相等. 于是,

$$\rho\mathrm{d}x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\mathrm{d}x}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right]=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x,$$

即

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \tag{12.4}$$

其中 ρ 是弦的线密度 (单位长度的质量) . 定义

$$a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \tag{12.5}$$

则方程可以写成

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0.} \tag{12.6}$$

以后将会看到， a 就是弦的振动传播速度.

在小振动的条件下，还可以证明张力 T 与 t 无关. 这是因为这一段弦的伸长

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s-\mathrm{d}x &= \sqrt{\mathrm{d}u^2+\mathrm{d}x^2}-\mathrm{d}x\\ &= \left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}-1\right]\mathrm{d}x = O\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right),\end{aligned}$$

所以，在准确到 $\partial u/\partial x$ 的一级项 (即小振动近似) 的条件下，弦的总长度不随时间变化. 因此，按照 Hooke 定律，可以知道， T 也不随时间变化. 前面又已经证明过， T 也不随 x 变化，所以 T 是一个常数.

如果弦在横向 (即位移 u 的正向) 上还受到外力的作用，设单位长度所受的外力为 f，则仿照前面的推导，有

$$\rho \mathrm{d}x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathrm{d}x + f \mathrm{d}x.$$

因此，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{f}{\rho}, \tag{12.7}$$

其中的非齐次项 f/ρ 是单位质量所受的外力.

12.2 杆的纵振动方程

对于弹性杆的纵振动方程，可以类似地处理.

考虑一均匀细杆，沿杆长方向作小振动. 假设在垂直杆长方向的任一截面上各点的振动情况 (即位移) 完全相同.

如图 12.2 所示，取杆长方向为 x 轴方向，垂直于杆长方向的各截面均用它的平衡位置 x 标记. 在任一时刻 t，此截面相对于平衡位置的位移为 $u(x,t)$. 在杆中隔离出一小段 $(x, x+\mathrm{d}x)$. 通过截面 x，这一小段杆受到弹性力 $P(x,t)S$ 的作用 ($P(x,t)$ 为单位面积所受的弹性力，即应力，规定沿 x 方向为正)，通过截面 $x+\mathrm{d}x$ 受到弹性力 $P(x+\mathrm{d}x,t)S$ 的作用. 因此，对于这一小段应用 Newton 第二定律，就得到

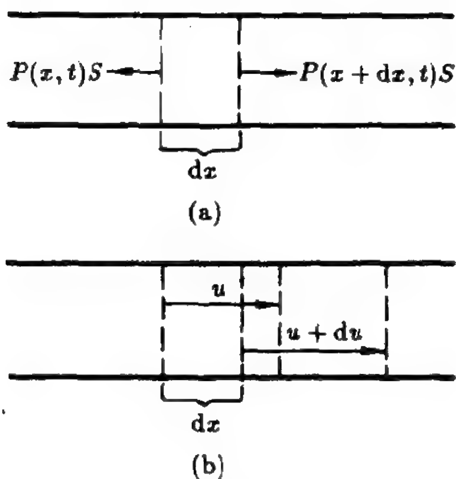


图 12.2　杆的纵振动　应力与应变

$$\mathrm{d}m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = [P(x+\mathrm{d}x,t) - P(x,t)]\, S.$$

若杆的密度为 ρ，则 $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}x \cdot S$，

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial P}{\partial x}. \tag{12.8}$$

如果略去垂直杆长方向的形变，根据 Hooke 定律，应力 P 与应变 $\partial u/\partial x$ 成正比，

$$P = E\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{12.9}$$

比例系数 E 称为杆的 Young 模量，它是一个物质常数. 这样，就得到了杆的纵振动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,} \tag{12.10}$$

其中

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{12.11}$$

这里，我们看到，杆的纵振动与弦的横振动机理并不完全相同，但它们满足的偏微分方程的形式却完全一样. 这一类方程可以统称为波动方程. 更一般地，在三维空间中的波动方程是

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0,} \tag{12.12}$$

其中

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{12.13}$$

称为 Laplace 算符，

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla \quad 即 \quad \nabla^2 u = \nabla\cdot(\nabla u). \tag{12.14}$$

12.3 热传导方程

推导热传导方程所用的数学方法和上面的完全相同. 不同之处在于具体的物理规律不同. 这里用到的是热学方面的两个基本规律，即能量守恒定律和热传导的 Fourier 定律. 前者大家都很熟悉，这里再扼要介绍一下后者.

设有一块连续介质. 取定一定坐标系，并用 $u(x,y,z,t)$ 表示介质内空间坐标为 (x,y,z) 的一点在 t 时刻的温度. 若沿 x 方向有一定的温度差. 直接的生活经验告诉我们，在 x 方向也就一定有热

量的传递. 从宏观上看，实验表明，单位时间内通过垂直 x 方向的单位面积的热量 q 与温度的空间变化律成正比，即

$$\boxed{q = -k\frac{\partial u}{\partial x},} \tag{12.15}$$

q 称为热流密度，k 称为导热率. k 与介质的质料有关，而且，严格说来，与温度 u 也有关系. 但如果温度的变化范围不大，则可以将 k 看成与 u 无关. 上面公式中的负号表示热流的方向和温度变化的方向正好相反，即热量由高温流向低温.

如果要研究三维各向同性介质中的热传导，在介质中三个方向上都存在温度差，则有

$$q_x = -k\frac{\partial u}{\partial x}, \quad q_y = -k\frac{\partial u}{\partial y}, \quad q_z = -k\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{12.16}$$

或

$$\boxed{\boldsymbol{q} = -k\nabla u,} \tag{12.16$'$}$$

即热流密度矢量 $\boldsymbol{q}$ 与温度梯度 ∇u 成正比.

现在我们就根据Fourier 定律和能量守恒定律来推导均匀各向同性介质中的热传导方程.

设想在介质内部隔离出一个平行六面体 (见图 12.3)，六个面都和坐标面重合. 先看 Δt 时间内沿 x 方向流入六面体的热量，

$$\begin{aligned}\left[-(q_x)_x + (q_x)_{x+\mathrm{d}x}\right]\Delta y\Delta z\Delta t &= \left[\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\mathrm{d}x} - \left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right]\Delta y\Delta z\Delta t \\ &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t.\end{aligned}$$

同理，在 Δt 时间内沿 y 方向流入六面体的热量为

$$\left[-(q_y)_y + (q_y)_{y+\mathrm{d}y}\right]\Delta x\Delta z\Delta t = k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t,$$

在 Δt 时间内沿 z 方向流入六面体的热量为

$$\left[-(q_z)_z + (q_z)_{z+\mathrm{d}z}\right]\Delta x\Delta y\Delta t = k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t.$$

如果六面体内没有其他热量来源或消耗，则根据能量守恒定律，净流入的热量应该等于介质在此时间内温度升高所需要的热量，

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t=\rho\Delta x\Delta y\Delta z\cdot c\cdot\Delta u.$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{k}{\rho c}\nabla^2 u=0, \tag{12.17}$$

其中 ρ 是介质的密度， c 是比热容．或者令

$$\kappa=\frac{k}{\rho c}, \tag{12.18}$$

则有

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\nabla^2 u=0,} \tag{12.19}$$

其中 κ 称为扩散率，或温度传导率．

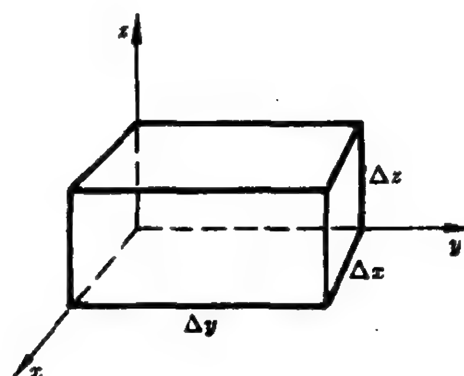


图 12.3　热传导方程
位于 (x,y,z) 点的小六面体

如果在介质内有热量产生 (例如，有化学反应发生，或通有电流，等等)，单位时间内在单位体积介质中产生的热量为 $F(x,y,z,t)$，则应有

$$k\nabla^2 u\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t+F(x,y,z,t)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t=\rho\Delta x\Delta y\Delta z\cdot c\cdot\Delta u,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\nabla^2 u=\frac{1}{\rho c}F(x,y,z,t)=f(x,y,z,t). \tag{12.20}$$

如果介质不均匀，则导热率 k 与坐标 (x,y,z) 有关．这时，热传导方程就应该变为

$$\boxed{\rho c\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot(k\nabla u)=F(x,y,z,t).} \tag{12.21}$$

我们还可以把热传导方程改写成另一种形式．令 $j=\rho cu$，称为热流 (强度)，则上式可以写成

$$\boxed{\frac{\partial j}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{q}=F(x,y,z,t).} \tag{12.22}$$

这个方程常称为连续性方程.

最后，如果讨论的是各向异性介质，则 Fourier 定律应改写成

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{K} \cdot \nabla u. \tag{12.23}$$

这里的 $\boldsymbol{K}$ 是一个 3×3 矩阵，它和 ∇u 按矩阵乘法的规则相乘. 相应地，热传导方程变为

$$\boxed{\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\boldsymbol{K} \cdot \nabla u) = \boldsymbol{F}(x, y, z, t).} \tag{12.24}$$

从分子运动的角度看，温度的高低是分子热运动激烈程度的反映. 分子热运动的不平衡，通过碰撞交换能量，在宏观上就表现为热量的传递. 可以设想，如果介质内存在别种不均匀状况，例如物质浓度的不均匀，通过分子的运动也会发生物质的交换，这在宏观上就表现为分子的扩散. 这种在微观机理上的相似性，就决定了扩散方程和热传导方程有相同的形式，

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = f(x, y, z, t),} \tag{12.25}$$

其中的 $u(x, y, z, t)$ 代表分子浓度， D 是扩散率， $f(x, y, z, t)$ 则是单位时间内在单位体积中该种分子的产率.

12.4 稳定问题

在一定条件下，物体的温度达到稳定、即不随时间变化时，则温度分布满足 Poisson 方程

$$\boxed{\nabla^2 u = -\frac{f}{\kappa}.} \tag{12.26}$$

特别是，如果 $f = 0$ ，则有 Laplace 方程，

$$\boxed{\nabla^2 u = 0.} \tag{12.27}$$

这两种方程描写的是达到稳恒的物理状态.

同样，如果波动方程中 u 也不随时间变化，例如静电场的电势 $u(x, y, z)$ ，也满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{12.28}$$

其中 ρ 是电荷密度， ε_0 称为真空电容率 (真空介电常数)．如果电荷密度 $\rho \equiv 0$，则静电场的电势满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 u(x,y,z) = 0.$$

如果波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u = 0$$

中， $u(x,y,z,t)$ 随时间周期地变化，频率为 ω，

$$u(x,y,z,t) = v(x,y,z)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{12.29}$$

则 $v(x,y,z)$ 满足 Helmholtz 方程

$$\boxed{\nabla^2 v(x,y,z) + k^2 v(x,y,z) = 0,} \tag{12.30}$$

其中 $k = \omega/a$ 称为波数．

以上介绍了几种基本的偏微分方程．从物理上看，有反映波动过程的波动方程，有反映扩散过程的热传导方程，也有反映稳恒状态的 Poisson 方程和 Laplace 方程．从数学上看，这也正好相应地分为三类： 波动方程，在数学上属于双曲型方程；热传导方程，属于抛物型方程；而 Poisson 方程和 Laplace 方程，则属于椭圆型方程．这三类方程的求解问题，将是本课程的中心任务．

最后，还需要指出，对于一个实际问题来说，确定最方便于描写该问题的物理量，建立起它所满足的微分方程，最根本的是要对该物理问题进行深入的分析，抓住它的主要因素，作出合理的近似．应该说，这并不纯粹是一个数学推导的问题．因此，在这个意义上说，本课程只能就方程的推导举出几个经典性的例子，只能起到一个示范和引导的作用．实际上，以后的各门理论物理课程，也都要分别建立和求解各自的偏微分方程或方程组．

12.5 边界条件与初始条件

上面几节建立的偏微分方程，并不能唯一地、确定地描写某一

个具体的物理过程，正如只根据 Newton 第二定律列出的动力学方程并不能唯一地确定质点的运动一样．要完全确定一个质点的运动，除了微分方程之外，还必须有初始条件．否则二阶常微分方程的通解中含有两个任意常数，因而解不是唯一确定的．

对于偏微分方程来说，情况还要更复杂一些．如果我们能求得二阶偏微分方程的通解的话，它应含有两个任意函数．这是容易理解的．例如，偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=0$$

的通解就是

$$u(x,y)=c_1(y)+xc_2(y),$$

其中 $c_1(y)$ 和 $c_2(y)$ 是 y 的任意函数．

仅有方程，而解并不唯一．从物理上来看，也是自然的，因为在推导方程时，只考虑了介质的内部，并没有考虑介质通过表面和外界的相互作用．因此，严格说来，方程只适用于介质内部．而且，如果问题与时间有关的话，在推导方程时也并没有考虑介质的历史状况．如果我们适当选取计时的零点，那么，就可以说，方程也只适用于 $t>0$ 的任一时刻．只有方程，还不足以唯一地决定介质中发生的具体物理过程．为了完全描写一个具有确定解的物理问题，在数学上就是要构成一个定解问题，这除了微分方程之外，还必须有边界条件和初始条件．

先讨论初始条件．初始条件应该完全描写初始时刻 ($t=0$ 时) 介质内部及边界上任意一点的状况．对于波动方程来说，就是应该给出初始时刻的位移和速度 (如果是力学问题的话)，

$$\boxed{u\Big|_{t=0}=\phi(x,y,z),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x,y,z),\qquad (x,y,z)\in\overline{V}.}\tag{12.31}$$

对于热传导方程，由于方程中只出现未知函数 $u(x,y,z,t)$ 对 t 的一阶偏微商，所以只需给出初始时刻的温度

$$\boxed{u\Big|_{t=0}=\phi(x,y,z),\qquad (x,y,z)\in\overline{V}.}\tag{12.32}$$

边界条件的形式比较多样化，要由具体问题中描述的具体状况决定．总的原则是：边界条件应该完全描写边界上各点在任一时刻 ($t \geq 0$) 的状况．首先以弦的横振动为例．如果弦的“两端固定”，那么边界条件就是

$$\boxed{u\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=l} = 0, \qquad t \geq 0.} \tag{12.33}$$

对于杆的纵振动，如果 $x=0$ 端固定，则 $x=0$ 端的边界条件仍是

$$u\Big|_{x=0} = 0. \tag{12.34}$$

若另一端 ($x=l$) 受 x 方向上的外力作用，单位面积上的力是 $F(t)$ (见图 12.4)，那么这一端的边界条件并不能直接看出．我们应当模仿推导方程的办法，在端点 $x=l$ 处截取一小块介质，长度为 ε．根据 Newton 第二定律可知，这一小段介质所受的合力 (外力加内应力)，应该等于介质的质量乘以介质中某一点的加速度，

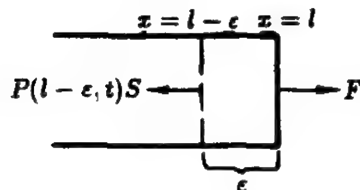


图 12.4　端点所受外力与应力平衡

$$\rho\varepsilon S\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l-\alpha\varepsilon} = F(t)S - P(l-\varepsilon, t)S,$$

其中 $0 \leq \alpha \leq 1$．令 $\varepsilon \to 0$，并代入 (12.9) 式，则有

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = \frac{1}{E}F(t).} \tag{12.35}$$

如果外力为 0，即 $x=l$ 端是自由的，则

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0.} \tag{12.36}$$

如果外力 $F(t)$ 不是一个确定的已知函数，而是由弹簧提供的弹性力，则

$$F(t) = -k\big[u(l,t) - u_0\big],$$

k 是弹簧的劲度系数，于是，

$$\boxed{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{k}{E}u\right]_{x=l} = \frac{k}{E}u_0.} \tag{12.37}$$

对于热传导问题，常见的边界条件有下列几种类型：

第一种类型是边界上各点的温度已知，

$$\boxed{u\big|_{\Sigma} = \phi(\Sigma, t).} \tag{12.38}$$

这里我们用 Σ 表示边界上的变点，同时也表示这些点的坐标.

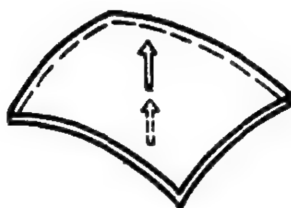


图 12.5 边界面处的热流连续

第二种类型是单位时间内、通过单位面积的边界面流入的热量已知. 这时我们可在边界内侧截取一小薄层介质，它的一个底在介质的表面，另一个底在介质内部. 柱体的两底面积相等，厚度趋于 0 (见图 12.5) . 根据能量守恒定律可知，介质从两个底面及侧面流入的热量之和，应该等于这一块介质温度升高所需要的热量. 但是，当介质的厚度趋于 0 时，通过侧面流入的热量应该趋于 0 (因为侧面积趋于 0)，介质的热容量趋于 0 (因为介质的质量趋于 0)，因此，通过介质表面流入的热量，应当全部通过薄层的另一底面流向介质内部. 于是，可以写出边界条件

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = \frac{1}{k}\psi(\Sigma, t),} \tag{12.39}$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial n}$ 称为法向微商，它是梯度矢量在外法线方向上的投影，

$$\frac{\partial}{\partial n} = \boldsymbol{n}\cdot\nabla \qquad 即 \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \boldsymbol{n}\cdot(\nabla u).$$

如果边界绝热，则 $\psi \equiv 0$，

$$\boxed{\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0.} \tag{12.40}$$

第三种类型则是介质通过边界按 Newton 冷却定律散热： 单位时间通过单位面积表面和外界交换的热量和介质表面温度 $u|_{\Sigma}$ 与外界温度 u_0 之差成正比. 设比例系数为 H，则边界条件就是

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = H\left(u\big|_{\Sigma} - u_0\right), \tag{12.41}$$

或者写成

$$\boxed{\left[\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right]_{\Sigma}=hu_0.}$$

在上面的讨论中出现的边界条件有一个共同的特点：就未知函数而言，它们都是线性的．再进一步细分，还可以分为三类：

第一类边界条件：给出边界上各点的函数值；

第二类边界条件：给出边界上各点函数的法向微商值；

第三类边界条件：给出边界上各点的函数值与法向微商值之间的线性关系．

当然，就实际问题而言，在整个边界面上，各点的边界条件并不一定能有统一的表达式，也不见得同属于一种类型．其实上面讨论的弹性杆的边界条件，就是如此．

以上讨论的都是有界空间，都存在确定的几何边界．如果要讨论无界空间的问题，这时的边界条件当然就应当给出未知函数在无穷远处的极限行为，例如函数乃至它的导数在无穷远处有界．

在有界空间的问题中，有时也要出现有界条件．例如，当我们采用极坐标系、柱坐标系或球坐标系时，偏微商 $\partial u/\partial r$ 在坐标原点失去意义．因而需要针对具体情况，在坐标原点补充上有界条件或其他条件．以后在有关章节中再作讨论．

12.6 内部界面上的连接条件

在上一节说到，微分方程只在空间区域的内部成立．这也还是有条件的．如果在区域的内部，出现结构上的跃变，那么，在这些跃变点 (线、面) 上，微分方程也不能成立．在这些点 (线、面) 上，还要补充上相应的条件．通常称为连接条件．

最简单的例子是由两种或更多种质料组成的介质，例如由两种不同材料的弹性细绳连接而成的弦．从波动方程的推导过程可以看出，由于质料不同，两段弦上的振动传播速度不同，微分方程当然也就不同：

对于第一段弦 $$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = 0; \tag{12.42a}$$

对于第二段弦 $$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{12.42b}$$

而且，在连接点根本无法写出微分方程，而应该代之以连接条件.连接条件当然与连接的方式和状况有关. 作为最理想的近似，如果这种连接 (即跃变) 只严格地发生于一点，而且连接得非常牢固光滑，那么，在连接点 (设坐标为 x_0) 的连接条件就是

$$u_1(x,t)\Big|_{x=x_0-0} = u_2(x,t)\Big|_{x=x_0+0} \quad \text{(即位移相等)}, \tag{12.43a}$$

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0-0} = \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0+0} \quad \text{(即张力相等)}, \tag{12.43b}$$

这里的 $u(x,t)\big|_{x=x_0-0}$ 和 $u(x,t)\big|_{x=x_0+0}$ 分别表示函数 $u(x,t)$ 在 $x=x_0$ 点的左、右极限，

$$u(x,t)\Big|_{x=x_0\pm0} = \lim_{\varepsilon\to+0} u(x_0\pm\varepsilon,t).$$

即使是一种材料构成的介质，也可能出现连接条件. 仍以弦的横振动为例. 如果在均匀弦的某一点上受到有限大小的力 (“集中外力”)$f(t)$ 的作用，方向沿 u 轴的负向，那么，在这一点 (仍记为 $x=x_0$) 方程也不成立，也应该代之以连接条件

$$u(x,t)\Big|_{x=x_0-0} = u(x,t)\Big|_{x=x_0+0}, \tag{12.44a}$$

$$T\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0+0} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0-0}\right] = f(t), \tag{12.44b}$$

它们分别表示位移相等和张力与外力平衡.

更进一步，如果这个集中外力是由一个重物 M 提供的，而且，这个重物和弦同步地发生运动，重物和弦之间没有相对位移，这时，连接条件又应该变为

$$u(x,t)\Big|_{x=x_0-0} = u(x,t)\Big|_{x=x_0+0}, \tag{12.45a}$$

$$T\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0+0} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=x_0-0}\right] = Mg + M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_{x=x_0}. \tag{12.45b}$$

这里，$\partial^2 u/\partial t^2$ 在 $x = x_0$ 点的值并未注明是左极限还是右极限，这是因为，显然，$\partial^2 u/\partial t^2$ 在 $x = x_0$ 点应该是连续的.

在静电场的问题中，更常见到连接条件. 例如，在两种电介质的界面 Σ' 上，电势连续 (或场强的切向分量连续) 和电位移矢量的法向分量连续，

$$u_1\Big|_{\Sigma'} = u_2\Big|_{\Sigma'}, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{\Sigma'} = \varepsilon_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_{\Sigma'}. \tag{12.46}$$

这里的 u_1 和 u_2 分别表示电介质 1 和电介质 2 中的电势，ε_1 和 ε_2 分别是这两种电介质的电容率. 关于这两个条件的推导，见电磁学或电动力学教材，这里从略.

12.7 定解问题的适定性

通过以上几节的讨论，我们看到，在处理某些实际的物理问题时，可能会归结为在一定定解条件 (边界条件和初始条件) 下求解一定的偏微分方程. 偏微分方程加上相应的定解条件就构成一个定解问题. 很自然地，我们要问：在什么条件下，定解问题的解是存在的，唯一的，并且是稳定的？

所谓解的存在性，就是说，定解问题有解.

显然，如果定解条件过多，互相矛盾，则定解问题无解. 例如，如果一方面要求弦的两端固定，另一方面又要求它的端点受到确定的外力作用. 这两个要求就是互相矛盾的.

所谓解的唯一性，就是说，定解问题的解是唯一的.

显然，如果定解条件不足，定解问题的解就不是唯一的.

所以，要求定解问题的解存在并且唯一，就是要求定解问题抽象得“合理”，定解条件要不多不少，恰到好处.

所谓解的稳定性，就是说，如果定解问题中的已知条件 (例如方程或定解条件中的已知函数) 有微小改变时，相应地，解是否也只有微小的改变.

从上面的方程推导及定解条件的讨论，可以看出，在构造定

解问题时，不可避免地总要作简化和近似．显然，只有在稳定性所许可的限度内所作的简化和近似才是有意义的．

所谓定解问题解的存在性、唯一性和稳定性，统称适定性．我们不从数学上、而是从物理上回答这个问题：只要我们对实际物理问题的抽象是合理的，初始条件的确是完全地、确定地描写了初始时刻 (通常取为 $t=0$) 体系内部以及边界面上任意一点的状况，边界条件的确是完全而且确定地描写了边界面上任意一点在 $t\geq 0$ 的状况，那么，这样构成的定解问题就一定是适定的，也就是说，解一定是存在的、唯一的，并且是稳定的．

与此相关的问题是，按照上面对于初始条件和边界条件的要求，在这些条件中出现的已知函数必须满足一定的连续性要求．这里不妨以热传导问题为例．如果边界条件是

$$u(x,y,z,t)\Big|_{\Sigma}=f(\Sigma,t), \tag{12.47}$$

而初始条件是

$$u(x,y,z,t)\Big|_{t=0}=\phi(x,y,z), \tag{12.48}$$

那么，就应当有

$$f(\Sigma,t)\Big|_{t=0}=\phi(x,y,z)\Big|_{\Sigma}. \tag{12.49}$$

有些定解问题不一定满足这个要求．可以设想，把初始温度分布为 $\phi(x,y,z)$ 的一块介质放到一个恒温环境 (例如温度恒为 u_0) 中，从而使介质表面的温度也迅速达到恒温 u_0，如果要求的精度许可，介质表面冷却或升温过程的影响可以忽略，那么，就可以简单地将边界条件写成

$$u(x,y,z,t)\Big|_{\Sigma}=u_0. \tag{12.50}$$

这样做的结果，尽管和精确的边界条件还有差别，但只要这种差别足够小，那么，解的稳定性就告诉我们，由此引起的解的差异也是足够小的．当然，如果我们就是要研究这种冷却或升温过程的影响，这种近似就是不可取的．

第十三章　线性偏微分方程的通解

13.1　线性偏微分方程解的叠加性

在上一章中，我们已经导出了几种典型的二阶偏微分方程．它们都是线性偏微分方程，也就是说，在方程中只出现对于未知函数的线性运算．为了下面的叙述简洁起见，不妨引进线性算符 L，而把这些线性偏微分方程统一写成

$$L[u] = f \tag{13.1}$$

的形式，其中 u 是未知函数，f 是已知函数，称为方程的非齐次项．具有非齐次项的偏微分方程称为非齐次偏微分方程．如果 $f \equiv 0$，方程就是齐次的．和上一章中得到的各个偏微分方程作比较，就可以看出线性算符 L 的具体形式．下面的简表中给出了几个典型的例子．而且，以后讨论的定解条件，也都是线性的．因此，也可以把定解条件写成类似的算符形式 (见表 13.1)．

表　13.1

方程类型	方程	线性算符 L
波动方程	$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = f$	$L \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\nabla^2$
热传导方程	$\dfrac{\partial u}{\partial t} - \kappa\nabla^2 u = f$	$L \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} - \kappa\nabla^2$
Poisson 方程	$\nabla^2 u = f$	$L \equiv \nabla^2$

定义　如果函数 u 使方程 $L[u] = f$ 恒成立，则称 u 是方程 $L[u] = f$ 的解．

下面不加证明地列出线性方程的几个基本性质．它们的证明都很简单，读者可以自己补证．

性质 13.1 若 u_1 和 u_2 都是齐次方程 $L[u]=0$ 的解，

$$L[u_1]=0, \qquad L[u_2]=0,$$

则它们的线性组合 $c_1u_1+c_2u_2$ 也是齐次方程的解，

$$L[c_1u_1+c_2u_2]=0, \tag{13.2}$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数.

性质 13.2 若 u_1 和 u_2 都是非齐次方程 $L[u]=f$ 的解，

$$L[u_1]=f, \qquad L[u_2]=f,$$

则它们的差 u_1-u_2 一定是相应的齐次方程的解，

$$L[u_1-u_2]=0. \tag{13.3}$$

换言之，非齐次方程的一个特解加上相应齐次方程的解仍是非齐次方程的解.

性质 13.3 若 u_1 和 u_2 分别满足非齐次方程

$$L[u_1]=f_1, \qquad L[u_2]=f_2,$$

则它们的线性组合 $c_1u_1+c_2u_2$ 满足非齐次方程

$$L[c_1u_1+c_2u_2]=c_1f_1+c_2f_2. \tag{13.4}$$

本节和以后几节均以两个自变量的线性偏微分方程为例，讨论方程的特解和通解. 这类线性偏微分方程的普遍形式可以写为

$$\begin{aligned}&A_0\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+A_1\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}+\cdots+A_n\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\\&\qquad+B_0\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}+\cdots+M\frac{\partial u}{\partial x}+N\frac{\partial u}{\partial y}+Pu=f(x,y),\end{aligned} \tag{13.5}$$

或者

$$\begin{aligned}L(D_x,D_y)u\equiv{}&\big[A_0D_x^n+A_1D_x^{n-1}D_y+\cdots+A_nD_y^n\\&+B_0D_x^{n-1}+\cdots+MD_x+ND_y+P\big]u\\={}&f(x,y),\end{aligned} \tag{13.5'}$$

其中 $D_x\equiv\partial/\partial x$ ， $D_y\equiv\partial/\partial y$ ； $A_0,A_1,\cdots,A_n,B_0,\cdots,M,N$ 都是 x,y 的已知函数，称为方程的系数. 我们还只讨论最简单的情形，即常

系数的线性偏微分方程 (方程的系数均为常数)，以及能化为常系数线性偏微分方程的方程.

13.2 常系数线性齐次偏微分方程的通解

常系数线性齐次偏微分方程的普遍形式是

$$A_0\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+A_1\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}+\cdots+A_n\frac{\partial^n u}{\partial y^n}$$
$$+B_0\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}+\cdots+M\frac{\partial u}{\partial x}+N\frac{\partial u}{\partial y}+Pu=0, \tag{13.6}$$

或者

$$\begin{aligned}L(D_x,D_y)u\equiv&\left[A_0D_x^n+A_1D_x^{n-1}D_y+\cdots+A_nD_y^n\right.\\&\left.+B_0D_x^{n-1}+\cdots+MD_x+ND_y+P\right]u\\=&0,\end{aligned} \tag{13.6'}$$

其中，方程的系数 $A_0,A_1,\cdots,A_n,B_0,\cdots,M,N$ 都是常数. 这类方程的求解问题特别简单. 这时，需要区分两种情形，即 $L(D_x,D_y)$ 是 D_x,D_y 的齐次式和 $L(D_x,D_y)$ 不是 D_x,D_y 的齐次式这两种情形.

1. $L(D_x,D_y)$ 是 D_x,D_y 的齐次式

方程为

$$\left[A_0D_x^n+A_1D_x^{n-1}D_y+A_2D_x^{n-2}D_y^2+\cdots+A_nD_y^n\right]u=0. \tag{13.7}$$

这时，线性算符 $L(D_x,D_y)$ 可以分解成为 n 个线性算符的乘积

$$L(D_x,D_y)=A_0(D_x-\alpha_1D_y)(D_x-\alpha_2D_y)\cdots(D_x-\alpha_nD_y), \tag{13.8}$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也都是常数，因此这 n 个因子的次序可以任意调换. 这从下面的实际求解过程就可以看出.

取试探解为 $u=\phi(y+\alpha x)$, 因为

$$\begin{aligned}D_x^ku&=\alpha^k\phi^{(k)}(y+\alpha x),\\D_y^ku&=\phi^{(k)}(y+\alpha x),\\D_x^rD_y^su&=\alpha^r\phi^{(r+s)}(y+\alpha x),\end{aligned}$$

代入方程即得

$$\left[A_0\alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + \cdots + A_n\right]\phi^{(n)}(y+\alpha x) = 0. \tag{13.9}$$

设代数方程 (称为附加方程， auxiliary equation)

$$A_0\alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + \cdots + A_n = 0 \tag{13.10}$$

的解是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ，且互不相等，则方程 (13.7) 的通解为

$$u = \phi_1(y+\alpha_1 x) + \phi_2(y+\alpha_2 x) + \cdots + \phi_n(y+\alpha_n x), \tag{13.11}$$

其中 $\phi_i,\ i=1,2,\cdots,n$ 是 (互相独立的) 任意 (n 次可微) 函数.

例 13.1 求方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 的通解， a 为常数.

解 令 $u=\phi(y+\alpha x)$，则附加方程为 $\alpha^2-a^2=0$，其解 $\alpha=\pm a$，故得方程的通解为

$$u = \phi_1(y+ax) + \phi_2(y-ax).$$

注意：若 α 是重根，例如是二重根， $(D_x-\alpha D_y)^2u=0$ ，则通解为

$$u = x\phi_1(y+\alpha x) + \phi_2(y+\alpha x).$$

同样，若 α 为 n 重根，即 $(D_x-\alpha D_y)^n u = 0$ ，则方程的通解为

$$\begin{aligned} u = {} & x^{n-1}\phi_1(y+\alpha x) + x^{n-2}\phi_2(y+\alpha x) + \cdots \\ & + x\phi_{n-1}(y+\alpha x) + \phi_n(y+\alpha x). \end{aligned}$$

例 13.2 方程 $(D_x^2 - 2D_xD_y + D_y^2)u = 0$ 的通解为

$$u = x\phi(x+y) + \psi(x+y).$$

2. $L(D_x, D_y)$ 不是 D_x, D_y 的齐次式

首先考虑一阶偏微分方程

$$(D_x - \alpha D_y - \beta)z = 0. \tag{13.12}$$

如果 $f(x,y,z)=0$ 是方程的解，则必有

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z = 0. \tag{13.13}$$

另一方面，

$$D_x z = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}, \quad D_y z = -\frac{\partial f/\partial y}{\partial f/\partial z}.$$

代入方程 (13.12)，又应该有

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\frac{\partial f}{\partial y} + \beta z\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{13.14}$$

比较 (13.13) 和 (13.14) 两式，可见

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{\mathrm{d}y}{-\alpha} = \frac{\mathrm{d}z}{\beta z}. \tag{13.15}$$

这个方程组称为 Lagrange 辅助方程组．容易解出

$$y + \alpha x = C, \qquad \beta x = \ln z - \ln C'.$$

所以

$$z = C'\mathrm{e}^{\beta x} = \mathrm{e}^{\beta x}\phi(y + \alpha x). \tag{13.16}$$

因此，当 $L(D_x, D_y)$ 不是 D_x 和 D_y 的齐次式时，如果我们能将 $L(D_x, D_y)$ 分解为 n 个因子 (每个因子都是 D_x 和 D_y 的线性函数) 的乘积，则也可以容易地求出方程的通解．

例 13.3 求方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ 的通解．

解 容易看出，

$$\begin{aligned}&(D_x^2 - D_x D_y - 2D_y^2 + 2D_x + 2D_y)u\\&\quad = (D_x + D_y)(D_x - 2D_y + 2)u = 0.\end{aligned}$$

故方程的通解为

$$u = \phi(x - y) + e^{-2x}\psi(y + 2x).$$

注 若有重复性因子，如 $(D_x - \alpha D_y - \beta)^2 z = 0$，则通解为

$$z = xe^{\beta x}\phi(y + \alpha x) + e^{\beta x}\psi(y + \alpha x).$$

13.3 常系数线性非齐次偏微分方程的通解

对于线性非齐次偏微分方程，显然有

$$\boxed{\begin{aligned}\text{非齐次方程的通解} = &\text{ 非齐次方程的任一特解}\\ &+\text{相应齐次方程的通解.}\end{aligned}}$$

因此，问题便转化为只需求出非齐次方程的任意一个特解.

设方程为

$$L(D_x, D_y)u = f(x, y), \tag{13.17}$$

则特解可形式地表示为

$$u_0 = \frac{1}{L(D_x, D_y)} f(x, y), \tag{13.18}$$

而后可按下列法则求出 $u_0(x, y)$：

1. 若 $f(x, y) = e^{ax+by}$，且 $L(a, b) \neq 0$，则

$$\boxed{\frac{1}{L(D_x, D_y)} e^{ax+by} = \frac{1}{L(a, b)} e^{ax+by}.} \tag{13.19}$$

直接利用求偏导数的公式

$$D_x e^{ax+by} = a e^{ax+by}, \quad D_y e^{ax+by} = b e^{ax+by},$$

就能够证明这个公式.

2. 若 $f(x, y) = e^{i(ax+by)}$，显然有

$$\frac{1}{L(D_x, D_y)} e^{i(ax+by)} = \frac{1}{F(ia, ib)} e^{i(ax+by)}.$$

因此，当 a 和 b 为实数，且 $L(D_x, D_y)$ 中的系数也为实数时，

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{L(D_x, D_y)} \sin(ax + by) &= \mathrm{Im}\left[\frac{1}{L(ia, ib)} e^{i(ax+by)}\right], & (13.20)\\ \frac{1}{L(D_x, D_y)} \cos(ax + by) &= \mathrm{Re}\left[\frac{1}{L(ia, ib)} e^{i(ax+by)}\right]. & (13.21)\end{aligned}}$$

特别是，如果 $L(D_x, D_y)$ 是 D_x^2, D_xD_y 和 D_y^2 的简单复合函数，

$$L(D_x, D_y) = G(D_x^2, D_xD_y, D_y^2),$$

则

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{G(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)}\sin(ax+by)\\&\qquad=\frac{1}{G(-a^2,-ab,-b^2)}\sin(ax+by),\end{aligned}} \tag{13.22}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{G(D_x^2, D_xD_y, D_y^2)}\cos(ax+by)\\&\qquad=\frac{1}{G(-a^2,-ab,-b^2)}\cos(ax+by).\end{aligned}} \tag{13.23}$$

3. 若 $f(x,y)=e^{ax+by}g(x,y)$ ，则

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{1}{L(D_x,D_y)}\mathrm{e}^{ax+by}g(x,y)\\&\qquad=\mathrm{e}^{ax+by}\frac{1}{L(D_x+a,D_y+b)}g(x,y).\end{aligned}} \tag{13.24}$$

要证明这个公式，只需注意到

$$D_x\mathrm{e}^{ax+by}g(x,y)=\mathrm{e}^{ax+by}(D_x+a)g(x,y)$$

和

$$D_y\mathrm{e}^{ax+by}g(x,y)=\mathrm{e}^{ax+by}(D_y+a)g(x,y),$$

因此就有

$$L(D_x,D_y)\mathrm{e}^{ax+by}g(x,y)=\mathrm{e}^{ax+by}L(D_x+a,D_y+b)g(x,y).$$

这样，用 $L(D_x,D_y)$ 作用在公式 (13.24) 两端，显然，

$$\begin{aligned}&L(D_x,D_y)\left\{\mathrm{e}^{ax+by}\frac{1}{L(D_x+a,D_y+b)}g(x,y)\right\}\\&\quad=\mathrm{e}^{ax+by}L(D_x+a,D_y+b)\left\{\frac{1}{L(D_x+a,D_y+b)}g(x,y)\right\}\\&\quad=\mathrm{e}^{ax+by}g(x,y).\end{aligned}$$

所以，公式 (13.24) 成立.

4. 若 $f(x,y)=x^my^n$ ，则可将 $1/L(D_x,D_y)$ 展开为 D_x, D_y 的幂级数，而后求出特解.

例 13.4 求非齐次方程 $(D_x^2-2D_xD_y+D_y^2)u=12xy$ 的通解.

解 方程的特解可取为

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \frac{12}{D_x^2 - 2D_xD_y + D_y^2}xy = \frac{12}{(D_x - D_y)^2}xy \\
&= \frac{12}{D_x^2}\left(1 - \frac{D_y}{D_x}\right)^{-2} xy = \frac{12}{D_x^2}\left[1 + 2\frac{D_y}{D_x} + \cdots\right] xy \\
&= \frac{12}{D_x^2}\left[xy + \frac{2}{D_x}x\right] = 12\left[y\frac{1}{D_x^2}x + \frac{2}{D_x^3}x\right] \\
&= 12\left[\frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{12}x^4\right] \\
&= x^4 + 2x^3y,
\end{aligned}
$$

其中利用了

$$
\frac{1}{D_x}x = \frac{1}{2}x^2 \qquad \left(\text{因为}\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x^2}{2} = x\right),
$$

$$
\frac{1}{D_x^2}x = \frac{1}{6}x^3 \qquad \left(\text{因为}\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{x^3}{6} = x\right),
$$

$$
\frac{1}{D_x^3}x = \frac{1}{24}x^4 \qquad \left(\text{因为}\quad \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\frac{x^4}{24} = x\right).
$$

相应齐次方程的通解已在例 13.2 中求出，故非齐次方程的通解为

$$
u = x\phi(x+y) + \psi(x+y) + x^4 + 2x^3y.
$$

需要说明的是，在将 $1/L(D_x, D_y)$ 展开时可以有不同的方法，因而得到不同的结果. 例如，在上面的例题中，也可以得到

$$
\frac{1}{(D_x - D_y)^2} = \frac{1}{D_y^2}\left(1 - \frac{D_x}{D_y}\right)^{-2} = \frac{1}{D_y^2}\left[1 - 2\frac{D_x}{D_y} + \cdots\right].
$$

因此，非齐次方程的特解也可以取为

$$
u_0 = \frac{12}{(D_x - D_y)^2}xy = 2xy^3 + y^4.
$$

容易验证，这两种办法得到的特解之差

$$
x^4 + 2x^3y - 2xy^3 - y^4 = (x-y)(x+y)^3 = 2x(x+y)^3 - (x+y)^4
$$

正是相应齐次方程的解.

推论 1 若非齐次项为 $f(ax+by)$，且 $L(D_x, D_y)$ 是 D_x, D_y 的齐 (n) 次式，则

$$
\begin{aligned}
D_x^r g(ax+by) &= a^r g^{(r)}(ax+by), \\
D_y^s g(ax+by) &= b^s g^{(s)}(ax+by).
\end{aligned}
$$

所以

$$
L(D_x, D_y)g(ax+by) = L(a,b)g^{(n)}(ax+by).
$$

因此，当 $L(a,b) \neq 0$ 时，就有

$$
\boxed{\frac{1}{L(D_x, D_y)}g^{(n)}(ax+by) = \frac{1}{L(a,b)}g(ax+by).} \tag{13.25}
$$

例 13.5 求解方程 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 12(x+y)$.

解 先求特解. 将方程写成 $(D_x^2 + D_y^2)v = 12(x+y)$ ，显然符合推论 1 的条件. 所以特解为

$$
v_0 = \frac{12}{D_x^2 + D_y^2}(x+y) = \frac{12}{\left(1^2+1^2\right)\cdot 3!}(x+y)^3 = (x+y)^3.
$$

容易求出相应齐次方程的通解，从而得出非齐次方程的通解

$$
v = (x+y)^3 + \phi(x+\mathrm{i}y) + \psi(x-\mathrm{i}y).
$$

现在补充讨论上述办法失效的两种情形. 一种是 (13.19) 式中 $L(a,b) = 0$ 的情形. 这时，不妨假设 $L(D_x, D_y) = bD_x - aD_y$ ，现在的问题便是要求解

$$
(bD_x - aD_y)u = \mathrm{e}^{ax+by}. \tag{13.26}
$$

仿照 13.2 节中使用的方法，可以得到 Lagrange 辅助方程组

$$
\frac{\mathrm{d}x}{b} = \frac{\mathrm{d}y}{-a} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{ax+by}}, \tag{13.27}
$$

即

$$
a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y = 0, \tag{13.27$'$}
$$

和

$$
a\mathrm{d}u + e^{ax+by}\mathrm{d}y = 0. \tag{13.27$''$}
$$

由方程 (13.27′)，得

$$
ax + by = c. \tag{13.28}
$$

代入方程 (13.27″)，得

$$a\mathrm{d}u + \mathrm{e}^{c}\mathrm{d}y = 0. \tag{13.27'''}$$

所以

$$u = -\frac{1}{a}y\mathrm{e}^{c} = -\frac{1}{a}y\mathrm{e}^{ax+by},$$

即

$$\boxed{\frac{1}{bD_x - aD_y}\mathrm{e}^{ax+by} = -\frac{1}{a}y\mathrm{e}^{ax+by}.} \tag{13.29}$$

上述求解过程中注意两点．第一，在求出了 (13.28) 式后需代入方程 (13.27″)，以消去 x，其代价是引入了 (13.28) 式中的积分常数 c；而后在求出方程 (13.27‴) 的解后，又需再次使用 (13.28) 式，反过来消去积分常数．第二，在求解方程 (13.27‴) 时，我们并没有再引进第二个积分常数．从上面的求解过程可以看出，这无非使特解中增加或减少一个常数项，而这个常数项显然又应该改写成 $\phi(ax+by)$ (仍然是根据 (13.28) 式)，是相应齐次方程的解．

同样，推论 1 中介绍的办法也有失效的时候，这就是 (13.25) 式中 $L(a,b)=0$ 的情形．这时可先考虑一个特殊的一阶非齐次偏微分方程

$$(D_x - \alpha D_y)u = x^{r}\psi(y+\alpha x), \tag{13.30}$$

相应的 Lagrange 辅助方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1} = \frac{\mathrm{d}y}{-\alpha} = \frac{\mathrm{d}u}{x^{r}\psi(y+\alpha x)}. \tag{13.31}$$

于是 $y+\alpha x = c$，从而求得

$$u = \frac{1}{r+1}x^{r+1}\psi(c) = \frac{1}{r+1}x^{r+1}\psi(y+\alpha x). \tag{13.32}$$

所以，有

$$\boxed{\frac{1}{D_x - \alpha D_y}x^{r}\psi(y+\alpha x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1}\psi(y+\alpha x).} \tag{13.33}$$

反复利用 (13.33) 式的结果，还可以进一步得到

$$\boxed{\frac{1}{(D_x-\alpha D_y)^k}x^r\psi(y+\alpha x)=\frac{r!}{(r+k)!}x^{r+k}\psi(y+\alpha x).} \tag{13.34}$$

例 13.6 求解 $(D_x^2-6D_xD_y+9D_y^2)u=6x+2y$，即

$$(D_x-3D_y)^2u=6x+2y.$$

解 显然，相应齐次方程的通解为 $x\phi(y+3x)+\psi(y+3x)$ (见例 13.3)．

非齐次方程的特解为

$$\begin{aligned}u_0&=\frac{1}{(D_x-3D_y)^2}(6x+2y)\\&=\frac{2}{(D_x-3D_y)^2}(3x+y)=x^2(y+3x).\end{aligned}$$

因此，非齐次方程的通解为

$$u=x^2(y+3x)+x\phi(y+3x)+\psi(y+3x).$$

对于方程 (13.30) 右端的非齐次项为 $\phi(x)\psi(y+\alpha x)$ 的更一般的情形，读者可以类似地讨论。

推论 2 对于一般的非齐次项 $f(x,y)$，也可以通过求解相应的 Lagrange 辅助方程的办法解决．例如，考虑方程

$$(D_x-\alpha D_y)u=f(x,y),$$

其 Lagrange 辅助方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{1}=\frac{\mathrm{d}y}{-\alpha}=\frac{\mathrm{d}u}{f(x,y)}. \tag{13.35}$$

由 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}y/(-\alpha)$，得 $y+\alpha x=c$．代入 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}u/f(x,y)$，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=f(x,y)\mathrm{d}x=f(x,c-\alpha x)\mathrm{d}x,\\u&=\int f(x,c-\alpha x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

计算出积分后，再将 c 用 $y+\alpha x$ 代回，即得特解

$$u_0=\frac{1}{D_x-\alpha D_y}f(x,y)=\left[\int f(x,c-\alpha x)\mathrm{d}x\right]_{c=y+\alpha x}. \tag{13.36}$$

例 13.7 求解方程 $(2D_x-3D_y)(D_x+D_y)u=5e^{x-y}$．

解 显然，相应齐次方程的通解为 $\phi(y-x)+\psi(2y+3x)$.

非齐次方程的特解可取为

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{5}{(2D_x-3D_y)(D_x+D_y)}\mathrm{e}^{x-y} \\ &= \frac{1}{D_x+D_y}\left[\frac{5}{2-3(-1)}\mathrm{e}^{x-y}\right] \\ &= \frac{1}{D_x+D_y}\mathrm{e}^{x-y} = \int \mathrm{e}^{x-(c+x)}\mathrm{d}x\Big|_{c=y-x} \\ &= x\mathrm{e}^{-c}\Big|_{c=y-x} = x\mathrm{e}^{x-y}. \end{aligned}$$

所以，非齐次方程的通解为

$$u = xe^{x-y}+\phi(y-x)+\psi(2y+3x).$$

13.4 特殊的变系数线性齐次偏微分方程

在这一节里，先讨论

$$x^m y^n \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} \tag{13.37}$$

形式的项. 令

$$x=\mathrm{e}^t, \qquad y=\mathrm{e}^s, \tag{13.38}$$

即 $t=\ln x, s=\ln y$ ，则有

$$D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} = x\frac{\partial}{\partial x}, \qquad D_s \equiv \frac{\partial}{\partial s} = y\frac{\partial}{\partial y}. \tag{13.39}$$

于是，

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} &= D_t(D_t-1), & y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} &= D_s(D_s-1), \\ x^3\frac{\partial^3}{\partial x^3} &= D_t(D_t-1)(D_t-2), & y^3\frac{\partial^3}{\partial y^3} &= D_s(D_s-1)(D_s-2), \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

更一般地，

$$\begin{aligned} x^m y^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} &= D_t(D_t-1)\cdots(D_t-m+1) \\ &\quad \times D_s(D_s-1)\cdots(D_s-n+1). \end{aligned} \tag{13.40}$$

所以，对于 $L(D_x, D_y)$ 均由 (13.37) 式形式的项组成时，通过变换 (13.38) 可以化为常系数的微分方程. 下面通过一个具体的例子来说明这类方程的解法.

例 13.8 求方程 $x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial x} - y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ 的通解.

解 作变换 (13.38)，则方程化为

$$[D_t(D_t - 1) - D_s(D_s - 1) + D_t - D_s]\,u = 0,$$

即 $\left[D_t^2 - D_s^2\right]u = 0$. 所以，方程的通解为

$$\begin{aligned} u &= \phi_1(t+s) + \psi_1(t-s) = \phi_1(\ln x + \ln y) + \psi_1(\ln x - \ln y) \\ &= \phi_1(\ln(xy)) + \psi_1\left(\ln\frac{x}{y}\right) = \phi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

13.5 波动方程的行波解

在例 13.1 中，曾经讨论过波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{13.41}$$

的通解，这里，把它改写成

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at), \tag{13.42}$$

其中 f 和 g 是任意函数. 这个解式表明，波动方程 (13.41) 的通解，由两个波组成. $f(x,t)$ 代表沿 x 轴向左传播的波，当 $t=0$ 时，波形为 $f(x)$，而后以恒定速率 a 向左传播，而保持波形不变；$g(x,t)$ 则代表沿 x 轴向右传播的波，当 $t=0$ 时，波形为 $g(x)$，而后也以同样的恒定速率 a 向右传播，保持波形不变. 单独的 $f(x,t)$ 和 $g(x,t)$ 也是方程 (13.41) 的解. 它们独立传播，互不干扰. 这正是因为波动方程是线性齐次方程，具有解的叠加性.

从原则上说来，函数 f 和 g 应该由定解条件确定. 如果把问题简化为一维无界弦上的波的传播问题，那么，f 和 g 当然便完全由初始条件决定.

例 13.9 求定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad -\infty<x<\infty, t>0, \tag{13.43a}$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=\phi(x), \qquad -\infty<x<\infty, \tag{13.43b}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), \qquad -\infty<x<\infty \tag{13.43c}$$

的解.

解 方程 (13.43a) 的通解已由 (13.42) 式给出，现在的问题便是如何根据初始条件 (13.43b) 和 (13.43c) 确定函数 f 和 g. 为此，将解式 (13.42) 代入初始条件，得

$$f(x)+g(x) = \phi(x), \tag{13.44a}$$

$$a\big[f'(x)-g'(x)\big] = -\psi(x). \tag{13.44b}$$

将 (13.44b) 积分，可以得到

$$f(x)-g(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi+C,$$

其中 C 是积分常数. 将这个结果和 (13.44a) 联立，即可求得

$$f(x)=\frac{1}{2}\phi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{C}{2},$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\phi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{C}{2}.$$

再代回到解式 (13.42)，即得

$$\begin{aligned}u(x,t) &= f(x-at)+g(x+at)\\ &= \frac{1}{2}\phi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{C}{2}\\ &\quad+\frac{1}{2}\phi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{C}{2}\\ &= \frac{1}{2}\big[\phi(x-at)+\phi(x+at)\big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{13.45}$$

这样，就求得了一维无界区间上波动方程定解问题 (13.43) 的解. 它称为一维波动方程定解问题的行波解，或 d'Alembert 解. 这

个解具有清楚的物理意义：第一项表示由初位移激发的行波 $t=0$ 时波形为 $\phi(x)$，以后分成相等的两部分，独立地向左右传播，速率为 a；第二项表示由初速度激发的行波，$t=0$ 时在 x 处的速度为 $\psi(x)$，在 t 时刻，它将左右对称地扩展到 $[x-at, x+at]$ 的范围，所以，传播的速率也是 a.

读者可能会有一个问题：这里构成定解问题时，为什么缺少了边界条件. 更准确地说，为什么没有明确写出无穷远条件

$$u(x,t)\Big|_{x\to\pm\infty}\to 0 \quad \text{或} \quad u(x,t)\Big|_{x\to\pm\infty}\text{有界}.$$

严格说来，的确应该明确写出无穷远条件. 但是，就具体问题而言，这个条件可以由 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的具体形式来得到保证. $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 总是会局限在一个有限的范围内. 当 $|x|$ 增大时，$\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 都会足够快地趋于 0. 因此，从解 (13.45) 就可以看出，在有限的时间内，$u(x,t)$ 总还是在一个有限的范围内才不为 0. 从概念上说，所谓无穷长的弦当然只是一个理想化的抽象. 它恰恰就是表示：在我们所考察的时间和空间范围内，端点的影响可以忽略不计.

如果是有界弦上的波动问题，毫无疑问，就必须明确地写出边界条件，才能构成一个适定的定解问题. 下一章将讨论这种定解问题的求解方法. 尽管这时波动方程的通解仍然可以写成 (13.42) 的形式，但由于边界条件的出现，就使得我们不能简单地模仿上面的求解过程而定出函数 f 和 g.

13.6 波的耗散和色散

上一节讨论了一维波动方程的解，特别是给出了一维无界空间上波动方程的行波解. 在此基础上，再简要地讨论一下波动过程中的一些基本物理特征.

在上一章中，我们已经看到，波动方程 (13.41) 描写的是以恒定速率 a 传播的非衰减波. 这是在建立波动方程时所作一系列简化假设的反映. 我们实际上假定了在波动过程中不存在耗散，这是

因为整个空间中的总能量

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\rho\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{13.46}$$

所以

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right]\rho\,\mathrm{d}x \\ &= a^2\rho\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]\rho\,\mathrm{d}x \\ &= 0, \end{aligned} \tag{13.47}$$

体系的总能量守恒. 相应地，反映在方程上，它在时间反演 $t \to -t$ 下是不变的. 我们还作了小振动的假设，因此，涉及振动位移 $u(x,t)$ 的非线性项很小，可以忽略. 与此相适应的是，传播速率为常数，不依赖于频率和波长. 所有这些简化假设，就导致了方程 (13.41) 的形式与介质的具体性质无关. 介质的具体性质仅仅体现在传播速率 a 的大小上.

在上一节中，我们还看到，波动方程 (13.41) 的解可以分解为向左、右两个方向独立传播的两个波. 可以设想，只要这两个波分布在有限大小的区间上，在经过足够长的时间后，它们就将会完全分开而毫不重叠. 于是，我们就可以跟踪其中的一个波，而完全忽视另一个波的存在. 例如，不妨只考察向右传播的波 $u(x,t) = f(x-at)$，它是一阶波动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{13.48}$$

的解. 在此基础上，以适当方式进一步包括进方程建立过程中所略去的一些高级项，就可以明白地表现出波的耗散和色散.

首先，在方程 (13.48) 中加上 $\partial^2 u/\partial x^2$ 项，例如，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{13.49}$$

a 和 α 仍为常数. 如果仍然要寻找谐波形式的解[1]，

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)}\mathrm{d}k,$$

那么，代入方程 (13.49)，假定可以和积分交换次序，那么就可以得到波数 k 和"角频率" ω 所必须满足的关系式 $\omega=ka-\mathrm{i}\alpha k^2$，因此，方程 (13.49) 的解就是

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{-\alpha k^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}\mathrm{d}k. \tag{13.50}$$

这说明，方程 (13.49) 所描写的波动过程，仍然是以恒定的速率 a 传播的波，然而振幅却随时间而指数地衰减 (假设常数 $\alpha>0$)．由于振幅的衰减因子与波数 k 有关，不同波数的分量衰减速度不同，因此，波的覆盖区间大小保持不变，但波形却将随着时间而变化.

如果在方程 (13.48) 中加上 $\partial^3 u/\partial x^3$ 项，例如，

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0, \tag{13.51}$$

a 和 β 仍为常数. 如果仍然要寻找 (13.50) 形式的解，则波数 k 和角频率 ω 必须满足的关系式就是 $\omega=k\big(a-\beta k^2\big)$，所以，

$$kx-\omega t=k\big[x-\big(a-\beta k^2\big)t\big],$$

方程 (13.51) 的解就是

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k[x-(a-\beta k^2)t]}\mathrm{d}k. \tag{13.52}$$

这样，波的传播速率 (准确说，是相位的传播速率，即相速度)

$$v_{\mathrm{p}}=\frac{\omega}{k}=a-\beta k^2 \tag{13.53}$$

就是 k 的函数. 这说明，波数不同，传播速率不同. 甚至对于 $k^2<a/\beta$ 和 $k^2>a/\beta$ 的分量，传播方向也不同！因此，随着时间的增大，波的覆盖区间将越来越大；在空间一点上，波的组成成分 (即不同波

[1] 这里求得的是复数形式的解. 真正的位移是它的实部或虚部. k 必须是实数，因为在 $t=0$ 时解也必须是 x 的振荡函数.

数的分量所占比例) 也将随着时间而变化. 这个现象, 就称为波的色散.

还可以定义另一种传播速率,

$$v_{\mathrm{g}}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}=a-3\beta k^{2}, \tag{13.54}$$

称为群速度 (见图 13.1) , 它是波包的传播速率, 因而也就是能量的传播速率. 群速度和相速度不相等, 是色散波的又一特点.

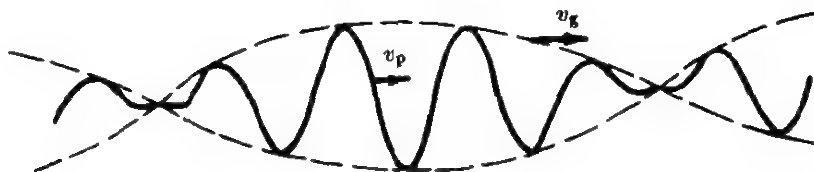


图 13.1　群速度 v_{g} 与相速度 v_{p}

上面定性地讨论了波的耗散和色散. 共同特点是方程仍保持为齐次, 因而还具有解的可叠加性. 如果在一阶波动方程中引进其他形式的线性修正项, 也有可能产生波的耗散和色散, 甚至会同时出现耗散和色散. 回到原来的二阶波动方程, 也可类似地讨论.

最后, 简要地提一下非线性效应. 如果在一定条件下, 需要在波动方程中引进非线性项, 例如

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a(1+\gamma u)\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{13.55}$$

这可以理解为传播速率不只是与介质的物理性质有关, 还与位移的大小有关. 读者可以直接验证, 这个方程的解可以写成隐函数的形式

$$u(x,t)=f\big(x-a(1+\gamma u)t\big), \tag{13.56}$$

其中 f 仍是任意函数, 它就是 $u(x,t)$ 在 $t=0$ 时的形状 $f(x)$,

$$u(x,t)\Big|_{t=0}=f(x).$$

这里需要特别强调, 由于在方程 (13.55) 中出现了非线性项

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial(u^{2})}{\partial x},$$

因此，方程 (13.55) 的解不再具有可叠加性．例如，如果 $u(x,t)$ 是方程 (13.55) 的解，$Au(x,t)$（A为常数，且 $\neq 1$）也不再是方程 (13.55) 的解．同样，即使 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ 都是方程 (13.55) 的解，它们的线性组合一般也不会是 (13.55) 的解，这样，必然会产生两个后果，一方面是方程更加难以求解，另一方面，方程的解必然会表现出新的特点 (相应地，物理上就表现为新的规律性)．研究各种非线性方程的求解以及解的特性，是非线性科学的课题．这里从略．

13.7 热传导方程的定性讨论

对于热传导方程，最明显的特点便是存在耗散．热传导方程属于抛物型方程，在方程中含有未知函数对时间变量的一阶偏导数和对空间变量的二阶偏导数，因此，方程不具有时间反演不变性．换句话说，热传导过程是不可逆的．为了定性地了解热传导方程的特点，不妨讨论一下无穷长的一维介质上的热传导问题，

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0. \tag{13.57}$$

和上一节的方程 (13.49) 相比较，就可以看出，热传导方程 (13.57) 的解可以表示成

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\mathrm{e}^{-\kappa k^2 t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k. \tag{13.58}$$

这里就明白无误地表现出了温度 $u(x,t)$ 随时间 t 的衰减．

我们在上一章中建立的热传导方程，例如 (12.19) 和 (12.21) 式，以及作为它的特殊情形的 (13.57) 式，还具有另外一个共同特点，这就是传热速度为无穷．我们不妨考虑一维无界区间上的一个特殊的非齐次热传导方程

$$\frac{\partial g}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\delta(x-x')\delta(t-t'),\qquad t'>0. \tag{13.59}$$

这个方程描述了瞬时 (只存在于 t' 时刻) 点 (集中在空间 x' 一点) 热源所产生的温度场．假设 $t=0$ 时介质的温度为 0．这样，在热源

出现之前 (即 $t < t'$ 时)，介质的温度显然仍一定维持为 0．当 $t > t'$ 时，可以求出 (见 20.7 节)，

$$g(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi(t-t')}} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\kappa(t-t')}\right]. \tag{13.60}$$

这个结果表明，只要 $t > t'$，则对于介质上的任何一点 x，$g(x,t)$ 总不为 0．这就是说，只要一旦热源出现，则不论距离多远处，总立即感受到它的影响. 这种无穷大的传热速度，当然是不可能的. 因此，只有在热源出现后的足够长的时间之后，热传导方程才可能足够好地描写实际的热传导过程. 但由于这个方程形式简单，便于求解，只要物理问题的近似程度许可，我们总还是采用这种简化的热传导方程.

之所以出现无穷大的传热速度，是由于我们在建立热传导方程时，过分简化了热传导过程的微观机理. 在连续介质中出现的任何不均匀性，例如引起热传导过程的热运动的不均匀性，引起扩散过程的物质密度的不均匀性，总会由于微观粒子 (分子、原子、电子 ……) 的运动和碰撞而以有限的速度逐渐传播开来. 这样，热传导方程便应该修改为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{13.61}$$

方程右端出现了两项. 如果第一项占主导作用，第二项只是一个修正，方程的解当然以热传导为其基本特征 [①]，但第二项的出现，的确可以导致传热速度为有限值. 这从定解问题

$$\frac{\partial^2 \mathscr{G}}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial \mathscr{G}}{\partial t} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \mathscr{G}}{\partial t^2} = -\delta(x-x')\delta(t-t')$$

$$(t, t' > 0, -\infty < x, x' < \infty), \tag{13.62a}$$

$$\mathscr{G}\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial \mathscr{G}}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \quad (-\infty < x, x' < \infty) \tag{13.62b}$$

① 如果第二项占主导作用，方程的解当然就表现出波动过程的基本特征，而第一项就可以看成是耗散项.

的解

$$\mathscr{G}(x,t) = \frac{1}{2}\mathrm{J}_0\Big(\frac{a}{2\kappa}\sqrt{(x-x')^2-a^2(t-t')^2}\Big)$$
$$\times \exp\Big[-\frac{a^2}{2\kappa}(t-t')\Big]\eta\Big(t-t'-\frac{|x-x'|}{a}\Big) \qquad (13.63)$$

可以看出，正如预料的那样，上面给出的 (13.60) 式，正是 $\mathscr{G}(x,t)$ 在 $a\to\infty$ 的极限下的结果．利用零阶 Bessel 函数 $\mathrm{J}_0(z)$ 的渐近展开 (见 6.5 节)，就能够容易地证明这一点．

13.8 Laplace 方程的定性讨论

在本书的复变函数部分，已经指出，解析函数

$$f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

的实部 $u(x,y)$(或虚部 $v(x,y)$)，一定是二维 Laplace 方程的解，

$$\nabla^2 u(x,y)=0, \qquad (13.64)$$

称为二维调和函数．另外，还可以证明 (见 3.6 节)：在解析函数的解析区域内，任意一点 a 的函数值，一定等于以该点为圆心的圆周上各点函数值的平均值

$$f(a)=\frac{1}{2\pi}\oint_{|z-a|=R} f(z)\mathrm{d}\theta. \qquad (13.65)$$

如果进一步比较等式两端的实部和虚部，当然就看出，均值定理对解析函数的实部 (或虚部) 单独也成立，

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\oint_C u(x,y)\mathrm{d}l, \qquad C:(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (13.66)$$

由此，还可以推断出，只要 $u(x,y)\neq$ 常数， $u(x,y)$ 的最大值和最小值，一定只能出现在圆周上．用反证法就可以证明这个结论 (称为极值原理)．它可以看成是最大模原理在 $u(x,y)$ 上的具体表现．这样，均值定理和极值原理就是二维调和函数的最基本特性．

也可以建立三维调和函数的概念. 如果在区域 V 内函数的二阶偏导数存在, 且满足三维 Laplace 方程, 则称该函数为 V 内的三维调和函数.

可以证明, 均值定理对于三维调和函数也仍然成立, 因此, 极值原理也仍然成立. 读者可见 20.5 节.

作为三维调和函数的具体实例, 我们讨论三维 Laplace 方程 (在直角坐标系中) 的多项式解. 二维调和函数可以看成是它们的特殊情形.

因为 Laplace 方程中, 对各自变量的偏导数阶数相同, 所以, 这样的多项式独立解一定是自变量的齐次函数. 容易看出, 常数 (0 次齐次式) 和一次函数 (一次齐次式) x, y, z 就是这样的独立解. 对于二次函数, 独立解有五个, 可以取为

$$2z^2 - x^2 - y^2, \quad xz, \quad yz, \quad xy \quad 和 \quad x^2 - y^2.$$

三次函数的独立解有七个, 可取为

$$(4z^2 - x^2 - y^2)x, \quad (4z^2 - x^2 - y^2)y, \quad (2z^2 - 3x^2 - 3y^2)z,$$

$$xyz, \quad (x^2 - y^2)z, \quad (y^2 - 3x^2)y \quad 和 \quad (x^2 - 3y^2)x.$$

更一般地, l 次函数的独立解有 $2l + 1$ 个. 它们的形式将在 16.10 节中给出, 并且会看到, 为什么 l 次函数的独立解有 $2l + 1$ 个.

第十四章　分离变量法

本章介绍求解偏微分方程定解问题的最常用方法，分离变量法.

我们在解常微分方程定解问题时，通常总是先求出微分方程的特解，由线性无关的特解叠加出通解，而后用定解条件 (例如，初条件) 定出适合于该问题的叠加系数. 对于一阶线性偏微分方程的求解问题，基本的方法也是转化为一阶线性常微分方程组的求解问题. 具体的作法在上一章的 13.2 和 13.3 两节中也略有介绍. 对于二阶以及更高阶的偏微分方程定解问题，情况有些不同：即使可以先求出偏微分方程的通解，由于通解中含有待定函数，一般说来，难以直接根据定解条件定出. 这样，为了求解偏微分方程的定解问题，就必须把求解步骤加以适当的修改. 本章介绍的分离变量法，就是先求出满足方程及一部分定解问题的全部特解，把这全部特解叠加起来，再利用另一部分定解条件定出叠加系数，从而求出该定解问题的解.

14.1　两端固定弦的自由振动

考虑长为 l 、两端固定的弦的自由振动，方程及定解条件为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l,\ t>0,\qquad (14.1\text{a})$$

$$u\Big|_{x=0}=0,\qquad u\Big|_{x=l}=0,\qquad t\geq 0,\qquad (14.1\text{b})$$

$$u\Big|_{t=0}=\phi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x),\qquad 0\leq x\leq l.\qquad (14.1\text{c})$$

在这个定解问题中，方程和边界条件都是齐次的，而初始条件是非齐次的.

我们希望求得的特解具有分离变量的形式，即[①]

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{14.2}$$

将 $u(x,t)$ 代入方程，即得

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t).$$

等式两端除以 $X(x)T(t)$，就有

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

注意在这个等式中，左端只是 t 的函数 (换句话说，与 x 无关)，右端只是 x 的函数 (换句话说，与 t 无关)，因此，左端和右端相等，就必须共同等于一个既与 x 无关、又与 t 无关的常数. 令这个常数为 $-\lambda$，上面的结果又可以写成

$$T''(t) + \lambda a^2T(t) = 0, \tag{14.3a}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{14.3b}$$

同样，将 $u(x,t)$ 代入边界条件，得

$$X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0.$$

这时必须有

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \tag{14.4}$$

这是因为 $T(t)$ 不可能恒为 0，否则 $u(x,t)$ 恒为 0.

这样就完成了用分离变量法求解偏微分方程定解问题的第一步：**分离变量**. 在这一步中，假设所要求得的解是分离变量形式的非零解 $u(x,t) = X(x)T(t)$，导出了函数 $X(x)$ 应该满足的常微分方程和边界条件以及 $T(t)$ 满足的常微分方程. 分离变量之所以能够实现，是因为原来的偏微分方程和边界条件都是齐次的.

第二步，**求解本征值问题**：

---

① 显然，应当假设下面的特解中 $X(x)$ 和 $T(t)$ 不恒等于 0，即 $u(x,t)$ 不恒等于 0. 恒等于 0 的解称为缺味 (trivial) 解. 尽管它的确是偏微分方程的解，但并不具有任何实用价值. 我们要求的是非零解.

上面得到的函数 $X(x)$ 的常微分方程定解问题，称为 **本征值问题**. 其特点是：常微分方程 (14.3b) 中含有一个待定常数 λ，而定解条件 (14.4) 是一对齐次边界条件. 这样的定解问题不同于我们过去熟悉的常微分方程的初值问题. 下面将要看到，并非对于任何 λ 值，都有既满足齐次常微分方程、又满足齐次边界条件的非零解. 只有当 λ 取某些特定值时，才有既满足齐次常微分方程、又满足齐次边界条件的非零解 $X(x)$. λ 的这些特定值称为 **本征值**，相应的非零解称为 **本征函数**.

首先证明，如果这个本征值问题有解的话，本征值 λ 一定为正数. 为此，不妨假设本征函数 $X(x)$ 是复函数. 用它的复共轭 $X^*(x)$ 乘以常微分方程的两端，然后在区间 $[0,l]$ 上积分，就得到

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^l X(x)X^*(x)\mathrm{d}x &= -\int_0^l X''(x)X^*(x)\mathrm{d}x \\ &= -X'(x)X^*(x)\Big|_0^l+\int_0^l X'(x)X'^*(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由 $X(x)$ 所满足的边界条件 (14.4)，可以看出，$X^*(x)$ 应该满足同样的边界条件

$$X^*(0)=0,\qquad X^*(l)=0. \tag{14.4$'$}$$

所以上面分部积分出来的项为 0. 由于 $X(x)\not\equiv 0$，同样，也应该有 $X'(x)\not\equiv 0$ (否则，$X(x)\equiv$ 常数，由边界条件可以定出此常数一定为 0)，所以一定有

$$\lambda=\frac{\displaystyle\int_0^l X'(x)X'^*(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l X(x)X^*(x)\mathrm{d}x}>0.$$

下面就来求解本征值问题. 常微分方程 (14.3b) 的通解是

$$X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x, \tag{14.5}$$

代入边界条件 (14.4)，就有

$$B=0,\quad A\sin\sqrt{\lambda}l=0.$$

因为 $A\neq 0$(否则 $X(x)\equiv 0$， $u(x,t)\equiv 0$)，故必有 $\sqrt{\lambda}l=n\pi$，即

$$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\qquad n=1,2,3,\cdots. \tag{14.6}$$

相应的本征函数就是

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{14.7}$$

这里取 $A=1$，因为我们所要求的必然只是线性无关解[①]．不同的 A 值给出的是线性相关的．由于同样的原因，我们也不必考虑 n 为负整数的情形．这样求得的本征值有无穷多个，它们可以用正整数 n 标记，因此，在上面的 (14.6) 和 (14.7) 式中，把本征值和相应的本征函数都记为 λ_n 和 $X_n(x)$．

第三步， **求特解**，并进一步 **叠加出一般解**：

在求解了本征值问题后，对于每一个本征值 λ_n，应该由方程 (14.3a) 求出相应的 $T_n(t)$，

$$T_n(t)=C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at. \tag{14.8}$$

因此，也就得到了满足偏微分方程和边界条件的特解

$$u_n(x,t)=\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (n=1,2,3,\cdots). \tag{14.9}$$

这样的特解有无穷多个．每一个特解都同时满足齐次偏微分方程和齐次边界条件．但是，一般说来，单独任何一个特解不可能也恰好满足定解问题中的初始条件．例如，只要 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 不恰好都是 $\sin\frac{n\pi}{l}x$ 的倍数，

$$D_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\phi(x),\quad C_n\frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x)$$

---

① 从概念上说，由于构成本征值问题的常微分方程和边界条件都是齐次的，因此，如果 $X(x)$ 是对应于 λ 的一个本征函数，那么， $cX(x)$ 也一定是本征函数，其中 c 是任意常数．因此，以后对应于一个本征值 λ，我们就只要求出线性无关的本征函数即可．

就根本不可能成立．但由于偏微分方程和边界条件都是齐次的，把它们的 (任意有限个) 特解叠加起来，当然仍然是满足齐次方程和齐次边界条件的解．而如果把全部无穷多个特解叠加起来，

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{14.10}$$

只要级数具有一定的收敛性，例如，可以逐项求二阶偏微商，那么，这样得到的 $u(x,t)$ 也仍然是齐次偏微分方程在齐次边界条件下的解．这种形式的解称为**一般解**．它不同于偏微分方程的通解，因为一般解不只是满足偏微分方程，而且满足齐次边界条件．

现在的问题是，适当选择一般解中的叠加系数 C_n 和 D_n，是否能够使之满足初始条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\phi(x), \tag{14.11}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\psi(x) \tag{14.12}$$

呢？或者反过来说，是否可以根据初始条件中的已知函数 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 定出叠加系数 C_n 和 D_n 呢？下面就回答这个问题．

第四步，**利用本征函数的正交性定叠加系数**：

设 $X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi}{l}x$ 和 $X_m(x)=\sin\dfrac{m\pi}{l}x$ 是分别对应于本征值 λ_n 和 λ_m 的两个本征函数，$\lambda_n\neq\lambda_m$(即 $n\neq m$)．容易看出，它们分别满足

$$X_n''(x)+\lambda_nX_n(x)=0, \tag{14.13a}$$

$$X_n(0)=0,\quad X_n(l)=0, \tag{14.13b}$$

和

$$X_m''(x)+\lambda_mX_m(x)=0, \tag{14.14a}$$

$$X_m(0)=0,\quad X_m(l)=0. \tag{14.14b}$$

用 $X_m(x)$ 乘以 (14.13a) 式，用 $X_n(x)$ 乘以 (14.14a) 式，相减，并在区间 $[0,l]$ 上积分，即得

$$
\begin{aligned}
(\lambda_n - \lambda_m) \int_0^l X_n(x) X_m(x) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^l \left[X_n(x) X_m''(x) - X_m(x) X_n''(x) \right] \mathrm{d}x \\
&= \left[X_n(x) X_m'(x) - X_m(x) X_n'(x) \right] \Big|_0^l = 0.
\end{aligned}
$$

在得到最后结果时，用到了 $X_n(x)$ 和 $X_m(x)$ 满足的边界条件 (14.13b) 和 (14.14b)．考虑到 $\lambda_n \neq \lambda_m$，因此，就证得 **本征函数的正交性** ①

$$
\int_0^l X_n(x) X_m(x) \mathrm{d}x = 0, \quad n \neq m. \tag{14.15}
$$

进一步计算还可以得到本征函数的 **模方**②

$$
\|X_n\|^2 \equiv \int_0^l X_n^2(x) \mathrm{d}x = \frac{l}{2}. \tag{14.16}
$$

因此，在 (14.11) 式两端同乘以 $\sin \frac{m\pi}{l} x$，并逐项积分，就得到

$$
\begin{aligned}
\int_0^l \phi(x) \sin \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x &= \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{m\pi}{l} x \mathrm{d}x = D_m \cdot \frac{l}{2}.
\end{aligned}
$$

所以

$$
D_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \mathrm{d}x. \tag{14.17}
$$

---

① 这个结果当然也可以根据本征函数的具体形式加以证明．

② $\|X_n\|$ 的倒数常称为 **本征函数的归一因子**．这是因为

$$
\frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l X_n^2(x) \mathrm{d}x = 1
$$

即本征函数 $X_n(x)/\|X_n\|$ 的模为 1．另外，(14.15) 和 (14.16) 两式还可以合并写成

$$
\int_0^l X_n(x) X_m(x) \mathrm{d}x = \frac{l}{2} \delta_{nm}.
$$

称为 **本征函数的正交归一性**．

同样，可以得到

$$C_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x. \tag{14.18}$$

这样，根据初始条件中的已知函数 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$，计算出积分，就可以得到叠加系数 C_n 和 D_n，从而就求得了整个定解问题的解.

下面简单讨论一下 **解的物理意义**. 先看特解

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= \left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at + D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ &= A_n\sin(\omega_n t+\delta_n)\sin k_n x, \end{aligned}$$

其中

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}a, \qquad k_n = \frac{n\pi}{l},$$

$$A_n\cos\delta_n = C_n, \qquad A_n\sin\delta_n = D_n.$$

因此，$u_n(x,t)$ 代表一个驻波，$A_n\sin k_n x$ 表示弦上各点的振幅分布，$\sin(\omega_n t+\delta_n)$ 表示相位因子. ω_n 是驻波的圆频率，称为两端固定弦的固有频率或本征频率，与初始条件无关；k_n 称为波数，是单位长度上波的周期数；δ_n 是初相位，由初始条件决定. 在 $k_n x = m\pi$，即 $x = m\pi/k_n = (m/n)l,\ m = 0,1,2,3,\cdots,n$ 的各点上，振动的振幅恒为 0，称为波节. 包括弦的两个端点在内，波节点共有 $n+1$ 个. 在 $k_n x = (m+1/2)\pi$，即 $x = (2m+1)\pi/2k_n = (2m+1)l/2n,\ m = 0,1,2,3,\cdots,n-1$ 的各点上，振动振幅的绝对值恒为最大，称为波峰. 波峰点共有 n 个. 整个问题的解则是这些驻波的叠加. 正是因为这个原因，这种解法也称为驻波法.

就两端固定的弦来说，固有频率中有一个最小值，即

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}a,$$

称为基频，其他固有频率 ω_n 都是基频 ω_1 的整数倍，

$$\omega_n = n\omega_1, \quad n = 2,3,\cdots,$$

称为倍频. 弦的基频就决定了所发声音的音调，在弦乐器中，当弦的质料一定 (即 ρ 一定) 时，通过改变弦的绷紧程度 (即改变张力 T 的大小)，就可以调节基频 ω_1 的大小. 在解式 (14.10) 中，基频

和倍频的叠加系数 $\{C_n\}$ 和 $\{D_n\}$ 的相对大小决定了声音的频谱分布，即决定了声音的音色. 后面 (见 (14.20) 式) 还可以看到，和数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[|C_n|^2+|D_n|^2\right]$$

与弦的总能量成正比，所以就决定了声音的强度.

还可以进一步讨论分离变量法的解和行波解 (见 13.5 节(13.43) 式) 的联系. 为此，先将初始条件 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 作奇延拓

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\phi(-x), & -l \leq x \leq 0, \\ \phi(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} -\psi(-x), & -l \leq x \leq 0, \\ \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

然后再延拓为周期为 $2l$ 的周期函数 (仍记为 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$) . 可以看出，这样延拓的结果保证了在端点 $x=l$ 也是奇延拓. 将 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 展开为 Fourier 级数

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$\alpha_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\Phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,$$

$$\beta_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\Psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x.$$

与 (14.17) 和 (14.18) 两式相比较，就可以看出

$$\alpha_n = D_n, \qquad \beta_n = \frac{n\pi a}{l}C_n.$$

所以

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \sin\frac{n\pi}{l}at + D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}D_n\left[\sin\frac{n\pi}{l}(x-at)+\sin\frac{n\pi}{l}(x+at)\right] \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left[\cos\frac{n\pi}{l}(x-at)-\cos\frac{n\pi}{l}(x+at)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\left[\sin\frac{n\pi}{l}(x-at)+\sin\frac{n\pi}{l}(x+at)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n}{n\pi a}\left[\cos\frac{n\pi}{l}(x-at)-\cos\frac{n\pi}{l}(x+at)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\Phi(x-at)+\Phi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(x)\mathrm{d}x.$$

和行波解的形式完全一致，只不过这里的 $\Phi(x)$ 和 $\Psi(x)$ 是由初始条件 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 按照前面的法则延拓而得的．另一方面，这样得到的解式 $u(x,t)$，当然只适用于区间 $0\le x\le l$ 中．

从上面的讨论还可以看出波动在两端固定弦上的传播过程．为了简单起见，仍以单纯由初位移引起的波动为例．当 $t>0$ 时，初位移也像在无界弦上分别向左右传播，不同之处是到达端点 $x=0$ 或 $x=l$ 时，必须反射回来，并伴有额外的相位损失 π(即在端点 $x=0$ 和 $x=l$ 必须作奇延拓，这是由两端固定这样的边界条件决定的)．就弦上任意一点在任意一个时刻的位移而言，它就是初位移在两个端点间多次反复反射而叠加出的结果．对于初速度激发的波动，当然也可以类似地讨论．

练习 14.1 如果定解问题中的边界条件改为

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=0.$$

试问：这时应该如何将初始条件作延拓？

练习 14.2 如果定解问题中的边界条件改为

$$u(x,t)\Big|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=0,$$

这时又该如何将初始条件作延拓？

现在再扼要总结一下利用分离变量法求解偏微分方程定解问题的基本步骤：

1. 第一步，分离变量. 这一步之所以能够实现，先决条件是偏微分方程和边界条件都是齐次的. 而分离变量的结果，是得到了(一个或多个) 含有待定常数的齐次常微分方程和齐次边界条件，即 (一个或多个) 本征值问题.

2. 第二步，求解本征值问题.

3. 第三步，求出全部的特解，并进一步叠加出一般解. 这里，显然事先没有任何理由弃去其中的任何一个特解.

4. 第四步，利用本征函数的正交性定叠加系数.

严格说来，上面得到的还只是形式解. 对于具体问题，还必须验证：

1. 这样得到的 $u(x,t)$ 是否满足偏微分方程，换句话说，级数解是否可以逐项求二阶偏微商；

2. 这样得到的 $u(x,t)$ 是否满足边界条件，换句话说，级数解的和函数是否连续；

3. 在定叠加系数时，逐项积分是否合法.

当然，关于这三个问题，都涉及到级数解的收敛性. 由于系数 C_n 和 D_n 是由 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 决定的，因而 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的性质就决定了对这三个问题的回答. 详细的讨论见参考书目 [1]. 假定以后所讨论的问题都能够满足收敛性的要求，不再重复讨论.

从理论上说，分离变量法的成功，要取决于下列几个条件：

1. 本征值问题有解；

2. 定解问题的解一定可以按照本征函数展开，换句话说，本征函数的全体是完备的；

3. 本征函数一定具有正交性.

以后将在适当时候回答这几个问题.

练习 14.3 将下列方程分离变量：

(1) $a_1(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_1(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_2(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b_2(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$;

(2) $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0$;

(3) $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=0$;

(4) $\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\cosh\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\cosh\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)$

$\quad+\frac{1}{\sin\alpha(\cosh\beta-\cos\alpha)}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=0.$

提示：作变换 $u(\alpha,\beta,\phi)=\sqrt{\cosh\beta-\cos\alpha}\,v(\alpha,\beta,\phi)$.

练习 14.4 求解下列各本征值问题，证明各题中本征函数的正交性，并计算本征函数的模方：

(1) $\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X(0)=0, \qquad X(l)=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X(0)=0, \qquad X'(l)=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X'(0)=0, \qquad X(l)=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X(a)=0, \qquad X(b)=0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ X(0)=0, \\ \alpha X(l)+\beta X'=0; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} X''+\lambda X=0, \\ \alpha_1 X(0)+\beta_1 X'(0)=0, \\ \alpha_2 X(l)+\beta_2 X'(l)=0. \end{cases}$

练习 14.5 如果定解问题中的偏微分方程和初始条件都是齐次的，那么仿照上面分离变量的步骤一定可以得到

$$T''(t)+\lambda a^2 T(t)=0\ ,$$
$$T(0)=0,\quad T'(0)=0.$$

是否存在特定的 λ 值，可使此定解问题有非零解 $T(t)$ ？读者可从两种角度来回答这个问题：(1) 直接求解；(2) 根据第六章中介绍的常微分方程理论.

从这个问题的回答中，你能得出什么普遍性的结论？

现在讨论一下弦的总能量. 在任一时刻 t，弦的动能和位能分别是

$$\frac{1}{2}\int_0^l \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x \text{ 和 } \frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

所以，总能量为

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{14.19}$$

将解式 (14.10) 代入，利用本征函数的正交归一性，就容易求得

$$E(t)=\frac{m\pi^2a^2}{4l^2}\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left[|C_n|^2+|D_n|^2\right]. \tag{14.20}$$

等式右端显然是常数，与 t 无关，即弦的总能量守恒 ①．

根据弦的总能量守恒，还可以证明定解问题 (14.1) 的解的唯一性．这是因为，如果此定解问题有两个解， $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$ ，那么， $v(x,t)\equiv u_1(x,t)-u_2(x,t)$ 就一定满足定解问题

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0, \qquad 0<x<l,\ t>0,$$

$$v\Big|_{x=0}=0, \qquad v\Big|_{x=l}=0, \qquad t\geq 0,$$

$$v\Big|_{t=0}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \qquad 0\leq x\leq l.$$

只要能够证明 $v(x,t)=0$ 即可．从物理上可以判断，这肯定是正确的．从能量守恒的要求来看，当 $t=0$ 时弦的总能量为 0，因此以后的任一时刻 t， $E(t)$ 均为 0．这意味着一定有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t}=0,$$

即 $v(x,t)$ 为常数．由初始条件或边界条件，都能定出此常数为 0．

14.2 矩形区域内的稳定问题

上一节采用分离变量法求解了两端固定弦的自由振动问题，得到的解是无穷多个驻波的叠加．这种解法具有普遍意义，也适用于热传导方程和稳定问题 (例如 Laplace 方程) 的定解问题．下面，再用分离变量法求解矩形区域中 Laplace 方程的边值问题，以加深对于分离变量法的理解．

---

① 更严格的办法是仿照 13.6 节的作法，直接由 (14.19) 式推出 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=0$ ，而不依赖于具体的求解方法 (例如，分离变量法)．这只要将 (14.19) 式对 t 求导，利用方程 (14.1a) 及由边界条件 (14.1b) 导出的 $\left(\partial u/\partial t\right)_{x=0}=0$ 和 $\left(\partial u/\partial t\right)_{x=l}=0$ 即可证得．

设有定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<a, 0<y<b, \tag{14.21a}$$

$$u\Big|_{x=0}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=0, \quad 0\le y\le b, \tag{14.21b}$$

$$u\Big|_{y=0}=f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=0, \quad 0\le x\le a. \tag{14.21c}$$

仍用分离变量法求解. 为此，令

$$u(x,y)=X(x)Y(y), \tag{14.22}$$

代入方程 (14.21a)，分离变量，即得

$$X''(x)Y(y)=-X(x)Y''(y).$$

于是就得到

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

在这个等式中，左端只是 x 的函数 (与 y 无关)，右端只是 y 的函数 (与 x 无关)，因此，就必须共同等于一个既与 x 无关、又与 y 无关的常数. 令这个常数为 $-\lambda$，上面的结果又可以写成

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \qquad 和 \qquad Y''(y)-\lambda Y(y)=0.$$

同样，代入关于 x 的一对齐次边界条件 (14.21b)，

$$X(0)Y(y)=0, \qquad X'(a)Y(y)=0,$$

也可以分离变量得

$$X(0)=0, \qquad X'(a)=0.$$

这样，我们又得到了一个本征值问题

$$X''(x)+\lambda X(x)=0, \tag{14.23a}$$

$$X(0)=0, \qquad X'(a)=0. \tag{14.23b}$$

可以证明，

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^a X(x)X^*(x)\mathrm{d}x &= -\int_0^a X''(x)X^*(x)\mathrm{d}x\\ &= -X'(x)X^*(x)\Big|_0^a+\int_0^a X'(x)X'^*(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

代入边界条件 (14.23b)，就可以看出，如果这个本征值问题有解的话，本征值

$$\lambda = \frac{\int_0^a X'(x)X'^*(x)\mathrm{d}x}{\int_0^a X(x)X^*(x)\mathrm{d}x}$$

一定为正. 于是，常微分方程 (14.23a) 的通解就是

$$X(x) = A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x.$$

代入边界条件 (14.23b)，得到 $B=0,\ A\neq 0,\ \cos\sqrt{\lambda}a = 0$. 于是，就求出了本征值

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2a}\pi\right)^2, \qquad n = 0,1,2,3,\cdots \tag{14.24}$$

和本征函数

$$X_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2a}\pi x. \tag{14.25}$$

相应地，可以求出

$$Y_n(y) = C_n\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n\cosh\frac{2n+1}{2a}\pi y.$$

于是，就得到了既满足 Laplace 方程 (14.21a)、又满足齐次边界条件 (14.21b) 的特解

$$u_n(x,y) = \left(C_n\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n\cosh\frac{2n+1}{2a}\pi y\right)\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x. \tag{14.26}$$

将这无穷多个特解叠加起来，就得到一般解

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n\cosh\frac{2n+1}{2a}\pi y\right)\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x. \tag{14.27}$$

代入关于 y 的一对边界条件 (14.21c)，

$$u\Big|_{y=0} = \sum_{n=0}^{\infty} D_n\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x = f(x),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2a}\pi\Big(&C_n\cosh\frac{2n+1}{2a}\pi b\\ &+ D_n\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi b\Big)\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x = 0,\end{aligned}$$

再次根据本征函数的正交归一性，

$$\int_0^a \sin\frac{2n+1}{2a}\pi x \sin\frac{2m+1}{2a}\pi x \mathrm{d}x = \frac{a}{2}\delta_{nm}, \tag{14.28}$$

就可以求得

$$D_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x \mathrm{d}x \tag{14.29}$$

和

$$C_n \cosh\frac{2n+1}{2a}\pi b + D_n \sinh\frac{2n+1}{2a}\pi b = 0,$$

由此得

$$C_n = -D_n \tanh\frac{2n+1}{2a}\pi b. \tag{14.30}$$

这样，就求出了矩形区域内 Laplace 方程边值问题 (14.21) 的级数解. 如果知道了 $f(x)$ 的具体形式，就可以进一步求出叠加系数 C_n 和 D_n 的具体形式.

在这个问题中，因为是稳定问题，与时间 t 无关，因此不出现初始条件. 用分离变量法求解时，则是采用关于 x 的一对齐次边界条件构成本征值问题，而用另一对边界条件定叠加系数.

练习 14.6 如果将关于 $Y(y)$ 的常微分方程的通解写成别的形式，例如，

$$(1)\quad Y_n(y) = A\exp\left\{\frac{2n+1}{2a}\pi y\right\} + B\exp\left\{-\frac{2n+1}{2a}\pi y\right\},$$

$$(2)\quad Y_n(y) = A\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + B\cosh\frac{2n+1}{2a}\pi(b-y),$$

再重新求解上述定解问题. 试问：(1) 结果有何不同？(2) 采用何种形式的 $Y_n(y)$，计算更简单？

练习 14.7 如果定解问题的边界条件全是非齐次的，例如，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, && 0 < x < a, 0 < y < b, \\
&u\Big|_{x=0} = f(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = g(y), && 0 \le y \le b, \\
&u\Big|_{y=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b} = \psi(x), && 0 \le x \le a.
\end{aligned}$$

这时应该如何利用分离变量法求解？

14.3 多于两个自变量的定解问题

前两节中，讨论的偏微分方程定解问题都具有两个自变量. 对于两端固定弦的自由振动，我们利用齐次偏微分方程和齐次边界条件分离变量，导出本征值问题并求解，再由满足齐次方程和齐次边界条件的全部特解叠加出一般解，最后利用初始条件定出叠加系数. 在 14.2 节的二维 Laplace 方程的边值问题中，则是利用齐次方程和齐次边界条件分离变量，利用非齐次边界条件定叠加系数. 当定解问题的自变量超过两个时 (当然时间变量最多只能一个)，原则上可以类似地求解. 但也有一些技术性的细节需要注意. 下面就扼要地讨论一下矩形介质的热传导问题，假设介质的四周绝热. 通过这个实例，可以看到，由于自变量数目的增多，以及边界条件类型的改变，求解过程中又出现了一些新的特点.

现在的定解问题是

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0, \quad 0<x<a, 0<y<b, t>0, \tag{14.31a}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=0, \quad 0\le y\le b, t\ge 0, \tag{14.31b}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{x=b}=0, \quad 0\le x\le a, t\ge 0, \tag{14.31c}$$

$$u\Big|_{t=0}=\phi(x,y), \qquad 0\le x\le a, 0\le y\le b. \tag{14.31d}$$

设

$$u(x,y,t)=v(x,y)T(t), \tag{14.32}$$

代入方程，分离变量，得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\lambda v(x,y)=0, \tag{14.33}$$

$$T''(t)+\lambda\kappa T(t)=0, \tag{14.34}$$

其中 λ 是分离变量时引进的待定常数. 再令

$$v(x,y)=X(x)Y(y), \tag{14.35}$$

代入方程 (14.33) 及边界条件 (14.31b) 、 (14.31c) ，再次分离变量，可以进一步得到

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \tag{14.36a}$$

$$X'(0) = 0, \quad X'(a) = 0 \tag{14.36b}$$

和

$$Y''(y) + \nu Y(y) = 0, \tag{14.37a}$$

$$Y'(0) = 0, \quad Y'(b) = 0. \tag{14.37b}$$

这里又引进了两个常数 μ 和 ν ，但 μ, ν 和 λ 中只有两个是独立的，它们必须满足 $\mu + \nu = \lambda$. 为了书写的方便，我们额外地多写了一个常数.

现在就着手求解本征值问题 (14.36) . 为此，首先仿照前两节的做法，求得

$$\begin{aligned}\mu \int_0^l X(x)X^*(x)\mathrm{d}x &= -\int_0^l X''(x)X^*(x)\mathrm{d}x \\ &= -X'(x)X^*(x)\Big|_0^l + \int_0^l X'(x)X'^*(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^l X'(x)X'^*(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以，一定有

$$\mu = \frac{\displaystyle\int_0^l X'(x)X'^*(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l X(x)X^*(x)\mathrm{d}x} \geq 0.$$

和前两节不同的的是这里可以允许 $\mu = 0$ ，这是因为当 $\mu = 0$ 时，本征值问题 (14.36) 仍然有非零解 $X(x) = A$, A 是任意常数. 这样，

$$\mu_0 = 0 \tag{14.38}$$

也是一个本征值，相应的本征函数可以取为

$$X_0(x) = 1. \tag{14.39}$$

当 $\mu > 0$ 时，方程 (14.36a) 的通解为

$$X(x) = A\sin\sqrt{\mu}x + B\cos\sqrt{\mu}x,$$

代入边界条件 (14.36b)，有

$$\begin{aligned} X'(0) &= A\sqrt{\mu} = 0, \\ X'(l) &= A\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}l - B\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}l = 0. \end{aligned}$$

所以， $A = 0, B \neq 0, \sin\sqrt{\mu}l = 0$. 因此求得 $\sqrt{\mu}l = n\pi$ ，即

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots. \tag{14.40}$$

相应的本征函数是 (取 $B = 1$)

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{l}x. \tag{14.41}$$

把 $\mu = 0$ 和 $\mu > 0$ 的结果合并起来，就可以统一写成

$$\text{本征值} \qquad \mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \tag{14.42a}$$

$$\text{本征函数} \qquad X_n(x) = \cos\frac{n\pi}{a}x. \tag{14.42b}$$

同样可以解得本征值问题 (14.37) 的解为

$$\text{本征值} \qquad \nu_m = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \qquad m = 0, 1, 2, 3, \cdots, \tag{14.43a}$$

$$\text{本征函数} \qquad Y_m(x) = \cos\frac{m\pi}{b}y. \tag{14.43b}$$

必须注意，这里的 n 和 m 是互相独立的. 对于给定的 n 和 m ，再进一步求出方程 (14.34) 的通解

$$\begin{aligned} T_{00}(t) &= A_{00}, & n = m = 0, \\ T_{nm}(t) &= A_{nm}\,\mathrm{e}^{-\lambda_{nm}\kappa t}, & \text{其他情形}, \end{aligned}$$

并且又可以写成统一的形式

$$T_{nm}(t) = A_{nm}\,\mathrm{e}^{-\lambda_{nm}\kappa t}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \cdots, \quad m = 0, 1, 2, 3, \cdots, \tag{14.44}$$

其中

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2.$$

因此，就求得整个定解问题的特解

$$\begin{aligned} u_{nm}(x,y,t) &= X_n(x)Y_m(y)T_{nm}(t) \\ &= A_{nm}\cos\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y\,\mathrm{e}^{-\lambda_{nm}\kappa t} \end{aligned} \tag{14.45}$$

和一般解

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}u_{nm}(x,y,t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}\cos\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y\,\mathrm{e}^{-\lambda_{nm}\kappa t} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}\cos\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y \\ &\qquad\times\exp\left\{-\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\kappa t\right\}. \end{aligned} \tag{14.46}$$

代入初始条件，有

$$\begin{aligned} u(x,y,t)\Big|_{t=0} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_{nm}\cos\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y \\ &= \phi(x,y). \end{aligned} \tag{14.47}$$

下一步当然就应当根据本征函数的正交性定出叠加系数．需要注意，现在既要用到 $\{X_n(x), n=0,1,2,3,\cdots\}$ 的正交性，又要用到 $\{Y_m(y), m=0,1,2,3,\cdots\}$ 的正交性，缺一不可．其次，考虑到它们的正交归一性

$$\int_0^a X_n(x)X_{n'}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a}{2}\left(1+\delta_{n0}\right)\delta_{nn'}, \tag{14.48}$$

$$\int_0^b Y_m(y)Y_{m'}(y)\,\mathrm{d}y = \frac{b}{2}\left(1+\delta_{m0}\right)\delta_{mm'}. \tag{14.49}$$

在计算中还需要留心区分 $n=0$ 与 $n\neq 0$ 和 $m=0$ 与 $m\neq 0$ 的情形．计算的结果是

$$\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{4}{ab}\frac{1}{\left(1+\delta_{n0}\right)\left(1+\delta_{m0}\right)} \\ &\qquad\times\int_0^a\int_0^b\phi(x,y)\cos\frac{n\pi}{a}x\cos\frac{m\pi}{b}y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{14.50}$$

14.4 两端固定弦的强迫振动

在前几节的讨论中，我们特别强调了齐次偏微分方程和齐次边界条件在分离变量法中的关键作用：因为方程和边界条件是齐次的，分离变量才得以实现．读者自然要问，如果定解问题中的方程和边界条件不是齐次的，还有没有可能应用分离变量法．这一节就讨论方程是非齐次的情形．

为了突出对于方程非齐次项的处理，我们研究纯粹由外力引起的两端固定弦的强迫振动，弦的初位移和初速度均为 0．这样，定解问题就是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\qquad 0<x<l,\ t>0, \tag{14.51a}$$

$$u\Big|_{x=0}=0,\qquad u\Big|_{x=l}=0,\qquad t\geq 0, \tag{14.51b}$$

$$u\Big|_{t=0}=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\qquad 0\leq x\leq l. \tag{14.51c}$$

对于这个问题，原则上有两种处理方法．首先，按照求解非齐次方程的一贯做法，不妨先求得非齐次方程的一个特解 $v(x,t)$，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=f(x,t). \tag{14.52}$$

这样，如果设

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \tag{14.53}$$

则 $w(x,t)$ 一定是相应齐次方程的解，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0. \tag{14.54}$$

需要注意，为能应用分离变量法，$w(x,t)$ 必须满足齐次边界条件

$$w(x,t)\Big|_{x=0}=0,\qquad w(x,t)\Big|_{x=l}=0. \tag{14.55}$$

确切地说，我们所要寻求的特解 $v(x,t)$ 应该同时满足非齐次方程和齐次边界条件．一旦求得了这样的特解，重复第 14.1 节中的步骤，就可以求出 $w(x,t)$ 的一般解

$$u(x,t) = v(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \sin\frac{n\pi}{l}at + D_n \cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \quad (14.56)$$

再代入初始条件，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = -v(x,t)\Big|_{t=0},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = -\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0},$$

利用本征函数的正交归一性，就可以定出叠加系数

$$C_n = -\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} \sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, \quad (14.57)$$

$$D_n = -\frac{2}{l}\int_0^l v(x,0)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x. \quad (14.58)$$

这种解法可以简单地称为方程齐次化法. 但要注意，在将非齐次方程齐次化的同时，必须保持原有的齐次边界条件不变. 所以，完整的、准确的说法应该是称为方程和边界条件的同时齐次化. 这种解法的关键就在于求得特解 $v(x,t)$. 如果方程的非齐次项 $f(x,t)$ 的形式比较简单，可以尝试采用这种解法.

从求解过程可以看出，齐次初始条件的限制可以取消.

先举一个简单的例子，方程的非齐次项只是 x 的函数.

例 14.1 求解定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x), \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \quad (14.59a)$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=l} = 0, \qquad t \geq 0, \quad (14.59b)$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leq x \leq l, \quad (14.59c)$$

其中 $f(x)$ 为已知函数.

解 这里只给出解题的主要思路. 由于方程的非齐次项只是 x 的函数，我们就可以把齐次化函数也取为只是 x 的函数，即设

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t), \quad (14.60)$$

其中 $v(x)$ 可以由常微分方程的边值问题

$$v''(x) = -\frac{1}{a^2}f(x), \tag{14.61a}$$

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0 \tag{14.61b}$$

容易地求出，而 $w(x,t)$ 则满足定解问题

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{14.62a}$$

$$w\Big|_{x=0} = 0, \qquad w\Big|_{x=l} = 0, \qquad t \geq 0, \tag{14.62b}$$

$$w\Big|_{t=0} = -v(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leq x \leq l, \tag{14.62c}$$

也不难求解.

再举一个比较复杂的例子.

例 14.2 求解定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A_0 \sin\omega t, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{14.63a}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad u\Big|_{x=l} = 0, \qquad t \geq 0, \tag{14.63b}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leq x \leq l, \tag{14.63c}$$

其中 a, A_0 及 ω 均为已知常数.

解 设

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{14.64}$$

其中的齐次化函数 $v(x,t)$ 取为

$$v(x,t) = f(x)\sin\omega t. \tag{14.65}$$

我们选择 $f(x)$，使得 $v(x,t)$ 满足非齐次方程及齐次边界条件，即

$$-\omega^2 f(x) - a^2 f''(x) = A_0, \tag{14.66a}$$

$$f(0) = 0, \qquad f(l) = 0. \tag{14.66b}$$

非齐次常微分方程 (14.66a) 的通解为

$$f(x) = -\frac{A_0}{\omega^2} + A\sin\frac{\omega}{a}x + B\cos\frac{\omega}{a}x.$$

利用齐次边界条件 (14.66b) 可以定出

$$B = \frac{A_0}{\omega^2}, \qquad A = \frac{A_0}{\omega^2}\tan\frac{\omega l}{2a}.$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{A_0}{\omega^2}\left[\left(1-\cos\frac{\omega}{a}x\right)-\tan\frac{\omega l}{2a}\sin\frac{\omega}{a}x\right] \\ &= -\frac{A_0}{\omega^2}\left[1-\frac{\cos(\omega(x-l/2)/a)}{\cos(\omega l/2a)}\right]. \end{aligned} \tag{14.67}$$

这样就能导出 $w(x,t)$ 所满足的定解问题，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \qquad 0<x<l,\ t>0, \tag{14.68a}$$

$$w\Big|_{x=0}=0, \quad w\Big|_{x=l}=0, \qquad t\geq 0, \tag{14.68b}$$

$$w\Big|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=-\omega f(x), \qquad 0\leq x\leq l. \tag{14.68c}$$

容易求出此定解问题的一般解为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\sin\frac{n\pi}{l}at+D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right]\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{14.69}$$

利用上面的初始条件就可以定出

$$D_n = 0, \tag{14.70a}$$

$$\begin{aligned} C_n &= -\frac{2\omega}{n\pi a}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\frac{1-(-)^n}{n^2}\frac{1}{(n\pi a)^2-(\omega l)^2}. \end{aligned} \tag{14.70b}$$

这说明，只有 $n=$ 奇数 时， C_n 才不为 0 . 这样，最后就求出了

$$\begin{aligned} w(x,t) = -\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}&\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\right. \\ &\left.\times\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\,\sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right] \end{aligned} \tag{14.71}$$

和

$$u(x,t) = -\frac{A_0}{\omega^2}\left[1-\frac{\cos\omega(x-l/2)/a}{\cos(\omega l/2a)}\right]\sin\omega t$$

$$
-\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\right.
$$

$$
\left.\times\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right]. \tag{14.72}
$$

在上面的解题过程中，还忽略了一个特殊情形，即强迫力的角频率 ω 正好是弦的某些固有频率，例如 $\omega=(2k+1)\pi a/l$, k 为某个确定的非负整数时，弦在强迫力的作用下会发生共振现象. 表现在求解过程中，作为常微分方程边值问题 (14.66) 的解， (14.67) 式即失去意义，此后的解题过程均需作相应的修改. 事实上，最后的解应该就是 (14.72) 式在 $\omega\to(2k+1)\pi a/l$ 下的极限值. 为此，将 (14.72) 式中和式内 $n=k$ 的一项单独提出，而改写成

$$
\begin{aligned}
u(x,t)=&-\frac{A_0}{\omega^2}\left[1-\frac{\cos(\omega(x-l/2)/a)}{\cos(\omega l/2a)}\right]\sin\omega t\\
&-\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{1}{[(2k+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\\
&\times\sin\frac{2k+1}{l}\pi x\sin\frac{2k+1}{l}\pi at\\
&-\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\right.\\
&\left.\times\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right]\\
=&-\frac{A_0 l^2}{[(2k+1)\pi a]^2}\left(1-\cos\frac{2k+1}{l}\pi x\right)\sin\frac{2k+1}{l}\pi at\\
&+\frac{A_0 l^2}{[(2k+1)\pi a]^2}\left\{\tan\frac{\omega l}{2a}\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t-\frac{4(\omega l)^3}{\pi^2 a}\frac{1}{(2k+1)^2}\right.\\
&\left.\times\frac{1}{[(2k+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x\sin\frac{2k+1}{l}\pi at\right\}\\
&-\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\right.\\
&\left.\times\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right],
\end{aligned}
$$

其中 $\sum'$ 表示和式中不含 $n=k$ 项. 当 $\omega\to(2k+1)\pi a/l$ 时，上式中大括号内的表达式为不定式，可以求出它的极限值，从而给出解

$$\begin{aligned}u(x,t)=&-\frac{A_0l^2}{[(2k+1)\pi a]^2}\left[1-\cos\frac{2k+1}{l}\pi x\right.\\&\left.-\frac{5}{(2k+1)\pi}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x\right]\sin\frac{2k+1}{l}\pi at\\&-\frac{2A_0l^2}{[(2k+1)\pi a]^2}\left[\frac{x}{l}\cos\frac{2k+1}{l}\pi x\sin\frac{2k+1}{l}\pi at\right.\\&\left.+\frac{at}{l}\sin\frac{2k+1}{l}\pi x\cos\frac{2k+1}{l}\pi at\right]\\&-\frac{4A_0(2k+1)l^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{(2n+1)^2-(2k+1)^2}\right.\\&\left.\times\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\sin\frac{2n+1}{l}\pi at\right].\end{aligned}\tag{14.73}$$

对于稳定问题，如果方程是非齐次的，也可以类似地处理.

例 14.3 求解定解问题

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=xy,\qquad 0<x<a,\ 0<y<b,\tag{14.74a}$$

$$u\Big|_{x=0}=0,\qquad u\Big|_{x=a}=0,\qquad 0\le y\le b,\tag{14.74b}$$

$$u\Big|_{y=0}=\phi(x),\quad u\Big|_{y=b}=\psi(x),\quad 0\le x\le a.\tag{14.74c}$$

解 应用第十三章中的方法，容易求出方程 (14.74a) 的通解是

$$\frac{1}{6}x^3y+f(x+\mathrm{i}y)+g(x-\mathrm{i}y).$$

可以适当选择函数 f 和 g，例如，

$$f(x+\mathrm{i}y)+g(x-\mathrm{i}y)=-\frac{a^2}{24\mathrm{i}}\left[(x+\mathrm{i}y)^2-(x-\mathrm{i}y)^2\right]=-\frac{1}{6}a^2xy,$$

使得到的解

$$v(x,y)=\frac{1}{6}\left(x^2-a^2\right)xy\tag{14.75}$$

满足齐次边界条件

$$v(x,y)\Big|_{x=0}=0,\quad v(x,y)\Big|_{x=a}=0.$$

令

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x,y), \tag{14.76}$$

就可以导出 $w(x,t)$ 所应满足的定解问题，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0, && 0<x<a,\ 0<y<b,\\
&w\Big|_{x=0}=0, \qquad w\Big|_{x=a}=0, && 0\le y\le b,\\
&w\Big|_{y=0}=\phi(x),\ w\Big|_{y=b}=\psi(x)-\frac{b}{6}\left(x^2-a^2\right)x, && 0\le x\le a.
\end{aligned}$$

其中的方程和一对边界条件都是齐次的，因此，很容易求解.

练习 14.8 如果定解问题中的方程和初始条件都是非齐次的，但边界条件仍是齐次的，例如，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), && 0<x<l, t>0,\\
&u\Big|_{x=0}=0, \qquad u\Big|_{x=l}=0, && t\ge 0,\\
&u\Big|_{t=0}=\phi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), && 0\le x\le l.
\end{aligned}$$

重复上面的办法，利用分离变量法求解.

练习 14.9 如果定解问题中的方程和边界条件都是非齐次的，例如，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), && 0<x<l,\ t>0,\\
&u\Big|_{x=0}=\mu(t), \quad u\Big|_{x=l}=\nu(t), && t\ge 0,\\
&u\Big|_{t=0}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, && 0\le x\le l.
\end{aligned}$$

这时是否仍然可以仿照上面的方法求解？

如果方程非齐次项 $f(x,t)$ 的形式比较复杂，难以求得非齐次方程的特解，就可以采用下面的第二种解法. 这种解法的中心思想是设法找到一组本征函数 $\{X_n(x),\ n=1,2,3,\cdots\}$，只要这组本征函数是完备的，那么，就可以将所要求的解 $u(x,t)$ 及非齐次方程的非齐次项 $f(x,t)$ 均按本征函数展开

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x), \tag{14.77}$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n(x), \tag{14.78}$$

然后再设法求出 $T_n(t)$ 即可．由于 $T_n(t)$ 是一元函数，它满足的是常微分方程 (组)，有可能比求解偏微分方程来得简单．

本征函数组 $\{X_n(x)\}$ 的选取，首先当然必须满足定解问题的齐次边界条件 (14.51b)，即

$$X_n(0) = 0, \qquad X_n(l) = 0. \tag{14.79}$$

对于 $\{X_n(x)\}$ 所满足的微分方程，原则上说，并没有什么限制．但从实际可行性来看，最简单的做法是选择 $\{X_n(x)\}$ 为相应齐次定解问题的本征函数，即满足由齐次偏微分方程和齐次边界条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l,\ t > 0,$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad u\Big|_{x=l} = 0, \qquad t \geq 0$$

分离变量而得到的本征值问题

$$X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0,$$

$$X_n(0) = 0, \qquad X_n(l) = 0.$$

这样，把 $u(x,t)$ 和 $f(x,t)$ 的展开式 (14.77) 和 (14.78) 代入偏微分方程 (14.51a)，并逐项微商，

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) - a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n(x).$$

利用 $X_n(x)$ 所满足的常微分方程，又可以化成

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) X_n(x) + a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n(x).$$

再根据本征函数的正交性，就得到 $T_n(t)$ 所满足的常微分方程

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = g_n(t). \tag{14.80}$$

同样，将 $u(x,t)$ 的展开式 (14.77) 代入初始条件 (14.51c)，也可得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) X_n(x) = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) X_n(0) = 0.$$

根据本征函数的正交性，即能导出

$$T_n(0)=0, \qquad T_n'(0)=0. \tag{14.81}$$

用解非齐次常微分方程的常数变易法，或者用 Laplace 变换，就可以最后求出非齐次方程 (14.80) 在初始条件 (14.81) 下的解

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t g_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}a(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{14.82}$$

这第二种解法，称为按相应齐次问题的本征函数展开法.

练习 14.10 为什么本征函数组 $\{X_n(x)\}$ 必须满足定解问题的齐次边界条件 (14.51b) 或 (14.79)？这个限制是否可以取消？

也还可以用第二种方法求解例 14.2 中的定解问题. 相应齐次问题的本征函数已经在 14.1 节中给出，因此可以设

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{14.83}$$

同时将非齐次项 $A_0\sin\omega t$ 也按这一组本征函数展开，

$$A_0\sin\omega t=\frac{2A_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\omega t, \tag{14.84}$$

代入方程 (14.63a) 和初始条件 (14.63c)，就得到

$$T''(t)+\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2T_n(t)=\frac{2A_0}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin\omega t,$$
$$T(0)=0, \qquad T'(0)=0.$$

解之即得

$$\begin{aligned}T_n(t)\ =\ &\frac{2A_0l^2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}\frac{1}{(n\pi a)^2-(\omega l)^2}\sin\omega t\\ &-\frac{2A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\frac{1}{(n\pi a)^2-(\omega l)^2}\sin\frac{n\pi}{l}at.\end{aligned} \tag{14.85}$$

因此又可以求出例 14.2 的另一种形式的解

$$\begin{aligned}u(x,t)\ =\ &\frac{4A_0l^2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\ \sin\omega t\\ &-\frac{4A_0\omega l^3}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{[(2n+1)\pi a]^2-(\omega l)^2}\right.\end{aligned}$$

$$\times \sin\frac{2n+1}{l}\pi x \sin\frac{n\pi}{l}at\Bigg]. \tag{14.86}$$

将 (14.72) 式中的齐次化函数也按本征函数组 $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x,\ n = 1,2,3,\cdots\right\}$ 展开，就可以将 (14.72) 式化为 (14.86) 式.

对于稳定问题，例如， Poisson 方程的第一类边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial xy^2}=f(x,y), \qquad 0<x<a,\ 0<y<b, \tag{14.87a}$$

$$u\Big|_{x=0}=0, \qquad u\Big|_{x=a}=0, \qquad 0\le y\le b, \tag{14.87b}$$

$$u\Big|_{y=0}=0, \qquad u\Big|_{y=b}=0, \qquad 0\le x\le a, \tag{14.87c}$$

当然也可用按相应齐次问题本征函数展开的办法求解. 例如，可设

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x, \tag{14.88}$$

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(y)\sin\frac{n\pi}{a}x. \tag{14.89}$$

代入方程 (14.87a) 和边界条件 (14.87b) ，可得

$$Y_n''(y)-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y_n(y)=g_n(y),$$

$$Y_n(0)=0, \qquad Y_n(b)=0,$$

求出 $Y_n(y)$ ，代回到 (14.88) 式中，就给出了解 $u(x,y)$. 完全等价地，也可以设

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m(x)\sin\frac{m\pi}{b}y, \tag{14.90}$$

$$f(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} h_m(x)\sin\frac{m\pi}{b}y, \tag{14.91}$$

而后导出 $X_m(x)$ 满足的非齐次常微分方程边值问题

$$X_m''(x)-\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 X_m(x)=h_m(x),$$

$$X_m(0)=0; \qquad X_m(a)=0,$$

求出 $X_m(x)$ 即可. 这两种做法没有多大差别. 主要的不同是非齐

次项 $g_n(y)$ 和 $h_m(x)$ 的函数形式可能不同，因而在关于 $Y_n(y)$ 和 $X_m(x)$ 的非齐次两个常微分方程中有一个更易于求解. 但是，还可以考虑更进一步的做法，即将 $u(x,y)$ 和 $f(x,y)$ 同时既按本征函数 $\{X_n(x)\}$ 、又按本征函数 $\{Y_m(y)\}$ 展开 (为二重级数)

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y, \tag{14.92}$$

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y, \tag{14.93}$$

其中的展开系数 c_{nm} 待求. 因为 $f(x,y)$ 是已知函数，所以 c_{nm} 也是已知的. 在作二重级数展开时，当然已经考虑了边界条件 (14.87b) 和 (14.87c) . 将展开式 (14.90) 和 (15.41) 代入方程 (14.87a) ，即得

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} c_{nm}\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} d_{nm} \sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y.$$

根据本征函数的正交性，比较系数，即得

$$-c_{nm}\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right] = d_{nm}.$$

于是

$$c_{nm} = -\frac{d_{nm}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}.$$

最后，求得解

$$u(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_{nm}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}\sin\frac{n\pi}{a}x \sin\frac{m\pi}{b}y. \tag{14.94}$$

这种做法的好处是完全避免了求解非齐次常微分方程.

14.5 非齐次边界条件的齐次化

现在再来讨论非齐次边界条件的处理. 到目前为止，除了在稳

定问题中需要有一部分边界条件用于定叠加系数、因而允许是非齐次的以外，我们总是要求边界条件是齐次的. 上面列举出各种理由来说明为什么边界条件必须是齐次的，例如说，非齐次边界条件不能分离变量，又说，只有满足齐次方程和齐次边界条件的特解叠加起来才仍能满足齐次方程和齐次边界条件. 但最根本的原因涉及到本征函数的完备性，我们将在第十八章中讨论这个问题.

为了叙述的方便，下面仍以波动方程的定解问题为例，讨论边界条件为非齐次时的求解问题. 而且，为了突出非齐次边界条件的处理，假定方程和初始条件都是齐次的.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad 0<x<l,\ t>0, \tag{14.95a}$$

$$u\Big|_{x=0}=\mu(t), \quad u\Big|_{x=l}=\nu(t), \qquad t\geq 0, \tag{14.95b}$$

$$u\Big|_{t=0}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=0, \qquad 0\leq x\leq l. \tag{14.95c}$$

这时为了应用分离变量法，别无选择，只有先将非齐次边界条件齐次化，即令

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t), \tag{14.96}$$

适当选择 $v(x,t)$ ，使之满足

$$v(x,t)\Big|_{x=0}=\mu(t), \quad v(x,t)\Big|_{x=l}=\nu(t). \tag{14.97}$$

这样， $w(x,t)$ 当然就一定满足齐次边界条件

$$w(x,t)\Big|_{x=0}=0, \quad w(x,t)\Big|_{x=l}=0. \tag{14.98}$$

一般说来， $w(x,t)$ 所满足的方程和初始条件都将是非齐次的 ①，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right),$$

$$w\Big|_{t=0}=-v\Big|_{t=0}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=-\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

---

① 读者不必考虑 $w(x,t)$ 又满足齐次方程和齐次初始条件的情形. 因为如果这样的话，一定有 $w(x,t)=0$. 这意味着 $v(x,t)=u(x,t)$ 就是原定解问题 (14.95) 的解.

采用第 14.4 节中的办法，就可以求出 $w(x,t)$，再代回到 (14.96) 式中，就给出了定解问题 (14.95) 的解 $u(x,t)$.

关于齐次化函数 $v(x,t)$，有相当大的选择余地，因为仅要求它满足 (14.97) 式. 如果把 t 看成是参数，这就只要求在 (x,y) 平面上的曲线 $y=v(x,t)$ 通过给定的两点 $(0,\mu(t))$ 和 $(l,\nu(t))$ 即可. 这样的曲线当然有无穷多种. 例如，可取直线

$$v(x,t)=A(t)x+B(t),$$

代入 (14.97) 式，即可定出

$$B(t)=\mu(t),\quad A(t)=\frac{1}{l}\big[\nu(t)-\mu(t)\big].$$

也可取抛物线

$$\begin{aligned}&v(x,t)=A(t)x^2+B(t),\\&A(t)=\frac{1}{l^2}\big[\nu(t)-\mu(t)\big],\quad B(t)=\mu(t),\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&v(x,t)=A(t)(l-x)^2+B(t)x^2,\\&A(t)=\frac{1}{l^2}\mu(t),\quad B(t)=\frac{1}{l^2}\nu(t).\end{aligned}$$

练习 14.11 如果将定解问题 (14.95) 中的边界条件改为第二类，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\mu(t),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\nu(t).$$

试问：这时的齐次化函数 $v(x,t)$ 应如何选取？

练习 14.12 如果将定解问题中的边界条件是混合型的，例如，

$$\left.u\right|_{x=0}=\mu(t),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\nu(t).$$

这时的齐次化函数 $v(x,t)$ 又该如何选取？

例 14.4 求解定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l,\ t>0,\tag{14.99a}$$

$$\left.u\right|_{x=0}=A\sin\omega t,\quad \left.u\right|_{x=l}=0,\qquad t\geq 0,\tag{14.99b}$$

$$\left.u\right|_{t=0}=0,\qquad 0\leq x\leq l.\tag{14.99c}$$

解 考虑到非齐次边界条件的具体形式，可设齐次化函数为

$$v(x,t)=A\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin\omega t.$$

于是令

$$u(x,t)=A\left(1-\frac{x}{l}\right)\sin\omega t+w(x,t), \tag{14.100}$$

则 $w(x,t)$ 满足定解问题

$$\frac{\partial w}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-A\omega\left(1-\frac{x}{l}\right)\cos\omega t,\quad 0<x<l,\ t>0, \tag{14.101a}$$

$$w\Big|_{x=0}=0,\qquad w\Big|_{x=l}=0,\qquad t\geq 0, \tag{14.101b}$$

$$w\Big|_{t=0}=0,\qquad 0\leq x\leq l. \tag{14.101c}$$

将 $w(x,t)$ 和方程的非齐次项 $1-x/l$ 都按相应齐次问题的本征函数展开，有

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad 1-\frac{x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{14.102}$$

根据 $T_n(t)$ 所应该满足非齐次一阶常微分方程

$$T_n'(t)+\kappa\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2T_n(t)=-\frac{2A\omega}{n\pi}\cos\omega t$$

和初始条件

$$T_n(0)=0,$$

容易求出

$$T_n(t)=\frac{2A\omega l^2}{n\pi}\frac{1}{\kappa^2(n\pi)^4+\omega^2l^4}\left\{\kappa(n\pi)^2\exp\left[-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\kappa t\right]\right.$$
$$\left.-\kappa(n\pi)^2\cos\omega t-\omega l^2\sin\omega t\right\}. \tag{14.103}$$

这样就求得了 $w(x,t)$ ，再代回 (14.100) 式，就得到定解问题的解 $u(x,t)$.

选择不同的齐次化函数 $v(x,t)$ ，当然导出的 $w(x,t)$ 的定解问题也就不同，于是求出的 $w(x,t)$ 也就不同. 但是，由于定解问题的解的存在唯一性，就保证了最后给出的 $u(x,t)$ 一定是相同的，尽管表达式的形式可能有所不同.

这样看来，似乎可以提出一个更高的要求：选择合适的齐次化函数 $v(x,t)$，使得 $w(x,t)$ 所满足的定解问题尽可能简单些. 最理想的情况，当然就是不论原来 $u(x,t)$ 的方程是不是齐次的，最终 $w(x,t)$ 的方程是齐次的. 就定解问题 (14.95) 而言，这意味着要求齐次化函数 $v(x,t)$ 也是方程 (14.95) 的解，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0.$$

当然，对于某些特殊的 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$，是可以做到这一点的. 不论原来的方程是不是齐次的，我们把这种方法都简单地称为将方程和边界条件同时齐次化. 下面通过一个具体的例子说明一般的思路. 尽管这个例子中边界条件的类型和 (14.95) 略有不同，但是处理方法的精神是相同的.

例 14.5 求解定解问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{14.104a}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = A\sin\omega t, \qquad t \geq 0, \tag{14.104b}$$

$$u\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, \qquad 0 \leq x \leq l. \tag{14.104c}$$

解 现在就试图找到一个齐次化函数，将方程和边界条件同时齐次化. 为此，设 $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$，考虑到非齐次边界条件的具体函数形式，可取齐次化函数 $v(x,t)$ 为

$$v(x,t) = f(x)\sin\omega t, \tag{14.105}$$

且 $f(x)$ 是下列常微分方程边值问题

$$f''(x) + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 f(x) = 0,$$
$$f(0) = 0, \qquad f'(l) = A$$

的解. 容易求得，

$$f(x) = \frac{Aa}{\omega}\frac{1}{\cos\frac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega}{a}x. \tag{14.106}$$

于是，就得到 $w(x,t)$ 所满足的定解问题，

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{14.107a}$$

$$w\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \qquad t \geq 0, \tag{14.107b}$$

$$w\Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\frac{Aa}{\cos\dfrac{\omega l}{a}}\sin\frac{\omega}{a}x, \qquad 0 \leq x \leq l. \tag{14.107c}$$

其一般解为

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n \sin\frac{2n+1}{2l}\pi a t + D_n \cos\frac{2n+1}{2l}\pi a t\right)\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x. \tag{14.108}$$

根据初始条件，可以定出

$$\begin{aligned} C_n &= -\frac{4A}{\pi\cos\dfrac{\omega l}{a}}\frac{1}{2n+1}\int_0^l \sin\frac{\omega}{a}x\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\mathrm{d}x \\ &= (-)^n\frac{4A\omega}{(2n+1)\pi a}\frac{1}{\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}, \end{aligned} \tag{14.109}$$

$$D_n = 0. \tag{14.110}$$

将这样求得的 $v(x,t)$ 和 $w(x,t)$ 代回到 (14.105) 式中，就最后给出了定解问题 (14.104) 的解 $u(x,t)$.

在这个例子中，之所以能够容易地找到齐次化函数 $v(x,t)$ ，使得方程和非齐次边界条件同时齐次化，当然是由边界条件中非齐次项的具体形式决定的. 这里，非齐次项的函数形式是 $\sin\omega t$ ，而方程正好又有

$$(A\sin kx + B\cos kx)(C\sin kat + D\cos kat)$$

形式的特解.

现在，对于给定的一个具有非齐次边界条件的定解问题，我们就有两种解法可供选择. 到底只是简单地将边界条件齐次化，还是力求使方程也同时齐次化，需要视具体条件而定. 在有的时候，尽管也能使方程和边界条件同时齐次化，但如果齐次化函数 $v(x,t)$

的形式过于复杂，求解起来不是那么容易，而且导出的 $w(x,t)$ 的定解问题也比较复杂，也许还是找一个形式比较简单的函数，只将边界条件齐次化来得方便．前面的例 14.4 就是如此．尽管我们可以找到齐次化函数

$$v(x,t)=\frac{A}{\cosh\alpha l-\cos 2\alpha l}\Big\{\big[\cosh\alpha(2l-x)\cos\alpha x - \cosh\alpha x\cos\alpha(2l-x)\big]\sin\omega t+\big[\sinh\alpha x\sin\alpha(2l-x) - \sinh\alpha(2l-x)\sin\alpha x\big]\cos\omega t\Big\},$$

在使边界条件 (14.95b) 齐次化的同时，保持方程仍为齐次，其中 $\alpha=\sqrt{\omega/2\kappa}$．但要求出 $v(x,t)$ 就需要相当的计算过程 [①]，而且，由此得到的 $w(x,t)$ 的初始条件的形式也相当复杂，在定叠加系数是也需要相当的计算量．这样做的结果，既没有减少计算，也没有使得解的表达式简化．因此，看来并不可取．

---

① 介绍一下求 $v(x,t)$ 的特殊技巧倒是有意义的．由于这里遇到的是热传导方程，只出现对于时间 t 的一阶偏导数，因此如果简单地将齐次化函数取为 $f(x)\sin\omega t$，不可能使方程仍保持齐次．为了保证将方程和非齐次边界条件同时齐次化，比较简单的办法是考虑复函数 $U(x,t)$，它满足的方程和边界条件是

$$\frac{\partial U}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l,\ t>0,$$

$$U\Big|_{x=0}=A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},\quad U\Big|_{x=l}=0,\qquad t\geq 0.$$

显然，$U(x,t)$ 的虚部就满足和例 14.4 中 $u(x,t)$ 相同的方程及边界条件．取齐次化函数 $V(x,t)=F(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，则 $F(x)$ 应该满足齐次常微分方程

$$F''(x)-2\mathrm{i}\alpha^2F(x)=0,\qquad \alpha^2=\omega/2\kappa$$

及边界条件

$$F(0)=A,\qquad F(l)=0.$$

于是，可以求出

$$F(x)=A\frac{\sinh\alpha(1+\mathrm{i})(l-x)}{\sinh\alpha(1+\mathrm{i})l}.$$

$V(x,t)$ 的虚部，显然就是原始定解问题 (14.95) 的齐次化函数 $v(x,t)$．

练习 14.13 对于最一般的定解问题，例如，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad 0 < x < l,\ t > 0,$$

$$u\Big|_{x=0} = \mu(t),\ u\Big|_{x=l} = \nu(t), \qquad t \geq 0,$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \qquad 0 \leq x \leq l,$$

试用分离变量法求解.

读者可能会想到，对于定解问题 (14.95)，应该也可以将齐次方程 (14.95a) 和齐次初始条件 (14.95c) 分离变量而得到

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{14.111a}$$

$$T(0) = 0, \qquad T'(0) = 0. \tag{14.111b}$$

如果这也构成本征值问题，并且也能够求出本征值和本征函数的话，那么似乎可以由此求得定解问题的一般解，从而利用非齐次边界条件 (14.95b) 定出叠加系数即可. 从实际计算的结果来看，这是不可能实现的. 原因是，在齐次初始条件 (14.111b) 下，对于任何 λ 值，方程 (14.111a) 只有零解. 容易看出，任何有限的 t 点都是方程 (14.111a) 的常点，因此，根据常微分方程理论，解 $T(t)$ 在 t 的全平面上都解析，因而可以在例如 $t=0$ 点展开为 Taylor 级数. 齐次的初始条件就决定了级数的全部系数均为 0. 正是基于这个原因，我们要再次强调，构成本征值问题，一定是含有待定参数的齐次微分方程和齐次的边界条件. 边界条件和初始条件的这种差别，在物理意义上，是由于它们分别对应于空间变量和时间变量，在数学上，是由于边界条件给出的是函数在不同点 (例如 $x=0$ 和 $x=l$) 的数值，初始条件则是给出的函数在同一点 (即 $t=0$) 的数值与导数值. 所以，边界条件和初始条件在分离变量法中起着不同的作用.

对于稳定问题，不含时间变量 t，定解条件只有边界条件，这样，即使全部边界条件都是非齐次的，在选择将那些边界条件齐次化而用于构成本征值问题、其余的边界条件留作定叠加系数时，就

有充分的自由．实际上，对于定解问题

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), && 0<x<a,\ 0<y<b,\\
&u(x,y)\Big|_{x=0}=\xi(y),\quad u(x,y)\Big|_{x=a}=\eta(y), && 0\le y\le b,\\
&u(x,y)\Big|_{y=0}=\phi(x),\quad u(x,y)\Big|_{y=b}=\psi(x), && 0\le x\le a,
\end{aligned}
$$

还可以更简单地令

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)+u_3(x,y),$$

使得 $u_1(x,y)$ 满足非齐次方程和齐次边界条件

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=f(x,y), && 0<x<a,\ 0<y<b,\\
&u_1(x,y)\Big|_{x=0}=0,\quad u_1(x,y)\Big|_{x=a}=0, && 0\le y\le b,\\
&u_1(x,y)\Big|_{y=0}=0,\quad u_1(x,y)\Big|_{y=b}=0, && 0\le x\le a;
\end{aligned}
$$

$u_2(x,y)$ 和 $u_3(x,y)$ 都满足齐次方程，并且只有一组边界条件非齐次的，即

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0, && 0<x<a,\ 0<y<b,\\
&u_2(x,y)\Big|_{x=0}=\xi(y),\quad u_2(x,y)\Big|_{x=a}=\eta(y), && 0\le y\le b,\\
&u_2(x,y)\Big|_{y=0}=0,\quad u_2(x,y)\Big|_{y=b}=0, && 0\le x\le a
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}=0, && 0<x<a,\ 0<y<b,\\
&u_3(x,y)\Big|_{x=0}=0,\quad u_3(x,y)\Big|_{x=a}=0, && 0\le y\le b,\\
&u_3(x,y)\Big|_{y=0}=\phi(x),\quad u_3(x,y)\Big|_{y=b}=\psi(x), && 0\le x\le a.
\end{aligned}
$$

读者不难采用前几节中已经讲过的相应方法求出 $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ 和 $u_3(x,y)$．

第十五章　正交曲面坐标系

15.1　正交曲面坐标系

在上一章中，我们介绍了数学物理方程中的最基本解法，分离变量法．当时所涉及的空间几何形状，除了一维的直线 (线段) 外，仅限于二维平面上的矩形区域，以及三维空间中的长方体．而且，二维矩形区域实际上就是三维空间中的无穷长的长方体，只不过所要研究的问题与其中的一个变量 (例如 z) 无关．对于这些几何形状，总可以适当地放置直角坐标架，使得所讨论区域的边界面与坐标面重合，从而实现齐次边界条件的分离变量．

如果我们所要讨论的空间区域，具有其他几何形状，例如圆柱形 (包括它的特殊情形，二维平面上的圆形区域) 或球形，乃至其他更特别的形状，这时无论怎样放置直角坐标架，总不能使得区域的边界面全部都和坐标面重合．因此，即使边界条件是齐次的，也无法分离变量．

解决这个问题的办法是选用别的坐标系．例如圆形区域，首选的坐标系当然是平面极坐标系．圆柱形区域，当然应当考虑柱坐标系．对于球形，就应该选用球坐标系．作为这些坐标系的概括，可以定义曲面坐标系 ① $\{x^1, x^2, x^3\}$，

$$x^1 = \xi(x, y, z), \quad x^2 = \eta(x, y, z), \quad x^3 = \zeta(x, y, z), \tag{15.1}$$

它的坐标面是三组曲面

$$x^1 = \text{常数}, \quad x^2 = \text{常数}, \quad x^3 = \text{常数}.$$

① 这里的 x^i $(i = 1, 2, 3)$ 中，上标 i 用来标记空间点的坐标 (分量)，并不表示方次．

空间任意一点的坐标(x^1, x^2, x^3)，就由过该点的三个坐标面决定.
为了保证 x^1, x^2 和 x^3 是独立的，应当要求它们的 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(x, y, z)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x} & \frac{\partial x^1}{\partial y} & \frac{\partial x^1}{\partial z} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x} & \frac{\partial x^2}{\partial y} & \frac{\partial x^2}{\partial z} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x} & \frac{\partial x^3}{\partial y} & \frac{\partial x^3}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{15.2}$$

对于空间的任意一点，如果通过该点的三个坐标面总是互相垂直的，那么，这个坐标系就称为正交曲面坐标系. 例如，在直角坐标系中，过空间任意一点 (x_0, y_0, z_0) 的三个坐标面

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

就是互相垂直的.

为了判断一个坐标系是不是正交曲面坐标系，当然可以直接从坐标系的定义、即坐标面的方程去判断. 更常用的办法 ① 是由 (15.1) 式计算出弧长 ②

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial x}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial x}{\partial x^3}dx^3\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial y}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial y}{\partial x^3}dx^3\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial z}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial z}{\partial x^3}dx^3\right)^2 \\ &= \sum_{i,j=1,2,3} g_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned} \tag{15.3}$$

其中

① 这种讨论方法的一个优点是可以直接推广到高维空间的情形.

② 在微分几何中，更常略去 (15.3) 式中的和号，而直接写成

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

按照 Einstein 规则，此式应理解为需对所有重复指标 (并且一个是上指标，一个是下指标) 求和.

$$g_{ij} = g_{ji} = \frac{\partial x}{\partial x^i}\frac{\partial x}{\partial x^j} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\frac{\partial y}{\partial x^j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\frac{\partial z}{\partial x^j}.$$

如果

$$g_{ij} = g_{ii}\delta_{ij} \tag{15.4}$$

则称此坐标系为正交曲线坐标系． g_{ij} 构成的矩阵 G 称为此空间的度规 (metrix)．

例 15.1 对于柱坐标系， $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= (\cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\theta)^2 + (\sin\theta\mathrm{d}r + r\cos\theta\mathrm{d}\theta)^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2. \end{aligned} \tag{15.5}$$

所以，柱坐标系是正交曲面坐标系， $g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = 1$．

例 15.2 对于球坐标系， $x = r\sin\theta\cos\phi$， $y = r\sin\theta\sin\phi$， $z = r\cos\theta$，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= (\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\phi\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}\phi)^2 \\ &\quad + (\sin\theta\sin\phi\mathrm{d}r + r\cos\theta\sin\phi\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\mathrm{d}\phi)^2 \\ &\quad + (\cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\theta\mathrm{d}\theta)^2 \\ &= \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2. \end{aligned} \tag{15.6}$$

球坐标系也是正交曲面坐标系， $g_{11} = 1, g_{22} = r^2, g_{33} = r^2\sin^2\theta$．

15.2 正交曲面坐标系中的 Laplace 算符

这一节，通过外微分法介绍正交曲线坐标系中 Laplace 算符的一般形式．这种方法的优点在于它的协变性，即可以脱离开坐标系的具体定义，而得到最普遍的表达式．作为一个最初步的介绍，我们略去数学上的严格定义，只给出有关运算的规则．

外微分法则 这里要介绍外微分算符、 * 算符及楔积运算，以及微分形式的概念．

首先定义外微分算符 d．它作用在 (标量) 函数 f 上，

$$\mathrm{d}: f \mapsto \mathrm{d}f = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i, \tag{15.7}$$

得到的 $\mathrm{d}f$ 称为一次微分形式 (简称一次形式)．

例 15.3 对于柱坐标系，

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial u}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z. \tag{15.8}$$

例 15.4 对于球坐标系，

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial u}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial u}{\partial \phi}\mathrm{d}\phi. \tag{15.9}$$

运算法则 1 外微分算符 d 在不同坐标系中的表达式，

$$\mathrm{d}f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \sum_i \frac{\partial f}{\partial y^i}\mathrm{d}y^i. \tag{15.10}$$

我们看到，一次微分形式 $\mathrm{d}f$ 给出的正是梯度 $\mathrm{grad}\, f \equiv \nabla f$ 的协变微分形式，$\{\mathrm{d}x^i, i = 1, 2, 3\}$ 构成一组正交基 (正交标准基应该是 $\sqrt{g_{ii}}\mathrm{d}x^i$, i = 1, 2, 3)．

外微分算符 d 还可以作用在 p 次微分形式 $\alpha = \sum \alpha_I \mathrm{d}x^I$ 上，得到 $(p+1)$ 次微分形式：

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\Big(\sum_I \alpha_I \mathrm{d}x^I\Big) = \sum_i \sum_I \frac{\partial \alpha_I}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^I, \tag{15.11}$$

其中

$$\mathrm{d}x^I \equiv \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \mathrm{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_p}. \tag{15.12}$$

运算 $\wedge$ 称为楔积.

运算法则 2

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j = -\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i, \tag{15.13}$$

因此，

$$\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^i = 0.$$

运算法则 3 设 α 为 p 次微分形式，β, γ 是 q 次微分形式，

$$\mathrm{d}(\beta + \gamma) = \mathrm{d}\beta + \mathrm{d}\gamma, \tag{15.14}$$

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge \beta) = (\mathrm{d}\alpha) \wedge \beta + (-)^p \alpha \wedge (\mathrm{d}\beta), \tag{15.15}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = 0. \tag{15.16}$$

“*”算符是一个线性变换，它把 p 次微分形式变换为相应的 $n-p$ 次微分形式

$$^*\mathrm{d}x^i = \frac{\sqrt{\det G}}{g_{ii}}\mathrm{d}x^I, \quad ^*\mathrm{d}x^I = \frac{g_{ii}}{\sqrt{\det G}}\mathrm{d}x^i. \tag{15.17}$$

其中 (i, I) 构成 $(1,2,3)$ 的偶排列，$\det G$ 表示矩阵 G 的行列式值.

运算法则 4

$$^*1 = \sqrt{\det G}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3, \tag{15.18}$$

$$^*(\sqrt{\det G}\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3) = 1. \tag{15.19}$$

注意 $\sqrt{\det G}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$ 正好是通常的三维空间的体积元.

例 15.5 对于柱坐标系，$\det G = r^2$，

$$^*\mathrm{d}u = r\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}z + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}r + r\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta. \tag{15.20}$$

例 15.6 对于球坐标系，$\det G = r^4\sin^2\theta$，

$$^*\mathrm{d}u = r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\phi + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathrm{d}\phi \wedge \mathrm{d}r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\theta. \tag{15.21}$$

$^*\mathrm{d}$ 是旋度 curl 的协变微分形式，这可以从它作用在一次微分形式 $a_1\mathrm{d}x^1 + a_2\mathrm{d}x^2 + a_3\mathrm{d}x^3$ 的结果

$$\begin{aligned} &^*\mathrm{d}(a_1\mathrm{d}x^1 + a_2\mathrm{d}x^2 + a_3\mathrm{d}x^3) \\ &= \left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right)\frac{g_{11}}{\sqrt{\det G}}\mathrm{d}x^1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right)\frac{g_{22}}{\sqrt{\det G}}\mathrm{d}x^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right)\frac{g_{33}}{\sqrt{\det G}}\mathrm{d}x^3 \end{aligned} \tag{15.22}$$

看出.

$^*\mathrm{d}^*$ 是散度 div 的协变微分形式，

$$\begin{aligned} &^*\mathrm{d}^*(a_1\mathrm{d}x^1 + a_2\mathrm{d}x^2 + a_3\mathrm{d}x^3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det G}}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\sqrt{\det G}}{g_{11}}a_1\right) + \frac{1}{\sqrt{\det G}}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{\det G}}{g_{22}}a_2\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\det G}}\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\sqrt{\det G}}{g_{33}}a_3\right). \end{aligned} \tag{15.23}$$

正交曲线坐标系中的 Laplace 算符 $^*\mathrm{d}^*\mathrm{d}$ 是 Laplace 算符 $\nabla^2 \equiv \nabla\cdot\nabla \equiv \mathrm{div\,grad}$ 的协变微分形式.

例 15.7 柱坐标系,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^*\mathrm{d}u &= \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}z + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}r \\
&\quad + r\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta, \\
{}^*\mathrm{d}^*\mathrm{d}u &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

这就是说, Laplace 算符在柱坐标系下的表达式是

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{15.24}$$

例 15.8 球坐标系,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^*\mathrm{d}u &= \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)\sin\theta\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}\mathrm{d}\phi\wedge\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta, \\
{}^*\mathrm{d}^*\mathrm{d}u &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}.
\end{aligned}$$

所以, Laplace 算符在球坐标系下的表达式是

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{15.25}$$

15.3 Laplace 算符的平移、转动和反射不变性

上一节中, 介绍了正交曲面坐标系的概念, 以及几种特殊的正交曲面坐标系中 Laplace 算符的具体表达式. 我们可以根据问题的需要, 选择合适的坐标系.

选定了坐标系以后, 在求解定解问题时, 往往还需要考虑两个问题. 一是坐标架如何放置, 包括坐标原点位置和坐标轴特殊取向的选择, 以最大限度地利用问题中的对称性, 使求解过程得到充分的简化. 第二个问题是讨论定解问题的对称性与解的对称性之

间的必然联系. 这两个问题实际上并不是可以截然分开的. 在本课程中，将着重考虑第一个问题. 对于第二个问题(是群论课程的任务)，有时也会有所涉及，但主要是用来分析定解问题的结果，用来检验解的正确性.

坐标架的不同放置，在数学上，就表现为不同坐标系之间的线性变换. 在这些线性变换下， Laplace 算符的形式如何变化，上一节已经作出了原则的回答： Laplace 算符的形式具有不变性. 这一节中，讨论一些具体的变换，具体证明 Laplace 算符在这些变换下的不变性. 为了确定起见，下面的讨论在直角坐标系中进行.

首先，关于坐标原点的不同放置，涉及到的是平移变换，

$$x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c. \tag{15.26}$$

容易看出，

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z'^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{15.27}$$

因此， Laplace 算符在平移变换下是不变的，即

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{15.28}$$

关于坐标轴的取向问题，涉及到坐标系之间的正交变换. 设空间一点在变换前后的坐标分别是 $\{x, y, z\}$ 和 $\{x', y', z'\}$，它们之间的关系是

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{15.29}$$

所谓正交变换，指的是变换矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{15.30}$$

应该满足正交关系

$$\sum_{k=1,2,3} a_{ik}a_{jk} = \sum_{k=1,2,3} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}. \tag{15.31}$$

在正交变换之下， Laplace 算符的形式是不变的．这只要证明变换后的度规矩阵仍为单位矩阵即可．

为了书写的方便，下面把变换前后的坐标改写为 $\{x^1, x^2, x^3\}$ 和 $\{x^{1\prime}, x^{2\prime}, x^{3\prime}\}$ ，这样，根据 (15.29) 式，就有

$$\mathrm{d}x^i = \sum_{k=1,2,3} a_{ki}\mathrm{d}x^{k\prime}. \tag{15.32}$$

容易得到

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \sum_{ij}\delta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = \sum_{ij}\sum_{kl}\delta_{ij}a_{ki}a_{lj}\mathrm{d}x^{k\prime}\mathrm{d}x^{l\prime} \\ &= \sum_{kl}\left(\sum_i a_{ki}a_{li}\right)\mathrm{d}x^{k\prime}\mathrm{d}x^{l\prime} = \sum_{kl}\delta_{kl}\mathrm{d}x^{k\prime}\mathrm{d}x^{l\prime}.\end{aligned} \tag{15.33}$$

这说明变换前后的度规矩阵都是单位矩阵，所以变换后的 Laplace 算符仍为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}. \tag{15.34}$$

在变换矩阵 A 中，有 3^2 个元素．由于正交关系含有 $3\times 4/2$ 个限制条件，因此只有 3 个矩阵元是独立的，或者说只可能有 3 个自由参数．这样描写的正是坐标架绕 (通过原点的某一) 固定轴的转动，它可以用标志刚体取向的 3 个 Euler 角描写．

绕固定轴的转动的最简单情形，就是绕某一坐标轴 (例如， z 轴) 的转动．设转动角为 α ，则

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \quad z' = z, \tag{15.35}$$

即变换矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{15.36}$$

直接计算就可以验证

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'} &= \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\sin\alpha\frac{\partial}{\partial y},\\
\frac{\partial}{\partial y'} &= -\sin\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\alpha\frac{\partial}{\partial y},\\
\frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x'^2} &= \cos^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\cos\alpha\sin\alpha\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\sin^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2},\\
\frac{\partial^2}{\partial y'^2} &= \sin^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\cos\alpha\sin\alpha\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\cos^2\alpha\frac{\partial^2}{\partial y^2},\\
\frac{\partial^2}{\partial z'^2} &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned}
$$

因此， Laplace 算符在绕 z 轴的转动下是不变的．当然，坐标架绕 y 轴或 z 轴转动时， Laplace 算符也是不变的．

更进一步，对于绕过原点的任意固定轴的转动，可以用三个 Euler 角 α, β 和 γ(见图 15.1) 描写，其转动矩阵的矩阵元是

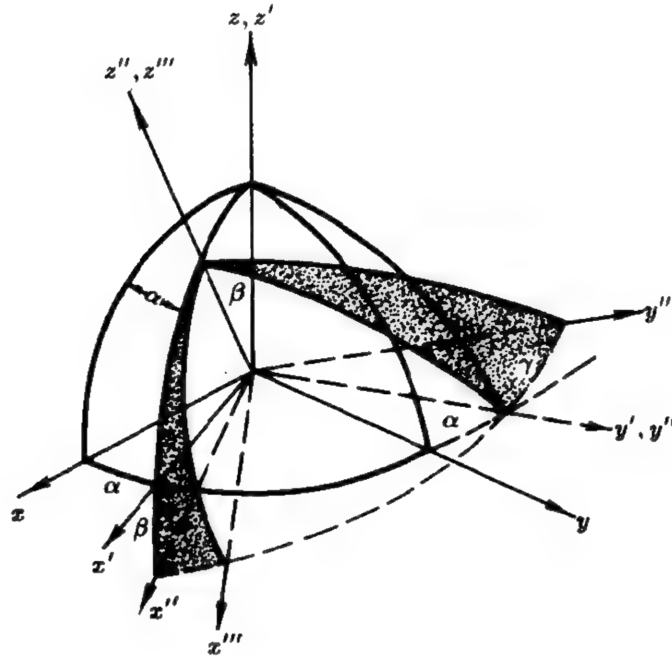


图 15.1　Euler 角

$$a_{11} = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma, \tag{15.37a}$$

$$a_{12} = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma, \tag{15.37b}$$

$$a_{13} = -\sin\beta\cos\gamma, \tag{15.37c}$$

$$a_{21} = -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma, \tag{15.37d}$$

$$a_{22} = -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma, \tag{15.37e}$$

$$a_{23} = \sin\beta\sin\gamma, \tag{15.37f}$$

$$a_{31} = \cos\alpha\sin\beta, \tag{15.37g}$$

$$a_{32} = \sin\alpha\sin\beta, \tag{15.37h}$$

$$a_{33} = \cos\beta. \tag{15.37i}$$

通过直接计算可以证明

$$A=\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15.38}$$

这就是说，以 Euler 角 α, β 和 γ 表征的转动 (15.37) 可以分解为连续的三个绕坐标轴的转动：首先将坐标架 $\{x, y, z\}$ 绕 z 轴转 α 角而变为 $\{x', y', z'\}$，然后绕 y' 轴转 β 角而变为 $\{x'', y'', z''\}$，最后再绕 z'' 轴转 γ 角. 在这三个转动下 Laplace 算符都是不变的. 所以，对于绕通过坐标原点的任意固定轴的转动， Laplace 算符也是不变的.

最后，容易看出，在空间反射

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z \tag{15.39}$$

下， Laplace 算符也是不变的.

讨论 Laplace 算符在这些特殊变换之下的不变性，其目的当然还是在于希望能对于有关定解问题的解有更多的认识，希望能对于有关定解问题的求解有所裨益. 以后我们将在有关章节中再作具体的讨论.

15.4 圆 形 区 域

现在讨论另一种区域、圆形区域中的稳定问题. 定解问题为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad x^2 + y^2 < a^2, \tag{15.40a}$$

$$u\Big|_{x^2+y^2=a^2} = f. \tag{15.40b}$$

方程 (15.40a) 在直角坐标系下当然是可以分离变量的, 14.2 节中就是这样做的. 但是, 边界条件 (15.40b) 显然不能分离变量. 由于边界的形状是圆形, 很自然地, 我们想到应该采用平面极坐标系.

在平面极坐标系中, 定解问题 (15.40) 应该可以写为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \quad 0 < r < a, \tag{15.41a}$$

$$u\Big|_{r=a} = f(\phi). \tag{15.41b}$$

令 $u(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$, 代入方程 (15.41a) , 有

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)\Phi + \frac{R}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = 0,$$

$$\frac{r}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = \lambda.$$

因此, 可以分离变量,

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \lambda R = 0, \tag{15.42}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} + \lambda\Phi = 0. \tag{15.43a}$$

但是, 代入边界条件 (15.41b) ,

$$R(a)\Phi(\phi) = f(\phi),$$

仍然不能分离变量, 因为边界条件是非齐次的. 这样, 我们尽管能够将齐次方程 (15.41a) 分离变量, 得到两个含有待定参数的齐次常微分方程, 但是并没有相应的齐次边界条件与之配合而构成一个本征值问题. 这样, 在平面极坐标系下应用分离变量法时, 我们又遇到了特殊的困难.

但是，深入分析一下，就会发现上面出现的困难是完全可以克服的，这些困难完全是由于演绎中的疏漏造成的：在圆形区域的条件下，当我们由平面直角坐标系变换到平面极坐标系时，得到的 (15.41) 并不完全等价于原来的定解问题 (15.40)；或者说，(15.41) 并不构成一个完整的定解问题．第一，在数学上，自变量 ϕ 的变化范围是 $[0, 2\pi]$，严格说，方程在区间的端点 $\phi=0$ 和 $\phi=2\pi$ 并不成立，因为 $u(r,\phi)$ 在端点 $\phi=0$ 和 $\phi=2\pi$ 处的偏导数没有定义，充其量最多也只能定义 $u(r,\phi)$ 在两个端点处的单侧偏导数．而且，这两个端点纯粹是由于采用平面极坐标系描写圆形而出现的，并非真正的几何边界，当然在原始的定解问题中，就谈不上要指定相应的边界条件．这样就导致在 (15.41) 中也没有给出 $u(r,\phi)$ 在 $\phi=0$ 和 $\phi=2\pi$ 处所应当满足的边界条件．考虑到平面极坐标系的特点，$(r, \phi=0)$ 和 $(r, \phi=2\pi)$ 代表的是平面上的同一点，所以，作为完整的定解问题，还应当补充上周期条件

$$r,\phi)\Big|_{\phi=0}=u(r,\phi)\Big|_{\phi=2\pi} \quad 和 \quad \frac{\partial u(r,\phi)}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi}.$$

这样，上面提到的由于把 Laplace 方程从直角坐标系转换到极坐标系时而发生的损失，可以通过补充上周期条件而得到补偿．第二，原来的方程 (15.40a) 在圆内是处处成立的，包括在坐标原点 $(x, y)=(0, 0)$ 也是成立的．但是，方程 (15.41a) 在 $r=0$ 点并不成立．这是因为 $u(r,\phi)$ 在 $r=0$ 点的偏导数也并没有定义，充其量也只能定义 $u(r,\phi)$ 在 $r=0$ 点的单侧偏导数． $r=0$ 点作为自变量 r 的一个端点，也纯粹是由采用极坐标系而出现的，它并不是圆形区域的几何边界．这样也还需要补充上 $u(r,\phi)$ 在 $r=0$ 点所应当满足的边界条件．考虑到方程 (15.40a) 是齐次的，在圆内 (包括坐标原点) 是无源的，因此，$u(r,\phi)$ 在坐标原点应当是有界的 [①]，应当

---

① 不妨用大家熟悉的静电场的知识来理解这个问题．三维空间中，只有在点电荷和线电荷所在处电势分别以 $1/r$ 和 $\ln r$ 的形式发散，除此之外，电势是处处有界的．二维平面上的点电荷，就是三维空间中的均匀线电荷．

要补充上有界条件

$$u(r,\,\phi)\big|_{r=0}\text{有界}.$$

这样，总结上面的讨论，我们看到，在转换到平面极坐标系后，定解问题 (15.40) 就应该变为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0, \qquad 0<\phi<2\pi,\ 0<r<a, \tag{15.44a}$$

$$u(r,\phi)\big|_{\phi=0}=u(r,\phi)\big|_{\phi=2\pi}, \qquad 0<r<a, \tag{15.44b}$$

$$\left.\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial\phi}\right|_{\phi=0}=\left.\frac{\partial u(r,\phi)}{\partial\phi}\right|_{\phi=2\pi}, \qquad 0<r<a, \tag{15.44c}$$

$$u(r,\,\phi)\big|_{r=0}\text{有界}, \qquad 0<\phi<2\pi, \tag{15.44d}$$

$$u\big|_{r=a}=f(\phi), \qquad 0<\phi<2\pi. \tag{15.44e}$$

现在，再来重复分离变量的步骤，就可以看到，除了会得到齐次常微分方程 (15.42) 和 (15.43a) 之外，由周期条件 (15.44b) 和 (15.44c) 还可以得到

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi), \tag{15.43b}$$

$$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \tag{15.43c}$$

这样，由带有待定参数的齐次常微分方程 (15.43a) 和齐次的周期边界条件 (15.43b) (15.43c) 又构成了一个本征值问题. 容易证明，

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^{2\pi}\Phi(\phi)\Phi^*(\phi)\mathrm{d}\phi &= -\int_0^{2\pi}\Phi''(\phi)\Phi^*(\phi)\mathrm{d}\phi\\ &= -\Phi'(\phi)\Phi^*(\phi)\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\Phi'(\phi)\Phi'^*(\phi)\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

尽管分部积分出来的项在单独代入上下限时并不为 0 ，但是数值相等，因而总的结果仍然为 0 . 所以，如果本征值问题 (15.43) 有解的话，一定满足

$$\lambda=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\Phi'(\phi)\Phi'^*(\phi)\mathrm{d}\phi}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\Phi(\phi)\Phi^*(\phi)\mathrm{d}\phi}\geq 0. \tag{15.45}$$

这时之所以允许 $\lambda=0$，是因为 $\Phi(\phi)=$ 常数(不妨取为 1) 也是本征值问题的解. 换句话说，本征值问题 (15.43) 有一组解，

$$\text{本征值} \qquad \lambda_0=0, \tag{15.46a}$$

$$\text{本征函数} \qquad \Phi_0(\phi)=1. \tag{15.46b}$$

当 $\lambda>0$ 时，方程 (15.43a) 的通解为

$$\Phi(\phi)=A\sin\sqrt{\lambda}\phi+B\cos\sqrt{\lambda}\phi.$$

代入周期条件 (15.43b) 和 (15.43c)，就得到

$$\begin{aligned} B &= A\sin\sqrt{\lambda}2\pi+B\cos\sqrt{\lambda}2\pi, \\ A &= A\cos\sqrt{\lambda}2\pi-B\sin\sqrt{\lambda}2\pi. \end{aligned}$$

这是关于系数 A 和 B 的线性齐次代数方程组，有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}2\pi & \cos\sqrt{\lambda}2\pi-1 \\ \cos\sqrt{\lambda}2\pi-1 & \sin\sqrt{\lambda}2\pi \end{vmatrix}=0,$$

即 $2(\cos\sqrt{\lambda}2\pi-1)=0$. 这样又可以求得本征值

$$\lambda_m=m^2, \qquad m=1,2,3,\cdots, \tag{15.47a}$$

相应的非零解是

$$A\text{任意}, \qquad B\text{任意}.$$

这就是说，对应于一个本征值 λ_m，有两个本征函数

$$\Phi_{m1}(\phi)=\sin m\phi, \tag{15.47b}$$

$$\Phi_{m2}(\phi)=\cos m\phi. \tag{15.47c}$$

当然，也还可以将 $\lambda_0=0$ 的结果 (15.46) 和 (15.47) 合并起来，统一写成 (15.47) 的形式，而将 m 的取值相应地改为 $0,1,2,3,\cdots$.

现在，按照分离变量法的标准步骤，应该再去求出常微分方程 (15.42) 的解. 注意这个常微分方程是一个特殊的变系数方程，经过自变量的变换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \qquad \text{即} \qquad t=\ln r$$

后，就可以变为常系数的常微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2}-\lambda R=0. \tag{15.42'}$$

所以，当 $\lambda_0=0$ 时，通解为

$$R_0(r)=C_0+D_0t=C_0+D_0\ln r; \tag{15.48}$$

当 $\lambda_m=m^2, m\neq 0$ 时，通解为

$$R_m(r)=C_m\mathrm{e}^{mt}+D_m\mathrm{e}^{-mt}=C_mr^m+D_mr^{-m}. \tag{15.49}$$

现在，我们就求得了满足齐次方程 (15.44a) 和齐次边界条件 (15.44b)(15.44c) 的全部特解

$$u_0(r,\phi)=C_0+D_0\ln r, \tag{15.50a}$$

$$u_{m1}(r,\phi)=\left(C_{m1}r^m+D_{m1}r^{-m}\right)\sin m\phi, \tag{15.50b}$$

$$u_{m2}(r,\phi)=\left(C_{m2}r^m+D_{m2}r^{-m}\right)\cos m\phi. \tag{15.50c}$$

把它们叠加起来，就得到定解问题 (15.44) 的一般解

$$u(r,\phi)=C_0+D_0\ln r+\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{m1}r^m+D_{m1}r^{-m}\right)\sin m\phi+\sum_{m=1}^{\infty}\left(C_{m2}r^m+D_{m2}r^{-m}\right)\cos m\phi. \tag{15.51}$$

考虑到有界条件 (15.44d)，由于 $\ln r$ 和 r^{-m} 在 $r=0$ 点都是无界的，所以它们的系数都必须为 0，

$$D_0=0,\quad D_{m1}=0,\quad D_{m2}=0. \tag{15.52}$$

再代入边界条件 (15.44e)，就得到

$$u(r,\phi)\Big|_{r=a}=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}a^m\left(C_{m1}\sin m\phi+C_{m2}\cos m\phi\right)=f(\phi).$$

下面的问题便是如何定出叠加系数 C_0, C_{m1} 和 C_{m2}. 尽管现在也可以根据 Fourier 展开的公式定出系数 C_0, C_{m1} 和 C_{m2}，但我们还是采用分离变量法的标准做法，利用本征函数的正交性定叠加系数.

容易证明，对于本征值问题 (15.43)，对应不同本征值的本征函数是正交的. 首先，本征函数 1(对应于本征值 $\lambda_0 = 0$) 和本征函数 $\sin m\phi$ 或 $\cos m\phi$ (对应于本征值 $\lambda_m = m^2$, $m \neq 0$) 是正交的：

$$\int_0^{2\pi} \sin m\phi \mathrm{d}\phi = 0, \tag{15.53a}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\phi \mathrm{d}\phi = 0. \tag{15.53b}$$

对应于本征值 $\lambda_m = m^2$ 的本征函数 $\sin m\phi$, $\cos m\phi$ 和对应于本征值 $\lambda_n = n^2$, $n \neq m$ 的本征函数 $\sin n\phi$, $\cos n\phi$ 是两两正交的：

$$\int_0^{2\pi} \sin n\phi \sin m\phi \mathrm{d}\phi = 0, \tag{15.53c}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin n\phi \cos m\phi \mathrm{d}\phi = 0, \tag{15.53d}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\phi \cos m\phi \mathrm{d}\phi = 0. \tag{15.53e}$$

而且，对应于同一个本征值 $\lambda_m = m^2$ 的两个本征函数 $\sin m\phi$ 和 $\cos m\phi$ 也是正交的：

$$\int_0^{2\pi} \sin m\phi \cos m\phi \mathrm{d}\phi = 0. \tag{15.53f}$$

因此，利用本征函数的正交性以及

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 m\phi \mathrm{d}\phi = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \cos^2 m\phi \mathrm{d}\phi = \pi,$$

就可求得

$$C_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \mathrm{d}\phi, \tag{15.54a}$$

$$C_{m1} = \frac{1}{a^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \sin m\phi \mathrm{d}\phi, \tag{15.54b}$$

$$C_{m2} = \frac{1}{a^m \pi} \int_0^{2\pi} f(\phi) \cos m\phi \mathrm{d}\phi. \tag{15.54c}$$

这样我们就完全给出了定解问题 (15.44) 的解.

练习 15.1 直接从本征值问题 (15.43) 的方程和边界条件出发，证明本征函数的正交性 (15.53a e)．

练习 15.2 证明本征函数的正交性 (15.53f)．

现在再对上面求解过程中的某些问题作一些补充讨论．

第一，在求解本征值问题 (15.43) 时，对应于一个本征值有两个 (线性无关的) 本征函数．我们把对应一个本征值有不止一个 (线性无关的) 本征函数的现象，称为简并 (或退化)．如果对应一个本征值有 n 个本征函数，则称本征值问题是 n 重简并的，或者说简并度为 n．对于二阶常微分方程的本征值问题，最多只能是二重简并的．我们还将证明，在二阶常微分方程的本征值问题中，如果边界条件是一、二、三类，则对应一个本征值，只能有一个本征函数，或者说，本征值问题一定是非简并的．而当边界条件是周期条件时，本征值问题才是简并的．

第二，对于简并的本征值问题，本征函数的选取并不唯一．对应同一个本征值的本征函数也不一定正交，但是一定可以通过适当的重新组合而使它们正交化．就本题而言，就可以将对应于 $\lambda_m = m^2$, $m = 1, 2, 3, \cdots$ 的本征函数取为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \quad 和 \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}, \tag{15.55}$$

或者简单地将本征值问题 (15.43) 的全部本征值 (包括 $\lambda_0 = 0$) 和本征函数统一写成

$$\lambda_m = m^2, \qquad m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, \tag{15.56a}$$

$$\Phi_m(\phi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}. \tag{15.56b}$$

这时，对应不同本征值的本征函数当然仍然是正交的：

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi})^* \mathrm{d}\phi = 0, \quad n, m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots, 且\, n \neq m. \tag{15.57a}$$

而且，对应于同一个本征值 $\lambda_m = m^2$, $m \neq 0$ 的两个本征函数 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}m\phi}$ 也是正交的：

$$\int_0^{2\pi} e^{im\phi}(e^{-im\phi})^* d\phi = 0. \tag{15.57b}$$

注意现在的本征函数是复函数，在上面的正交关系中需要将其中的一个本征函数取复共轭.

练习 15.3 证明本征函数组 (15.56b) 的正交性 (15.57b) .

最后，关于定解问题 (15.44) 的特解，它们是

$1, \ln r, r^m \sin m\phi, r^m \cos m\phi, r^{-m} \sin m\phi$ 和 $r^{-m} \cos m\phi$.

注意这里的偏微分方程是 (二维)Laplace 方程. 回忆一下在复变函数部分中，我们曾经证明，解析函数的实部或虚部一定是 Laplace 方程的解. 把 $re^{i\phi}$ 看成是复变数 $z = x + iy$ ，就可以看出，上面的这些特解正是解析函数

$$z^0, \quad \ln z, \quad z^m \quad \text{和} \quad z^{-m}$$

的实部或者虚部. 而有界条件 (15.44d) 正是使我们摈弃掉在圆内 $|z| < a$ 并不处处解析的函数 $\ln z$ 和 z^{-m} . 更进一步，把上面求得的系数 (15.52) 和 (15.54) 代入到 (15.51) 式中，还可以得到

$$\begin{aligned} u(r,\phi) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi')d\phi' \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m \sin m\phi \int_0^{2\pi} f(\phi')\sin m\phi' d\phi' \\ &\quad + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos m\phi \int_0^{2\pi} f(\phi')\cos m\phi' d\phi' \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi')\left[1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m \cos m(\phi-\phi')\right]d\phi'. \end{aligned}$$

显然，当 $r < a$ 时级数收敛. 将余弦函数改写为复指数函数，利用等比级数的求和公式就可以求出级数的和，最后就得到

$$u(r,\phi) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\phi')}{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\phi-\phi')}d\phi'. \tag{15.58}$$

这个结果称为 Poisson 积分公式，它把 Laplace 方程在圆内的第一类边值问题的解表示为边值 $f(\phi)$ 的积分. 事实上，由解析函数的 Cauchy 积分公式，也可以推出这个结果 (见 3.7 节)，而 $u(r,\phi)$ 正好是解析函数的实部或虚部. 这里只不过再一次看到解析函数的实部或虚部和二维 Laplace 方程的解之间的关系.

15.5 Helmholtz 方程在柱坐标系下的分离变量

在讨论二阶偏微分方程的分离变量时， Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{15.59}$$

具有一定的典型性. 这是因为无论波动方程或热传导方程，在将时间部分分离变量或作 Fourier 变换后，都会得到 Helmholtz 方程. 又如 Laplace 方程，也可以看成 Helmholtz 方程的特殊情形.

在柱坐标系中， Helmholtz 方程的具体形式是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0. \tag{15.60}$$

这里涉及的是三个自变量的函数. 要将它分离变量，通常采取逐次分离的办法：首先先分离去一个自变量，然后再将其余的两个自变量分离. 为此，令 $u(r,\theta,z) = v(r,\theta)Z(z)$ ，代入方程，即得

$$Z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + k^2 v\right] + v\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = 0.$$

所以

$$\frac{1}{v}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + k^2 v\right] = -\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}.$$

等式的左端是 r 和 θ 的函数，与 z 无关；右端是 z 的函数，与 r 及 θ 均无关. 所以它们必须等于既与 r,θ 无关又与 z 无关的常数. 把这个常数记为 λ，就得到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \left(k^2 - \lambda\right)v = 0, \tag{15.61}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} + \lambda Z = 0. \tag{15.62}$$

这样就完成了自变量 z 的分离．接着再令 $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ ，代入方程 (15.61)，又得到

$$\Theta(\theta)\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda\right)R\right]+\frac{R(r)}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}=0.$$

两端再乘以 $r^2/R(r)\Theta(\theta)$ ，并移项，又能得到

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda\right)R\right]=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}.$$

现在，再次看到，等式的左端只是 r 的函数，与 θ 无关；右端只是 θ 的函数，与 r 无关．所以它们必须等于既与 r 无关又与 θ 无关的常数，记为 μ ．于是又得到

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0, \tag{15.63}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}+\mu\Theta=0. \tag{15.64}$$

这样，就又可以完成对于自变量 r 和 θ 的分离变量，也就完成了 Helmholtz 方程的分离变量．

在柱坐标系中将 Helmholtz 方程分离变量时，得到了三个常微分方程，即 (15.62) (15.63) 和 (15.64)．其中 (15.62) 和 (15.64) 两个常系数常微分方程，是大家都很熟悉的，不难解．方程 (15.63) 是变系数常微分方程，称作 Bessel 方程，在第六章中曾经讨论它的求解问题．后面第十七章中还要详细讨论这个方程的解和解的性质．

15.6 Helmholtz 方程在球坐标系下的分离变量

在球坐标系中， Helmholtz 方程的具体形式是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0. \tag{15.65}$$

令 $u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$ ，代入方程，即得

$$S(\theta,\phi)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]$$

$$+\frac{R(r)}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]=0.$$

两端乘以 $r^2/R(r)S(\theta,\phi)$ ，并移项，就可以得到

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]$$

$$=-\frac{1}{S(\theta,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right].$$

等式的左端只是 r 的函数，与 θ,ϕ 无关；右端只是 θ,ϕ 的函数，与 r 无关. 所以它们必须等于既与 r 无关又与 θ,ϕ 无关的常数. 把这个常数记为 λ ，就得到

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R(r)=0, \tag{15.66}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0. \tag{15.67}$$

在这一步中，我们成功地完成了从 Helmholtz 方程中分离去径向部分 (即与 r 有关的部分) 的任务. 下一步则要继续将方程 (15.67) 分离变量. 为此，再令 $S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ ，代入 (15.67) ，从而得到

$$\Phi\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0.$$

再将等式两端乘以 $\sin^2\theta/\Theta\Phi$ ，移项，又可以得到

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}.$$

这样，我们再次看到，等式的左端只是 θ 的函数，与 ϕ 无关；右端只是 ϕ 的函数，与 θ 无关. 所以它们必须等于既与 θ 无关又与 ϕ 无关的常数，记为 μ ，于是又完成了将 θ 部分和 ϕ 部分的分离，得到的两个常微分方程是

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0, \tag{15.68}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\mu\Phi=0. \tag{15.69}$$

这样又最终完成了 Helmholtz 方程在球坐标系中的分离变量.

在球坐标系中将 Helmholtz 方程分离变量，当然也还是得到三个常微分方程，即 (15.67) 、 (15.69) 和 (15.70) . 其中的 (15.70) 是常系数常微分方程，不难求解. 剩下的两个方程，(15.67) 和 (15.69) ，是变系数常微分方程，分别称为球 Bessel 方程和连带 Legendre 方程，在第十七章和第十六章中也将要分别讨论它们.

这里还要讨论一种常见特殊情形，即 $u=u(r,\theta)$ 与 ϕ 无关的情形. 这就是说，整个定解问题在绕极轴转动任意角时不变. 在这种情形下， Helmholtz 方程的形式就化简为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+k^2u=0. \tag{15.70}$$

令 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$ ， 代入方程，即得

$$\Theta(\theta)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]+\frac{R(r)}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta(\theta)}{\partial\theta}\right)=0.$$

两端乘以 $r^2/R(r)\Theta(\theta)$ ， 并移项，就可以得到

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right).$$

等式的左端只是 r 的函数，与 θ 无关；右端只是 θ 的函数，与 r 无关. 所以它们必须等于既与 r 无关又与 θ 无关的常数，记作 λ ，这样就完成了分离变量的任务. 得到的两个常微分方程，径向方程和 (15.67) 完全相同，另一个与方位角 (即纬度)θ 有关的常微分方程是

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta(\theta)=0, \tag{15.71}$$

称为 Legendre 方程，它是连带 Legendre 方程 (15.69) 中 $\mu=0$ 的特殊情形.

第十六章　球　函　数

在上一章，我们将 Helmholtz 方程在球坐标系下分离变量时，曾经得到连带 Legendre 方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right]\Theta=0$$

以及它的特殊情形， Legendre 方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta=0,$$

作变换 $x=\cos\theta$, $y(x)=\Theta(\theta)$ ，则又可将它们改写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda-\frac{\mu}{1-x^2}\right]y=0$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0.$$

本章将要讨论这两个方程的解，它们的主要性质及其在分离变量法中的应用.

16.1　Legendre 方程的解

在求出 Legendre 方程的解的具体形式之前，根据常微分方程的解析理论 (见第六章)，事先就可以对 Legendre 方程的解的解析性有如下准确的判断.

首先， Legendre 方程 [1]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0. \tag{16.1}$$

有三个奇点， $x=\pm1$ 和 $x=\infty$ ，并且都是正则奇点. 因此，除了这三个点可能是奇点外， Legendre 方程的解在全平面解析.

[1] 在这一节里，要特别强调 x 是复变量.

$x=0$ 点是 Legendre 方程的常点，因此，方程的解在以 $x=0$ 点为圆心的单位圆 $|x|<1$ 内解析，可以展开为 Taylor 级数. 事实上，第六章中已经求出了两个线性无关的特解，它们是

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} x^{2n}, \tag{16.2a}$$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(n+1+\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)} x^{2n+1}, \tag{16.2b}$$

其中

$$\nu(\nu+1)=\lambda. \tag{16.3}$$

把这两个特解作解析延拓，可以得到 Legendre 方程的解在其他区域内的表达式. 但是，无论如何，在级数解 (16.2) 的收敛圆的圆周上，确切说，在 $x=\pm1$ 这两点，方程的级数解总一定不解析. 这从上面写出的解的具体形式可以看出. 对于 $y_1(x)$，当 n 足够大时，其系数

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \\ &\sim \frac{2^{2n}}{(2n+1)^{2n+1/2}\mathrm{e}^{-(2n+1)}\sqrt{2\pi}} \frac{\left(n-\frac{\nu}{2}\right)^{n-(\nu+1)/2}\mathrm{e}^{-n+\nu/2}\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} \\ &\quad \times \frac{\left(n+\frac{\nu+1}{2}\right)^{n+\nu/2}\mathrm{e}^{-n-(\nu+1)/2}\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \\ &= 常数 \times \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

这说明，除了一个常数倍外，$y_1(x)$ 在 $x=\pm1$ 附近的行为，和

$$\ln\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^{2n}$$

完全相同．因此，$y_1(x)$ 在 $x=\pm 1$ 对数发散． $x=\pm 1$ 是 $y_1(x)$ 的枝点．如果把 Legendre 方程在 $x=0$ 的第一解 $y_1(x)$ 解析延拓到全平面上，它一定是一个多值函数．

同样，对于 $y_2(x)$，当 n 足够大时，也有

$$\begin{aligned}c_{2n+1} &= \frac{2^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma\left(n-\dfrac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(n+1+\dfrac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{\nu-1}{2}\right)\Gamma\left(1+\dfrac{\nu}{2}\right)} \\ &\sim \frac{2^{2n}}{(2n+2)^{2n+3/2}\mathrm{e}^{-(2n+2)}\sqrt{2\pi}} \\ &\quad\times \frac{\left(n-\dfrac{\nu-1}{2}\right)^{n-\nu/2}\mathrm{e}^{-n+(\nu-1)/2}\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(-\dfrac{\nu-1}{2}\right)} \\ &\quad\times \frac{\left(n+1+\dfrac{\nu}{2}\right)^{n+(\nu+1)/2}\mathrm{e}^{-n-1-\nu/2}\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(1+\dfrac{\nu}{2}\right)} \\ &= 常数\times\frac{1}{2n+1}.\end{aligned}$$

所以，除了一个常数倍外，$y_2(x)$ 在 $x=\pm 1$ 附近的行为，和

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n+1}$$

完全相同．因此，$y_2(x)$ 在 $x=\pm 1$ 也对数发散． $x=\pm 1$ 也是 $y_2(x)$ 的枝点．把 Legendre 方程在 $x=0$ 的第二解 $y_2(x)$ 解析延拓到全平面上，它也是一个多值函数．

还可以在 $x=1$ 点 (或 $x=-1$ 点) 的邻域内求解 Legendre 方程．由于 $x=\pm 1$ 是方程的正则奇点，方程在环域 $0<|x-1|<2$ 内有两个正则解，故可设

$$y(x)=(x-1)^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n, \tag{16.4}$$

代入 (16.1) 式，就可以得到 Legendre 方程在 $x=1$ 点的指标方程

$$\rho(\rho-1)+\rho=0.$$

所以，$\rho_1=\rho_2=0$．这说明 Legendre 方程在 $x=1$ 点邻域内的第一解实际上是在圆域 $|x-1|<2$ 内解析的，而第二解则一定含有对数项，以 $x=1$(和 $x=-1$) 为枝点．

按照常微分方程级数解法的标准步骤，可以求出 Legendre 方程在 $x=1$ 点邻域内的第一解

$$\mathrm{P}_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n, \tag{16.5}$$

称为 ν 次第一类 Legendre 函数，其中 ν 的定义见 (16.3) 式；第二解可取为

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_\nu(x)=&\frac{1}{2}\mathrm{P}_\nu(x)\left[\ln\frac{x+1}{x-1}-2\gamma-2\psi(\nu+1)\right]\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)^n,\end{aligned} \tag{16.6}$$

称为 ν 次第二 Legendre 函数，其中 γ 是 Euler 数， $\psi(z)$ 是 Γ 函数的对数微商．由于函数 $\mathrm{P}_\nu(x)$(延拓到全平面后，它是以 $x=-1$ 和 $x=\infty$ 为枝点的多值函数) 和 $\mathrm{Q}_\nu(x)$ 的多值性已有约定性的规定，在计算中需要特别注意．读者可参阅有关专著，例如参考书目 [12, 13]．

Legendre 方程在 $x=-1$ 或 $x=\infty$ 邻域内的解也可以类似地求出．这里从略．读者也可参阅上述两本专著．

16.2 Legendre 多项式

首先看一个球形区域内 $x^2+y^2+z^2<a^2$ 的 Laplace 方程边值问题

$$\nabla^2 u=0, \tag{16.7a}$$

$$u\big|_\Sigma=f(\Sigma), \tag{16.7b}$$

其中 Σ 代表球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上的变点．考虑到现在所讨论的空间区域的具体形状，我们自然会采用球坐标系来求解这个定解

问题，而且会把球坐标架的坐标原点放置在球心．如果边界条件具有绕某一个 (通过球心的) 固定轴旋转不变的对称性，那么，当然也就应当把这个对称轴的方向取为极轴的方向．这样选择了坐标系后，所要求的未知函数 u 当然就与 ϕ 无关， $u = u(r,\theta)$ ．

利用上一章中得到的 Laplace 算符在球坐标系下的具体表达式，容易写出定解问题 (16.7) 在球坐标系下的具体形式．但是，需要注意，Laplace 方程在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 方向上以及在坐标原点 $r = 0$ 均不成立，因为在这些点上充其量只存在 $u(r,\theta)$ 对 θ 和 r 的单侧导数．这样，当我们把 Laplace 方程从直角坐标系改写到球坐标系时，为了保持整个定解问题的等价性，就还要补充上 $u(r,\theta)$ 在 $\theta = 0$ 和 $\theta = \pi$ 方向上以及在坐标原点 $r = 0$ 处的有界条件．也就是说，定解问题 (16.7) 在球坐标系下的完整表达形式应该是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = 0, \tag{16.8a}$$

$$u\Big|_{\theta=0}\ \text{有界}, \qquad u\Big|_{\theta=\pi}\ \text{有界}, \tag{16.8b}$$

$$u\Big|_{r=0}\ \text{有界}, \qquad u\Big|_{r=a} = f(\theta). \tag{16.8c}$$

令

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta), \tag{16.9}$$

代入方程 (16.8a) 和有界条件 (16.8b)，就能够分离变量而得到

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \tag{16.10a}$$

$$\Theta(0)\ \text{有界}, \qquad \Theta(\pi)\ \text{有界}, \tag{16.10b}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) - \lambda R(r) = 0, \tag{16.11}$$

其中 λ 是分离变量时引进的待定参数．方程 (16.10a) 就是 Legendre 方程，配上有界条件 (16.10b)，也构成了一个本征值问题．通常总要作变换 $x = \cos\theta, y(x) = \Theta(\theta)$，并且把待定参数 λ 写成 $\nu(\nu+1)$，

这样，本征值问题 (16.10) 就变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\nu(\nu+1)y=0, \tag{16.12a}$$

$$y(\pm1)\text{ 有界}. \tag{16.12b}$$

为了求解本征值问题 (16.12) ，首先需要证明，如果本征值问题 (16.12) 有 (非零) 解的话，它的本征值 $\lambda=\nu(\nu+1)$ 一定为非负实数，因此 ν 也一定为非负实数．证明方法在上两章中已经不止一次地用过．这里请读者自己补足这个证明．

练习 16.1 证明：如果本征函数组 (16.11) 有 (非零) 解的话，其本征值 $\nu(\nu+1)$ 一定为非负实数．

下面的问题便是要具体求出本征值和本征函数．我们可以从 Legendre 方程在 $x=0$ 点邻域内两个线性无关解出发来求解．在上一节中，我们已经给出了这两个线性无关解的形式 (见 (16.2a) 和 (16.2b) 式) ，还论证了对于一般的 λ(或 ν) 值，这两个解在 $x=\pm1$ 都是对数发散的．为了使得方程 (16.12a) 的解在 $x=\pm1$ 均有界，这就要求 λ(或 ν) 取某些特殊值．在多数数学物理方法教材中都是这样做的，读者可参阅参考书目 [1, 2] ．

现在我们采用另一种方案，即从 Legendre 方程在 $x=1$ 点邻域内的两个线性无关解 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{Q}_\nu(x)$ 出发来求讨论． $\mathrm{P}_\nu(x)$ 在 $x=1$ 点是解析的，当然也就是有界的； $\mathrm{Q}_\nu(x)$ 在 $x=1$ 点是对数发散的．这样，如果我们把 Legendre 方程的通解写成

$$y(x)=c_1\mathrm{P}_\nu(x)+c_2\mathrm{Q}_\nu(x), \tag{16.13}$$

由于要求解在 $x=1$ 有界，必须有 $c_2=0$ ，而且不妨取 $c_1=1$ ．再进一步，要求解在 $x=-1$ 点也有界，就可以定出本征值 $\lambda=\nu(\nu+1)$ ，从而求出相应的本征函数．

在 $x=-1$ 点， $\mathrm{P}_\nu(x)$ 的数值为

$$\mathrm{P}_\nu(-1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)}.$$

容易看出，当 $n>\nu$ 以后，级数的各项符号相同，因此这个级数是一个正项级数. 它的相邻两项之比为

$$\begin{aligned}\frac{u_n}{u_{n+1}} &= -\left[\frac{(n+1)!}{n!}\right]^2\frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu+n+2)}\frac{\Gamma(\nu-n)}{\Gamma(\nu-n+1)}\\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+\nu+1)(n-\nu)} = 1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

根据 Gauss 判别法 ①，可以看出，对于一般的 ν 值，$\mathrm{P}_\nu(x)$ 在 $x=-1$ 点发散. 而且只要 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 是无穷级数，它就不可能在 $x=-1$ 点有界；要使得本征值问题 (16.12) 有 (非零) 解，就必须要求 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 不是无穷级数，即截断为多项式. 从 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 的具体形式看，这只能发生在 ν 为非负整数时. 所以，综上所述，本征值问题 (16.12) 的解就是

$$\text{本征值}\qquad \lambda_l = l(l+1), \qquad l=0,1,2,3,\cdots, \tag{16.14a}$$

$$\text{本征函数}\qquad y_l(x)=\mathrm{P}_l(x). \tag{16.14b}$$

$\mathrm{P}_l(x)$ 是一个 l 次多项式，称为 l 次 Legendre 多项式，

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{n=0}^{l}\frac{1}{(n!)^2}\frac{(l+n)!}{(l-n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n. \tag{16.15}$$

由此容易得到 Legendre 多项式在 $x=1$ 点的数值：

$$\mathrm{P}_l(1)=1. \tag{16.16}$$

练习 16.2 求 $\mathrm{P}_l'(1)$ 和 $\mathrm{P}_l''(1)$ 之值.

这里我们看到，Legendre 多项式是作为本征值问题 (16.12) 的解出现的，是作为 Legendre 方程在有界条件下的本征函数出现的.

---

① Gauss 判别法：若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 中相邻两项之比可以写成

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=1+\frac{\mu}{n}+O\left(n^{-\lambda}\right), \qquad \mu=\alpha+\mathrm{i}\beta, \quad \lambda>1,$$

则当 $\alpha>1$ 时，级数绝对收敛；当 $\alpha\le 1$ 时，级数不可能绝对收敛.

下面列出最低的几个 Legendre 多项式的表达式:

$$P_0(x) = 1, \tag{16.17a}$$

$$P_1(x) = x, \tag{16.17b}$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \tag{16.17c}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right), \tag{16.17d}$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right). \tag{16.17e}$$

它们的图形见图 16.1.

最后说明一下，如果要完整地求解定解问题 (16.8)，那么就还要解常微分方程 (16.11)，求出满足线性齐次偏微分方程 (16.8a) 和

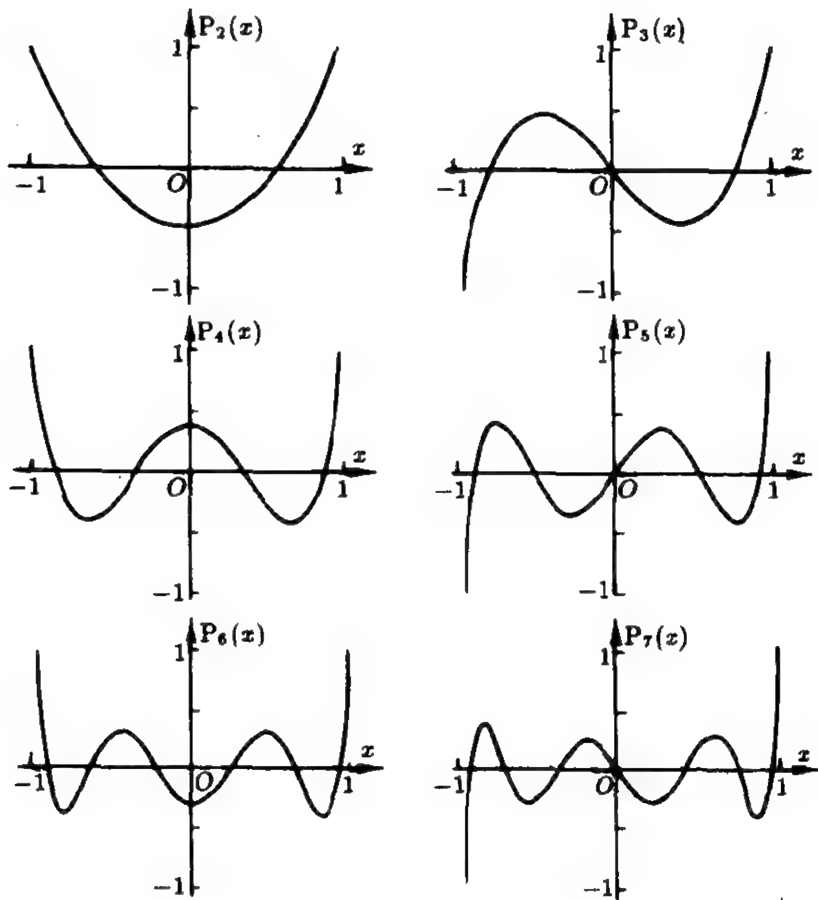


图 16.1　Legendre 多项式

线性齐次边界条件 (16.8b) 的特解，再由全部特解叠加出定解问题的一般解，而后利用边界条件 (16.8c) 定出叠加系数即可. 本节的目的只在于引进 Legendre 多项式. 下面几节将先研究 Legendre 多项式的一些基本性质，然后在 16.7 节集中讨论 Legendre 多项式在分离变量法中的应用，讨论有关偏微分方程定解问题的求解问题.

16.3 Legendre 多项式的微分表示

Legendre 多项式有多种表达式，除了上一节从 Legendre 方程的级数解引入的显明表达式外，常用的还有它的微分表示. 在此基础上还可以进一步得到 Legendre 多项式的一些其他性质.

Legendre 多项式的微分表示是

$$\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l. \tag{16.18}$$

这个表达式也称为 Rodrigues 公式.

证 因为

$$\begin{aligned}\left(x^2-1\right)^l &= (x-1)^l[2+(x-1)]^l \\ &= \sum_{n=0}^{l}\frac{l!}{n!\,(l-n)!}2^{l-n}(x-1)^{l+n},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l &= \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\sum_{n=0}^{l}\frac{1}{n!\,(l-n)!}2^{-n}(x-1)^{l+n} \\ &= \sum_{n=0}^{l}\frac{1}{n!\,(l-n)!}\frac{(l+n)!}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

这正是 (16.15) 式. 这样就证明了 Legendre 多项式的微分表示. □

从 Legendre 多项式的微分表示，立即可以看出 Legendre 多项式的奇偶性： l 为偶数时 $\mathrm{P}_l(x)$ 是偶函数； l 为奇数时 $\mathrm{P}_l(x)$ 是奇函数，即

$$\mathrm{P}_l(-x) = (-)^l \mathrm{P}_l(x). \tag{16.19}$$

再结合 $\mathrm{P}_l(x)$ 在 $x=1$ 点的数值，又可以得到 $\mathrm{P}_l(x)$ 在 $x=-1$ 点的数值，

$$\mathrm{P}_l(-1) = (-1)^l. \tag{16.20}$$

练习 16.3 求 $\mathrm{P}_l'(-1)$ 和 $\mathrm{P}_l''(-1)$ 之值.

从 Legendre 多项式的微分表示还可以直接求出 Legendre 多项式中所有各项的系数，从而导出 Legendre 多项式的另一个显明表达式. 为此，可将 $\left(x^2-1\right)^l$ 展开，

$$\left(x^2-1\right)^l = \sum_{r=0}^{l} (-)^r \frac{l!}{r!\,(l-r)!} x^{2l-2r},$$

然后逐项微商 l 次，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l &= \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l} \sum_{r=0}^{l} (-)^r \frac{l!}{r!\,(l-r)!} x^{2l-2r} \\ &= \sum_{r=0}^{[l/2]} (-)^r \frac{l!}{r!\,(l-r)!} \frac{(2l-2r)!}{(l-2r)!} x^{l-2r}, \end{aligned}$$

由于微商 l 次后，多项式的次数要降低 l 次，所以这里和式的上限就由微商前的 l 变为微商后的 $[l/2]$. 对比一下 Legendre 多项式的微分表示，就得到

$$\mathrm{P}_l(x) = \sum_{r=0}^{[l/2]} (-)^r \frac{(2l-2r)!}{2^l\, r!\,(l-r)!\,(l-2r)!} x^{l-2r}. \tag{16.21}$$

从这个表达式很容易求出 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(x)$ 在 $x=0$ 点的数值：

$$\mathrm{P}_{2l}(0) = (-)^l \frac{(2l)!}{2^{2l}\, l!\, l!}, \qquad \mathrm{P}_{2l+1}(0) = 0. \tag{16.22}$$

练习 16.4 求 $\mathrm{P}_{2l}'(0)$ 和 $\mathrm{P}_{2l+1}'(0)$ 之值.

从 Legendre 多项式的微分表示，还可以得到许多有意义的结果，例如，把 Legendre 多项式的微分表示和 Rolle 引理结合起来，

就能证明 l 次 Legendre 多项式的 l 个零点一定都是实数，并且位于区间 $(-1, 1)$ 内.

练习 16.5 证明：Legendre 多项式的零点均为实数，并且位于区间 $(-1, 1)$ 内.

16.4 Legendre 多项式的正交完备性

前面提到，Legendre 多项式是作为本征值问题 (16.12) 的本征函数出现的，因此，从本征值问题 (16.12) 出发，可以证明 Legendre 多项式的正交性，即不同次数的 Legendre 多项式在区间 $[-1, 1]$ 上正交，

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad k \neq l. \tag{16.23}$$

作为练习，请读者补足这个证明.

现在用另一种方法证明这个结果. 为此，先计算一个积分

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x,$$

其中 k 和 l 都是非负整数.

对于这个积分，从被积函数的奇偶性可以判断，

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{当 } k \pm l = \text{奇数}. \tag{16.24}$$

当 $k \pm l$ 为偶数时，可将 $\mathrm{P}_l(x)$ 用它的微分表示代入，于是有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^l\, l!}\int_{-1}^{1} x^k \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2^l\, l!}\left[x^k \frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l \Big|_{-1}^{1}\right. \\ &\qquad \left. - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l \mathrm{d}x\right].\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l$ 中一定含有因子 $\left(x^2-1\right)$，所以在代入上下限

$x=\pm 1$ 后，分部积分出来的项一定为 0 ，于是就有

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2^l\, l!}\int_{-1}^{1}(-)^1\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left(x^2-1\right)^l\mathrm{d}x.$$

这样，分部积分一次，其效果就表现在三方面：(1) 改变一次正负号；(2) 对函数 $\left(x^2-1\right)^l$ 的微商减少一次；(3) 对函数 x^k 的微商增加一次. 这样，分部积分 l 次后，微商运算就全部转移到函数 x^k 上，结果就变为

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2^l\, l!}\int_{-1}^{1}(-)^l\frac{\mathrm{d}^l x^k}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l\mathrm{d}x.$$

这时有两种可能，一是 $k<l$ ，函数 x^k 微商 l 次一定为 0 ，于是

$$\int_{-1}^{1} x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad 当 k<l. \tag{16.25}$$

另一种可能是 $k>l$ ，不妨令 $k=l+2n$ ，于是

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^{l+2n}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^l\, l!}\int_{-1}^{1}(-)^l\frac{\mathrm{d}^l x^{l+2n}}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2^l\, l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_{-1}^{1}x^{2n}\left(1-x^2\right)^l\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

作变换 $x^2=t$ ，并利用 B 函数就可以算出积分

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^{l+2n}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^l\, l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\int_{0}^{1}t^{n-1/2}(1-t)^l\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2^l\, l!}\frac{(l+2n)!}{(2n)!}\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(l+1)}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}\\ &= \frac{(l+2n)!}{2^{l+2n}\, n!}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}\\ &= 2^{l+1}\frac{(l+2n)!\,(l+n)!}{n!\,(2l+2n+1)!}.\end{aligned} \tag{16.26}$$

特别是 $k=l$ ，即 $n=0$ 时，

$$\int_{-1}^{1} x^l \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{l!}{2^l}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} = 2^{l+1}\frac{l!\,l!}{(2l+1)!}.$$

需要特别强调，上面的 (16.24) 和 (16.25) 两式说明，如果幂函数 x^k 的幂次 k 小于 Legendre 多项式的次数 l ，那么，幂函数 x^k 和 l 次 Legendre 多项式的乘积在区间 $[-1, 1]$ 上的积分一定为 0 .

练习 16.6 设 $f_k(x)$ 是任意一个 k 次多项式，证明

$$\int_{-1}^{1} f_k(x)\,\mathrm{P}_l(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{当} k < l.$$

现在把 (16.24)(16.25) 和 (16.27) 诸式的结果应用于积分

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x.$$

当 $k \neq l$ 时，不妨假设 $k < l$. 考虑到 $\mathrm{P}_k(x)$ 是 k 次多项式，不论 $l - k =$ 奇数或偶数，这个多项式中的各项乘以 $\mathrm{P}_l(x)$ 的积分都是 0 ，所以就证明了不同次数的 Legendre 多项式在区间 $[-1, 1]$ 上正交，即 (16.23) 式.

下面讨论 $k = l$ 的情形. 这时仍然可以写出一个 $\mathrm{P}_l(x)$ 的各项，然后逐项积分，

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left[c_l x^l + c_{l-2}x^{l-2} + c_{l-4}x^{l-4} + \cdots\right] \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x.$$

那么，除了第一项和 l 次 Legendre 多项式的乘积的积分不为 0 外，其余各项和 l 次 Legendre 多项式的乘积的积分均为 0 ，这是因为后面各项中幂函数的次数都小于 l . 于是，就有

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = c_l \int_{-1}^{1} x^l \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = c_l \times 2^{l+1} \frac{l!\,l!}{(2l+1)!},$$

c_l 是 l 次 Legendre 多项式中 x^l 项的系数. 由 (16.21) 式可以看出

$$c_l = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2},$$

所以， Legendre 多项式的模方是

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}. \tag{16.27}$$

把 (16.23) 式和 (16.27) 式合并起来，还可以写成

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}. \tag{16.28}$$

以上关于 Legendre 多项式正交性的讨论和模方的计算都是以 x 为自变量表述的. 当然也可以通过变换 $x=\cos\theta$ 变回到以 θ 为自变量，这样有关的公式就要作相应的变化. 例如 (16.28) 式就变为

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_k(\cos\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}. \tag{16.29}$$

这就是说， k 次 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_k(\cos\theta)$ 和 l 次 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上以权函数 $\sin\theta$ 正交. 这里的权函数 $\sin\theta$ 正好就是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right]+\lambda\sin\theta\Theta=0$$

中本征值 λ 后的函数 $\sin\theta$.

还可以证明，作为本征函数的 Legendre 多项式，也具有完备性：任意一个在区间 $[-1,1]$ 中分段连续的函数 $f(x)$ ，(在平均收敛[①]意义下) 可以展开为级数

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\mathrm{P}_l(x), \tag{16.30}$$

其中的展开系数 c_l 可以根据 Legendre 多项式的正交性求得，

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x. \tag{16.31}$$

例 16.1 将函数 $f(x)=x^3$ 按 Legendre 多项式展开.

解 设 $x^3=\sum\limits_{l=0}^{\infty}c_l\mathrm{P}_l(x)$ ，则

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}x^3\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x.$$

根据上面的讨论，可以判断，除了 $l=1$ 和 3 外， c_l 均为 0 .

$$x^3=c_1\mathrm{P}_1(x)+c_3\mathrm{P}_3(x). \tag{16.32}$$

---

① 如果

$$\lim_{N\to\infty}\int_{-1}^{1}\left|f(x)-\sum_{l=0}^{N}c_l\mathrm{P}_l(x)\right|^2\mathrm{d}x=0,$$

则称级数 $\sum\limits_{l=0}^{\infty}c_l\mathrm{P}_l(x)$ 平均收敛到 $f(x)$.

展开系数 c_1 和 c_3 分别为

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^4 \mathrm{d}x = \frac{3}{5}, \quad c_3 = \frac{7}{2}\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{P}_3(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{5}.$$

最后的结果就是

$$x^3 = \frac{3}{5}\mathrm{P}_1(x) + \frac{2}{5}\mathrm{P}_3(x). \tag{16.33}$$

在计算 c_3 中的积分时，可以直接引用 (16.27) 式的结果.

事实上，在求出了 c_1 之后，可以更简单地求得 c_3 ，这是因为在 (16.31) 式中代入 $x=1$ ，应该有 $c_1 + c_3 = 1$.

例 16.2 将函数 $\mathrm{P}_l'(x)$ 按 Legendre 多项式展开.

解 我们知道，$\mathrm{P}_l'(x)$ 是一个 $l-1$ 多项式，并且只含 x^{l-1}, x^{l-3}, x^{l-5}, $\cdots$ 等项，因此

$$\mathrm{P}_l'(x) = c_{l-1}\mathrm{P}_{l-1}(x) + c_{l-3}\mathrm{P}_{l-3}(x) + \cdots = \sum_{k=0}^{[(l-1)/2]} c_{l-2k-1}\mathrm{P}_{l-2k-1}(x),$$

其中

$$c_{l-2k-1} = \frac{2l-4k-1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l'(x)\,\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\mathrm{d}x \\ &\qquad = \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}'(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

在上式右端的第一项中代入

$$\mathrm{P}_l(1) = 1, \qquad \mathrm{P}_{l-2k-1}(1) = 1,$$

$$\mathrm{P}_l(-1) = (-1)^l, \qquad \mathrm{P}_{l-2k-1}(-1) = (-1)^{l-2k-1},$$

就可以求得此项的数值为 2 ；又因为 $\mathrm{P}_{l-2k-1}'(x)$ 是 $l-2k-2$ 次多项式，所以它和 l 次 Legendre 多项式的乘积的在区间 $[-1, 1]$ 上的

积分为 0 . 这样就得到

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x)\mathrm{d}x = 2, \tag{16.34}$$

因此， $c_{l-2k-1} = 2l - 4k - 1$ ，

$$\mathrm{P}_l'(x) = \sum_{k=0}^{[(l-1)/2]} (2l - 4k - 1)\mathrm{P}_{l-2k-1}(x). \tag{16.35}$$

例 16.3 计算积分 $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x$.

解 容易判断，当 $k+l$ 为奇数时积分一定为 0 ，故下面只需讨论 $k+l$ 为偶数的情形. 由于 k 和 l 的任意性，不妨假定 $k \geq l$. 利用例 16.2 中的结果，就有

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k'(x) \sum_{r=0}^{[(l-1)/2]} (2l - 4r - 1)\mathrm{P}_{l-2r-1}(x)\mathrm{d}x \\
&= 2 \sum_{r=0}^{[(l-1)/2]} (2l - 4r - 1).
\end{aligned}$$

如果 $l = 2n$ ，不难求出上式右端的和数

$$\sum_{r=0}^{n-1}(4n-1) = n(4n-1), \qquad \sum_{r=0}^{n-1} r = \frac{1}{2}n(n-1),$$

于是

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x = 2\sum_{r=0}^{n-1}(4n-4r-1) = 2n(2n+1).$$

若 $l = 2n+1$ ，又有

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{d}x &= 2\sum_{r=0}^{n}(4n-4r+1) \\
&= 2(4n+1)(n+1) - 4n(n+1) \\
&= (2n+1)(2n+2).
\end{aligned}$$

这样，不论 l 是偶数或奇数，都有

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}'_k(x)\mathrm{P}'_l(x)\mathrm{d}x = l(l+1), \quad k+l = \text{偶数}, \text{且}\, k \geq l. \tag{16.36}$$

关于 Legendre 多项式的完备性，也可以改用以 θ 为自变量表述．这时，如果要将函数 $f(\theta)$ 按 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 展开，

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \mathrm{P}_l(\cos\theta), \tag{16.37}$$

则展开系数为

$$c_l = \frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{16.38}$$

16.5 Legendre 多项式的生成函数

Legendre 多项式是首先在势论的研究中引进的．设在距原点 r 处放有一个单位点电荷，取点电荷所在点的位置为 z 轴方向，这时点电荷在 (r', θ, ϕ) 点的电势 (显然与 ϕ 无关) 即为

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta}} = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, & t = \dfrac{r'}{r}, \\[2ex] \dfrac{1}{r'}\dfrac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}, & t = \dfrac{r}{r'}, \end{cases}$$

其中 $x = \cos\theta$，并规定多值函数 $1/\sqrt{-2xt+t^2}$ 的单值分枝为

$$\left.\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\right|_{t=0} = 1.$$

在这样的规定下，函数 $1/\sqrt{1-2xt+t^2}$ 在 $t=0$ 点及其邻域内是解析的，因而可以作 Taylor 展开

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l t^l, \qquad |t| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|.$$

下面证明展开系数 c_l 就是 Legendre 多项式 $\mathrm{P}_l(x)$，即

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x) t^l, \qquad |t| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|. \tag{16.39}$$

函数 $1/\sqrt{1-2xt+t^2}$ 即称为 Legendre 多项式的生成函数．

证 直接将函数 $1/\sqrt{1-2xt+t^2}$ 在 $t=0$ 点作 Taylor 展开

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}&=\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2-2(x-1)t}}\\&=\frac{1}{1-t}\left[1-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}\right]^{-1/2}\\&=\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k\right)\left[-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}\right]^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}(x-1)^kt^k(1-t)^{-(2k+1)}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{k!}(x-1)^kt^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{n!\,(2k)!}t^n\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{l}\frac{(l+k)!}{k!\,k!\,(l-k)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^k\right]t^l.\end{aligned}$$

对照 (16.15) 式，就可以看出，这里的展开系数就是 l 次 Legendre 多项式. 这样就证明了 (16.39) 式. 级数的收敛范围，可以由生成函数 $1/\sqrt{1-2xt+t^2}$ 的奇点确定. □

证明 (16.39) 式，也可以从 Taylor 展开的系数公式

$$c_l=\frac{1}{l!}\frac{\partial^l}{\partial t^l}\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}\bigg|_{t=0}$$

出发，将它表示成围道积分，经过简单的变量代换，就可以化为 $\mathrm{P}_l(x)$ 的微分表示. 见参考书目 [1]，第 279 ~ 280 页.

利用 Legendre 多项式的生成函数，也可以得到许多有用的结果. 例如，在 (16.39) 中令 $x=1$，就得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2}}=\frac{1}{1-t}=\sum_{l=0}^{\infty}t^l=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(1)t^l,$$

所以，$\mathrm{P}_l(1)=1$.

又如，根据

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-2(-x)(-t)+(-t)^2}},$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(x)t^l = \sum_{l=0}^{\infty} \mathrm{P}_l(-x)(-t)^l,$$

也可以证明 Legendre 多项式的奇偶性 $\mathrm{P}_l(-x) = (-)^l \mathrm{P}_l(x)$.

从 Legendre 多项式的生成函数出发，还可以证明 Legendre 多项式的正交性，并计算 Legendre 多项式的模方①．为此，我们直接计算积分

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2xt+t^2}\sqrt{1-2xs+s^2}}.$$

作代换

$$u^2 = \frac{1+t^2}{2t} - x, \qquad v^2 = \frac{1+s^2}{2s} - x,$$

将积分变量 x 换为 u 和 v(当然 u 和 v 不是互相独立的)．因此，

$$u\mathrm{d}u = v\mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}x = -2u\mathrm{d}u = -2v\mathrm{d}v = -u\mathrm{d}u - v\mathrm{d}v.$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}u}{v} = \frac{\mathrm{d}v}{u} = \frac{\mathrm{d}(u+v)}{u+v}.$$

于是就得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2xt+t^2}\sqrt{1-2xs+s^2}}\\
&\qquad = -\frac{u\mathrm{d}u + v\mathrm{d}v}{2\sqrt{ts}uv} = -\frac{1}{2\sqrt{ts}}\left(\frac{\mathrm{d}u}{v} + \frac{\mathrm{d}v}{u}\right)\\
&\qquad = -\frac{1}{\sqrt{ts}}\frac{\mathrm{d}(u+v)}{u+v}.
\end{aligned}$$

这样就能算出积分

$$I = -\frac{1}{\sqrt{ts}} \ln|u+v|\Big|_{x=-1}^{x=1}.$$

注意根据 u 和 v 的定义，当 $|t|<1$ ， $|s|<1$ 时，应该有

$$u\Big|_{x=1} = \frac{1-t}{\sqrt{2t}}, \qquad u\Big|_{x=-1} = \frac{1+t}{\sqrt{2t}},$$

---

① 引自 H. Sagan, Boundary & eigenvalue problems in mathematical physics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.

$$v\Big|_{x=1}=\frac{1-s}{\sqrt{2s}},\qquad u\Big|_{x=-1}=\frac{1+s}{\sqrt{2s}}.$$

代入即得

$$I=\frac{1}{\sqrt{ts}}\ln\frac{1+\sqrt{ts}}{1-\sqrt{ts}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{2l+1}(ts)^l.$$

另一方面，由 Legendre 多项式的生成函数，又应该有

$$I=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}t^l s^k\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x.$$

比较系数，就求得

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{P}_k(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}.$$

这正是 16.4 节中已经得到过的结果.

16.6 Legendre 多项式的递推关系

从 Legendre 多项式的生成函数出发，很容易导出邻次 Legendre 多项式之间的关系，即 Legendre 多项式的递推关系.

根据 Legendre 多项式的生成函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)t^l,\tag{16.40}$$

两端对 t 微商，有

$$-\frac{1}{2}\frac{-2x+2t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}}=\sum_{l=0}^{\infty}l\mathrm{P}_l(x)t^{l-1},$$

即

$$\frac{x-t}{(1-2xt+t^2)^{1/2}}=\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{l=0}^{\infty}l\mathrm{P}_l(x)t^{l-1}.$$

再次利用 (16.40) 式，又得到

$$(x-t)\sum_{l=0}^{\infty}\mathrm{P}_l(x)t^l=\left(1-2xt+t^2\right)\sum_{l=0}^{\infty}l\mathrm{P}_l(x)t^{l-1}.$$

比较 t^l 项的系数，有

$$xP_l(x) - P_{l-1}(x) = (l+1)P_{l+1}(x) - 2xlP_l(x) + (l-1)P_{l-1}(x),$$

整理即得

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x). \tag{16.41}$$

这样就得到 Legendre 多项式的一个递推关系，它给出了三个邻次 Legendre 多项式之间的联系．反复利用这个递推关系，就可以把任意次的 Legendre 多项式用零次 Legendre 多项式 $P_0(x) = 1$ 和一次 Legendre 多项式 $P_1(x) = x$ 表示出来．这特别适合于使用计算机完成这种重复性的计算．

练习 16.7　选择一种计算机语言，编制一个计算任意次 Legendre 多项式的程序段或外部函数．

将 (16.40) 式对 x 求导，又能得到

$$-\frac{1}{2}\frac{-2t}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l'(x)t^l,$$

于是

$$t\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l = \left(1-2xt+t^2\right)\sum_{l=0}^{\infty} P_l'(x)t^l.$$

比较 t^{l+1} 项的系数，得

$$P_l(x) = P_{l+1}'(x) - 2xP_l'(x) + P_{l-1}'(x). \tag{16.42}$$

这个递推关系中，出现的是三个邻次 Legendre 多项式及其导数．

把 (16.41) 式对 x 求导，还可以得到

$$(2l+1)P_l(x) + (2l+1)xP_l'(x) = (l+1)P_{l+1}'(x) + lP_{l-1}'(x),$$

和 (16.42) 式联立，消去 $P_{l-1}'(x)$ 或 $P_{l+1}'(x)$，又可以得到递推关系

$$P_{l+1}'(x) = xP_l'(x) + (l+1)P_l(x), \tag{16.43}$$

$$P_{l-1}'(x) = xP_l'(x) - lP_l(x). \tag{16.44}$$

这两个递推关系，则是把 $P_{l\pm1}'(x)$ 用 $P_l(x)$ 及其导数表示出来．

把这些递推关系重新组合，还可以进一步得到其他形式的递推关系.

递推关系的一个用途是计算某些类型的积分，例如

$$\int_{-1}^{1} x\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x.$$

根据递推关系 (16.41)，就能够计算出

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} x\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{l+1}{2l+1}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{k+1}(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x + \frac{l}{2l+1}\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \\
&\quad = \frac{l+1}{2l+1}\frac{2}{2l+3}\delta_{k+1,l} + \frac{l}{2l+1}\frac{2}{2l-1}\delta_{k-1,l}.
\end{aligned} \tag{16.45}$$

作为 Legendre 多项式递推关系的另一种特殊表述形式，下面讨论一下 Legendre 多项式的升降算符.

定义算符 L_n 为

$$L_n \equiv \left(1-x^2\right)\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + n(n+1)\right\},$$

则 $\mathrm{P}_n(x)$ 就是方程

$$L_n\left[\mathrm{P}_n(x)\right] = 0 \tag{16.46}$$

的 (有界) 解. 直接验算可以证明

$$L_n = S_nT_n + n^2 \tag{16.47}$$

$$\quad = T_{n+1}S_{n+1} + (n+1)^2, \tag{16.48}$$

其中

$$T_n = \left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + nx, \tag{16.49}$$

$$S_n = \left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - nx. \tag{16.50}$$

于是可以将 (16.46) 式改写成

$$S_nT_n\left[\mathrm{P}_n(x)\right] + n^2\mathrm{P}_n(x) = 0.$$

两端再作用以算符 T_n，则有

$$T_n S_n T_n [\mathrm{P}_n(x)] + n^2 T_n \mathrm{P}_n(x) = 0,$$

于是

$$T_n S_n [T_n \mathrm{P}_n(x)] + n^2 [T_n \mathrm{P}_n(x)] = 0,$$

即

$$L_{n-1} [T_n \mathrm{P}_n(x)] = 0. \tag{16.51}$$

这是因为，根据 (16.48) 式，应该有

$$T_n S_n + n^2 = L_{n-1}.$$

(16.51) 式说明，$T_n \mathrm{P}_n(x)$ 是 $n-1$ 次 Legendre 方程的 (有界) 解，即 $T_n \mathrm{P}_n(x)$ 一定与 $\mathrm{P}_{n-1}(x)$ 成正比，

$$\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + nx\right]\mathrm{P}_n(x) = c\mathrm{P}_{n-1}(x).$$

令 $x=1$，就可以求得 $c=n$，于是

$$T_n \mathrm{P}_n(x) = \left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + nx\right]\mathrm{P}_n(x) = n\mathrm{P}_{n-1}(x). \tag{16.52}$$

T_n 称为 n 次 Legendre 多项式的降算符，因为它作用在 n 次 Legendre 多项式上，就可以得到 $n-1$ 次 Legendre 多项式.

同理，根据 (16.48) 式可以证明，

$$L_{n+1} [S_{n+1} \mathrm{P}_n(x)] = 0.$$

所以 S_{n+1} 是 n 次 Legendre 多项式的升算符，

$$\begin{aligned} S_{n+1}\mathrm{P}_n(x) &= \left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - (n+1)x\right]\mathrm{P}_n(x) \\ &= -(n+1)\mathrm{P}_{n+1}(x). \end{aligned} \tag{16.53}$$

练习 16.8 证明 (16.53) 式.

16.7 Legendre 多项式应用举例

本节通过静电学的几个例子，讨论 Legendre 多项式在分离变量法中的应用.

例 16.4 均匀电场中的导体球.

设在电场强度为 E_0 的均匀电场中放进一个接地导体球，球的半径为 a. 求球外任意一点的电势.

解 放进导体球后，由于静电感应，在导体球的球面上就会形成一定的感生面电荷分布，而使球体成为等势体. 球外任意一点的总电势就是原有的均匀电场的电势和感生电荷的电势的叠加. 球体接地，意味着球体的电势为 0. 因为在球外处处没有电荷，所以在球外的电势满足 Laplace 方程. 如果采用球坐标系，坐标原点与球心重合，极轴沿原来电场的方向. 考虑到均匀电场以及球体的对称性，在球面上的感生电荷一定是绕极轴旋转不变的，因而，对于球外任意一点，无论是感生电荷产生的的电势，或是总电势，也都是绕极轴旋转不变的.

设 $u(r,\theta)$ 是球外一点 (r,θ,ϕ) 的总电势， $u_1(r,\theta)$ 和 $u_2(r,\theta)$ 分别是均匀电场和感生电荷的电势,

$$u_1(r,\theta) = -E_0 z + u_0 = -E_0 r\cos\theta + u_0,$$

其中的常数 u_0 即为坐标原点处的电势. $u_2(r,\theta)$ 则由定解问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_2}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u_2}{\partial\theta}\right) = 0, \tag{16.54a}$$

$$u_2\Big|_{\theta=0}\ \text{有界}, \qquad u_2\Big|_{\theta=\pi}\ \text{有界}, \tag{16.54b}$$

$$u_2\Big|_{r=a} = E_0 a\cos\theta - u_0, \qquad u_2\Big|_{r\to\infty} \to 0. \tag{16.54c}$$

决定. $u_2(r,\theta)$ 之所以满足 Laplace 方程，从物理上说，是由于感生电荷只是分布在球面上，而球外处处皆无感生电荷存在. 从数学上说，因为 $u(r,\theta) = u_1(r,\theta)+u_2(r,\theta)$ 和单独的 $u_1(r,\theta)$ 都满足 Laplace 方程. 同样由于感生电荷只是分布在球面上，所以当 $r\to\infty$ 时 $u_2(r,\theta)$ 应当趋于 0.

下面就来求解定解问题 (16.54). 将 (16.54a) 和 (16.54b) 分离变量后，可以得到

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right] + \lambda\Theta(\theta) = 0, \tag{16.55a}$$

$$\Theta(0)\ \text{有界}, \qquad \Theta(\pi)\text{有界}, \tag{16.55b}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]-\lambda R(r)=0, \tag{16.56}$$

其中 λ 是分离变量时引进的待定参数. 在 16.2 节中已经讨论过本征值问题 (16.55)，其解是

本征值 $\quad \lambda_l=l(l+1), \qquad l=0,1,2,3,\cdots, \qquad (16.57a)$

本征函数 $\quad \Theta_l(\theta)=\mathrm{P}_l(\cos\theta). \qquad (16.57b)$

为了求解方程 (16.56)，仍然可以作变换 $t=\ln r$，将方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2R_l}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}R_l}{\mathrm{d}t}-l(l+1)R_l=0.$$

于是

$$R_l(r)=A_l\mathrm{e}^{lt}+B_l\mathrm{e}^{-(l+1)t}=A_lr^l+B_lr^{-l-1}. \tag{16.58}$$

因此，满足方程 (16.54a) 和有界条件 (16.54b) 的一般解就是

$$u_2(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l+B_lr^{-l-1}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{16.59}$$

考虑到无穷远条件 $u_2\big|_{r\to\infty}\to 0$，应该有

$$A_l=0.$$

再代入球面 $r=a$ 上的边界条件，

$$\begin{aligned}u_2(r,\theta)\Big|_{r=a} &= \sum_{l=0}^{\infty}B_la^{-l-1}\mathrm{P}_l(\cos\theta)\\ &= E_0a\cos\theta-u_0 = E_0a\mathrm{P}_1(\cos\theta)-u_0\mathrm{P}_0(\cos\theta),\end{aligned}$$

所以有

$$B_0=-u_0a,\quad B_1=E_0a^3,\quad \text{和}\quad B_l=0,\quad l\geq 2.$$

这样就求得

$$u_2(r,\theta)=-u_0\frac{a}{r}+\frac{E_0a^3}{r^2}\cos\theta. \tag{16.60}$$

这里求得的 $u_2(r,\theta)$ 当然就反映了球面上感生电荷的分布情况. 在均匀电场的作用下，接地球面上的感生电荷相当于位于坐标原点的点电荷和电偶极子的叠加. 点电荷的电量为 $-4\pi\varepsilon_0u_0a$；电偶极子的偶极矩为 $4\pi\varepsilon_0E_0a^3$，方向与均匀电场的方向相同.

将 $u_1(r,\theta)$ 和 $u_2(r,\theta)$ 叠加，就得到球外任意一点的总电势：

$$u(r,\theta) = u_0\left(1-\frac{a}{r}\right) - E_0\left(1-\frac{a^3}{r^3}\right)r\cos\theta. \tag{16.61}$$

图 16.2 给出了过极轴的任意一个截面上电力线的分布图.

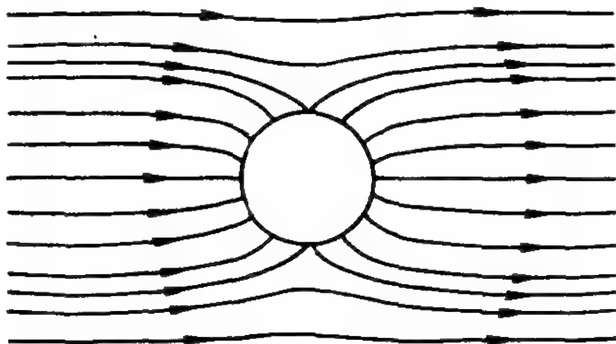


图 16.2　均匀电场中的导体球

例 16.5　点电荷影响下均匀介质球的电势.

如图 16.3 所示，设有半径为 a 的均匀介质球 (电容率为 ε)，距球心 $b\,(b>a)$ 处放一点电荷 q，求介质球内外任意一点的电势.

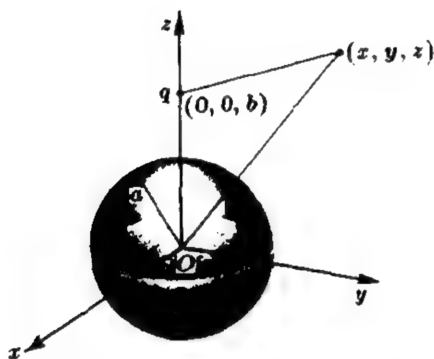


图 16.3　点电荷影响下的介质球

解　在点电荷作用下，介质球发生极化. 但由于介质球是均匀的，这些极化电荷只集中在球的表面. 因此，介质球内、外任意一点的电势，就是点电荷的电势和极化面电荷的电势的叠加. 如果取球坐标系，坐标原点放在球心，极轴指向点电荷，显然，无论是点电荷的电势，或是极化电荷的电势，都是绕极轴旋转不变的，也就是说，与 ϕ 无关. 设 (r,θ,ϕ) 点的总电势为 $u(r,\theta)$，极化电荷产生的电势为 $v(r,\theta)$，则有

$$u(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}} + v(r,\theta). \tag{16.62}$$

上式右端的第一项为点电荷 q 产生的电势，ε_0 为真空电容率. 由

于球内外的电容率不同，所以，在求 $v(r,\theta)$ 或 $u(r,\theta)$ 时，需要区分 $r<a$ (球内) 和 $r>a$(球外)．我们以后用 $v_<(r,\theta)$ 和 $v_>(r,\theta)$ 分别表示球内 $(r<a)$ 和球外 $(r>a)$ 的 $v(r,\theta)$ 值，相应地，用 $u_<(r,\theta)$ 和 $u_>(r,\theta)$ 分别表示球内 $(r<a)$ 和球外 $(r>a)$ 的 $u(r,\theta)$ 值.

现在就来求 $v_<(r,\theta)$ 和 $v_>(r,\theta)$．由于极化电荷只分布在球面上，所以，除了球面上的各点之外，$v_<(r,\theta)$ 和 $v_>(r,\theta)$ 处处都满足 Laplace 方程．再考虑到有界条件和无穷远条件，就应该有

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_<}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_<}{\partial\theta}\right)=0, \tag{16.63a}$$

$$v_<\Big|_{\theta=0}\ 有界,\qquad v_<\Big|_{\theta=\pi}\ 有界, \tag{16.63b}$$

$$v_<\Big|_{r=0}\ 有界, \tag{16.63c}$$

和

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v_>}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v_>}{\partial\theta}\right)=0, \tag{16.64a}$$

$$v_>\Big|_{\theta=0}\ 有界,\qquad v_>\Big|_{\theta=\pi}\ 有界, \tag{16.64b}$$

$$v_>\Big|_{r\to\infty}\to 0. \tag{16.64c}$$

注意单独的 (16.63) 和 (16.64) 都不构成适定的定解问题．事实上，仿照例 16.4 中的做法，可以求得 (16.63) 的解为

$$v_<(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l \mathrm{P}_l(\cos\theta), \tag{16.65}$$

其中系数 A_l 未定，所以，解存在但不唯一．同样，(16.64) 的解是

$$v_>(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-l-1}\mathrm{P}_l(\cos\theta), \tag{16.66}$$

系数 B_l 也未定.

为了唯一地定出 $v_<(r,\theta)$ 和 $v_>(r,\theta)$，还应当列出它们在球面上必须满足的连接条件：球内、外的总电势 $u_<(r,\theta)$ 和 $u_>(r,\theta)$，在球面上一定满足电势连续和电势移矢量的法向分量连续，

$$u_<\Big|_{r=a}=u_>\Big|_{r=a},\qquad \varepsilon\frac{\partial u_<}{\partial r}\Big|_{r=a}=\frac{\partial u_>}{\partial r}\Big|_{r=a}. \tag{16.67}$$

所以，对于 $v_<(r,\theta)$ 和 $v_>(r,\theta)$ ，单独地有

$$v_<\Big|_{r=a}=v_>\Big|_{r=a}, \tag{16.68a}$$

$$\varepsilon\left[\frac{\partial v_<}{\partial r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\right]_{r=a}$$
$$=\left[\frac{\partial v_>}{\partial r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial r}\frac{q}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\right]_{r=a}. \tag{16.68b}$$

由 (16.68a) 式，可得

$$A_la^l=B_la^{-l-1}. \tag{16.69}$$

再根据展开式

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}}=\frac{1}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^l\mathrm{P}_l(\cos\theta),$$

可以求得

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2+b^2-2rb\cos\theta}}\Big|_{r=a}=\frac{1}{b^2}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^{l-1}l\mathrm{P}_l(\cos\theta),$$

由 (16.68b) 又可得

$$\varepsilon A_lla^{l-1}+\frac{(\varepsilon-1)q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{la^{l-1}}{b^{l+1}}=-B_l(l+1)a^{-l-2}. \tag{16.70}$$

解联立方程 (16.69) 和 (16.70)，就能最后求得

$$A_l=-\frac{(\varepsilon-1)q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{l+1+\varepsilon l}\frac{1}{b^{l+1}}, \tag{16.71a}$$

$$B_l=-\frac{(\varepsilon-1)q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{l+1+\varepsilon l}\frac{a^{2l+1}}{b^{l+1}}. \tag{16.71b}$$

代回到 (16.65) 和 (16.66) 式，就给出了解 $v_<(r,\theta)$ 和 $v_>(r,\theta)$. 再代入 (16.62) 式，最后就给出球内外的总电势 $u_<(r,\theta)$ 和 $u_>(r,\theta)$.

例 16.6 均匀细圆环的引力势.

设有一均匀细圆环，半径为 a ，质量为 M ，求它在空间任意一点的引力势.

解 质点之间的万有引力和点电荷之间的静电力，都同样服

从 Coulomb 定律，因此，引力势和静电势一样，都满足 Poisson 方程. 这样，在本问题中，除了正好在圆环上的各点外，引力势应该处处满足 Laplace 方程.

仍取球坐标系，坐标原点放在环心，而圆环则处在赤道面上. 这时，空间任意一点 (r,θ,ϕ) 的引力势应该与 ϕ 无关， $u=u(r,\theta)$. 可以写出 u 所满足的方程和部分定解条件

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0,\quad (r,\theta)\neq\left(a,\frac{\pi}{2}\right), \tag{16.72a}$$

$$u\Big|_{\theta=0}\text{有界},\qquad u\Big|_{\theta=\pi}\text{有界}, \tag{16.72b}$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界},\qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0. \tag{16.72c}$$

显然，这还不是一个完整的定解问题(或者说，这个定解问题不是适定的)，因为在 (16.72) 中并没有反映出产生引力势的源(质量分布)的情况. 如果要写出均匀细圆环质量分布的体密度，势必要用到 δ 函数. 这样，方程 (16.72a) 就变为

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)&+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\\&=-4\pi GMf(r)\delta(r-a)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\end{aligned} \tag{16.72a$'$}$$

其中 G 是引力常数，函数 $f(r)$ 可以由

$$\iiint f(r)\delta(r-a)\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=1$$

定出，而且由于 $f(r)\delta(r-a)=f(a)\delta(r-a)$ ，所以有

$$f(r)=f(a)=\frac{1}{2\pi a^2}. \tag{16.73}$$

下面我们就来求解由 (16.72a$'$)(16.72b) 和 (16.72c) 构成的定解问题. 由 δ 函数的性质可以知道，当 $r\neq a$ 时，方程 (16.72a$'$) 就退化为 Laplace 方程. 这样，再结合 (16.72b) 和 (16.72c) ，就可以得到

$$u(r,\theta)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l\mathrm{P}_l(\cos\theta), & r<a,\\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}B_l r^{-l-1}\mathrm{P}_l(\cos\theta), & r>a.\end{cases} \tag{16.74}$$

然后就应该利用圆环的质量分布 (即方程 (16.72a′) 右端的非齐次项) 定出系数 A_l 和 B_l . 考虑到 δ 函数应该是间断函数的导数，所以 $u(r,\theta)$ 在球面 $r=a$ 上一定是连续的，

$$u(r,\theta)\Big|_{r=a-0}^{r=a+0}=0, \tag{16.75}$$

而 $\partial u(r,\theta)/\partial r$ 在球面 $r=a$ 上一定是不连续的，它在球面 $r=a$ 两侧的跃变可以由方程 (16.72a′) 对 r 积分得到：

$$r^2\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a-0}^{r=a+0}=-2GM\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a-0}^{r=a+0}=-\frac{2GM}{a^2}\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right). \tag{16.76}$$

由 (16.75) 式可得

$$A_l a^l=B_l a^{-l-1},$$

由 (16.76) 式又可得 ①

$$A_l l a^{l+1}+B_l(l+1)a^{-l}=(2l+1)GM\mathrm{P}_l(0).$$

解之即得

$$A_l=GMa^{-l-1}\mathrm{P}_l(0),\qquad B_l=GMa^l\mathrm{P}_l(0).$$

所以

$$u(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^l\mathrm{P}_l(0)\mathrm{P}_l(\cos\theta), & r<a,\\[2ex] \dfrac{GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l(0)\mathrm{P}_l(\cos\theta), & r>a.\end{cases}$$

---

① 这里用到了 $\delta(\theta-\pi/2)$ 按 Legendre 多项式的展开

$$\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\mathrm{P}_l(\cos\theta),$$

展开系数为

$$c_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^{\pi}\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2l+1}{2}\mathrm{P}_l(0).$$

代入 $\mathrm{P}_l(0)$ 值 (见 (16.22) 式)，即得

$$u(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(-)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}\,l!\,l!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta), & r<a,\\[2ex] \dfrac{GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(-)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}\,l!\,l!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta), & r>a.\end{cases}\tag{16.77}$$

以上介绍的是此问题的标准解法：从完整的定解问题出发，写出一般解，然后根据本征函数的正交性定出叠加系数．在这个问题中，方程的非齐次项具有特殊性：只在圆环 $r=a, \theta=\pi/2$ 上不为 0，而且，非齐次项在圆环上的数值为 ∞(这样才能保证总质量为有限值)，相应地，在求解时也就采用了特殊的做法，即将非齐次方程 (16.72a$'$) 转化为齐次方程 (16.72a) 和球面 $r=a$ 上的连接条件 (16.75)(16.76)．连接条件 (16.75) 式 (即引力势连续) 是容易写出的，但关于引力势的导数在圆环处的情况 (即 (16.76) 式) 却难以直接写出．这里实际上是介绍了一种写连接条件的方法．

本题还有一种非标准的解法，即根据齐次方程 (16.72a) 和定解条件 (16.72b)(16.72c)，求出一般解 (16.74)，然后并不利用连接条件、根据 Legendre 多项式的正交性定系数，而是把 (16.74) 式看成是 $u(r,\theta)$ 在 $r=0$ 或 $r=\infty$ 点的邻域内的 Taylor 展开，设法找到 $u(r,\theta)$ 在某一特殊 θ 方向上的数值，而后根据 Taylor 展开的唯一性定出叠加系数．由于圆环具有的对称性，圆环上任意一点到轴线上 $(r,\theta)=(r,0)$ 或 (r,π) 点的距离相等，因而可以由 Coulomb 定律直接叠加出轴线上任意一点 $(r,0)$ 或 (r,π) 的引力势，

$$\begin{aligned}u(r,\theta)\Big|_{\theta=0,\pi}&=\oint\frac{GM}{2\pi a}\frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{a^2+r^2}}=\frac{GM}{\sqrt{a^2+r^2}}\\&=\begin{cases}\dfrac{GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(-)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}\,(l!)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}, & r<a,\\[2ex] \dfrac{GM}{r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}(-)^l\frac{(2l)!}{2^{2l}\,(l!)^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l}, & r>a.\end{cases}\end{aligned}\tag{16.78}$$

另一方面，由 (16.74) 式又可以得到

$$u(r,\theta)\Big|_{\theta=0}=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{\infty}A_lr^l, & r<a,\\ \sum\limits_{l=0}^{\infty}B_lr^{-l-1}, & r>a\end{cases}$$

或

$$u(r,\theta)\Big|_{\theta=\pi}=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{\infty}(-)^lA_lr^l, & r<a,\\ \sum\limits_{l=0}^{\infty}(-)^lB_lr^{-l-1}, & r>a.\end{cases}$$

和 (16.78) 式相比较，就可以求得

$$A_{2l}=(-)^l\frac{GM}{a}\frac{(2l)!}{2^{2l}\,l!\,l!}a^{-2l},\qquad A_{2l+1}=0,$$

$$B_{2l}=(-)^l\frac{GM}{a}\frac{(2l)!}{2^{2l}\,l!\,l!}a^{2l+1},\qquad B_{2l+1}=0.$$

代入 (16.74) 式，可以看出，解的形式和 (16.77) 式完全相同.

容易理解，这种解法的根据是幂级数展开的唯一性. 但是，能否应用幂级数展开的唯一性比较系数，关键在于得到的展开式 (在本题中就是 (16.78) 式) 是否在 $r=0$ 或 $r=\infty$ 点的邻域内成立. 在 C. A. Croxton 的 Introductory Eigenphysics (中译本：《数学物理方程导论》，戴安英，钱伯初译，高等教育出版社 1982 年出版) 一书中把这种方法归结为一个更普遍的结论 (详见下一节)，并进一步讨论了均匀带电圆盘的静电势. 但是，恰恰在该问题中，就不能满足比较系数的要求条件，因而得到的解是不正确的. 我们将在下一节作具体的分析讨论.

*16.8 圆盘的引力势与静电势

例 16.7 设有一均匀圆盘，半径为 a，总质量为 M，求它在空间任意一点的引力势.

解 我们还是采用两种解法. 一种是标准解法，一种是非标准

解法.

采用标准解法，先要列出定解问题. 取球坐标系，坐标原点放在圆盘的中心，而圆盘处在赤道面上. 这时空间任意一点 (r, θ, ϕ) 的引力势显然与 ϕ 无关， $u = u(r, \theta)$. 它所满足的定解问题是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) = -4\pi G\varrho(r, \theta), \tag{16.79a}$$

$$u\Big|_{\theta=0}\text{有界}, \qquad u\Big|_{\theta=\pi}\text{有界}, \tag{16.79b}$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}, \qquad u\Big|_{r\to\infty} \to 0, \tag{16.79c}$$

其中

$$\varrho(r,\theta) = \frac{M}{\pi a^2 r}\delta(\theta - \pi/2)\eta(a - r). \tag{16.80}$$

当 $r > a$ 时，方程 (16.79a) 是齐次的. 考虑到有界条件 (16.79b) 和 (16.79c) 中的无穷远条件，故有

$$u_{\text{外}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{16.81}$$

当 $r < a$ 时，方程 (16.79a) 是非齐次的，应当按相应齐次问题的本征函数展开，

$$u_{\text{内}} = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r)\mathrm{P}_l(\cos\theta), \tag{16.82}$$

同时，将方程 (16.79a) 的非齐次项也按本征函数 $\mathrm{P}_l(\cos\theta)$ 展开，由本征函数的正交性，就可以导出 $R_l(r)$ 所满足微分方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R_l(r)}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}R_l(r) = -\frac{4GM}{a^2 r}\frac{2l+1}{2}\mathrm{P}_l(0).$$

由 (16.79c) 中的有界条件又可以分离出 $R_l(0)$有界 . 解之即得

$$R_l(r) = \frac{2GM}{a}\frac{2l+1}{l(l+1)-2}\frac{r}{a}\mathrm{P}_l(0) + B_l\left(\frac{r}{a}\right)^l. \tag{16.83}$$

现在，应当列出在球面 $r = a$ 上的连接条件.

$$u\Big|_{r=a-} = u\Big|_{r=a+} \qquad \text{(引力势连续)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a-} = \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a+} \qquad \text{(引力势的径向导数连续)}.$$

它们可以由方程 (16.79a) 推出. 因为即使在 $\theta=\pi/2$ 方向上，质量的径向密度分布不连续，但在球面 $r=a$ 两侧的左右极限仍然都存在 (这里不必考虑因子 $\delta(\theta-\pi/2)$ 的存在，它反映了质量分布只集中在赤道面上，与径向奇异性无关)，因此，引力势及其径向导数都是连续的. 否则，在方程 (16.79a) 的右端便会出现 $\delta(r-a)$ 甚至 $\delta'(r-a)$. 将上面求出的 $u_外$ 和 $u_内$ 代入连接条件，并利用本征函数的正交性比较系数，就有

$$A_l=B_l+\frac{2GM}{a}\frac{2l+1}{l(l+1)-2}\mathrm{P}_l(0),$$

$$-(l+1)A_l=lB_l+\frac{2GM}{a}\frac{2l+1}{l(l+1)-2}\mathrm{P}_l(0).$$

解之得

$$A_l=\frac{2GM}{a}\frac{2l+1}{l(l+1)-2}\frac{l-1}{2l+1}\mathrm{P}_l(0)=\frac{2GM}{a}\frac{1}{l+2}\mathrm{P}_l(0),$$

$$B_l=\frac{2GM}{a}\frac{2l+1}{l(l+1)-2}\left(-\frac{l+2}{2l+1}\right)\mathrm{P}_l(0)=-\frac{2GM}{a}\frac{1}{l-1}\mathrm{P}_l(0).$$

所以

$$u_外=\frac{2GM}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l+2}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}\mathrm{P}_l(0)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

$$=\frac{GM}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(0)\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta),\qquad(16.84\text{a})$$

$$u_内=\frac{2GM}{a}\frac{r}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-1}+\frac{1}{2l+2}\right)\mathrm{P}_{2l}(0)\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)$$

$$-\frac{2GM}{a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(0)\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta).\qquad(16.84\text{b})$$

在上面的结果中用到了 $P_{2l+1}(0)=0$.

再介绍非标准解法. 取圆环 $\rho-\rho+\mathrm{d}\rho$ ，质量为

$$\frac{M}{\pi a^2}2\pi\rho\,\mathrm{d}\rho=\frac{2M}{a^2}\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

根据 16.7 节的结果，此圆环产生的引力势为

$$
du = \begin{cases} \dfrac{2GM}{a^2} d\rho \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \binom{-1/2}{l} \left(\dfrac{r}{\rho}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\theta), & r < \rho, \\ \dfrac{2GM}{a^2} d\rho \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \binom{-1/2}{l} \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos\theta), & r > \rho. \end{cases}
$$

把这些环从 $\rho = 0$ 到 $\rho = a$ 叠加起来，就得到均匀圆盘的引力势. 所以，当 $r > a$ 时，

$$
\begin{aligned} u &= \frac{2GM}{a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-1/2}{l} P_{2l}(\cos\theta) \int_0^a \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2l+1} d\rho \\ &= \frac{2GM}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-1/2}{l} \frac{1}{2l+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1} P_{2l}(\cos\theta), \end{aligned} \tag{16.85}
$$

当 $r < a$ 时，

$$
\begin{aligned} u &= \frac{2GM}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-1/2}{l} \left[\int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2l+1} d\rho + \int_r^a \left(\frac{r}{\rho}\right)^{2l} d\rho \right] P_{2l}(\cos\theta) \\ &= \frac{2GM}{a^2} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-1/2}{l} \left[\frac{r}{2l+2} + \frac{r}{2l-1} - \frac{a}{2l-1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l} \right] P_{2l}(\cos\theta) \\ &= \frac{2GM}{a} \frac{r}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-1/2}{l} \left(\frac{1}{2l+2} + \frac{1}{2l-1} \right) P_{2l}(\cos\theta) \\ &\quad - \frac{2GM}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \binom{-1/2}{l} \frac{1}{2l-1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2l} P_{2l}(\cos\theta). \end{aligned} \tag{16.86}
$$

写出解式 (16.84) 中 Legendre 多项式的特殊值 $P_{2l}(0)$，就立即看出，这两种方法得到的解完全相同.

是否也可以仿照 16.7 节中的作法，先求出轴线 (即 $\theta = 0$ 和 π 方向) 上的引力势，然后利用幂级数展开的唯一性，求出空间任意一点的引力势？在 C. A. Croxton 的 Introductory Eigenphysics 一书中就是这样作的[①]. 按照他的作法，通过直接积分，求出轴线

① 他讨论的是圆盘的静电势问题. 圆盘均匀带电，总电量为 Q. 这样，问题的数学描述和引力势问题完全相同，只要将引力势中的 GM 换成 $Q/4\pi\varepsilon_0$ 即可. 圆盘上的电荷均匀分布，意味着圆盘一定不是导体，而是电介质.

$(\theta = 0)$ 上任意一点 $(r, 0)$ 的引力势,

$$u(r, 0) = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{GM}{\pi a^2}\frac{\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta}{\sqrt{r^2+\rho^2}} = \frac{2GM}{a^2}\left[\sqrt{a^2+r^2}-r\right]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2GM}{a^2}r + \dfrac{2GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}, & r < a, \\ \dfrac{2GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1}, & r > a. \end{cases} \tag{16.87}$$

然后，就可以推出空间任意一点的引力势

$$u(r, \theta) = \begin{cases} -\dfrac{2GM}{a^2}r\mathrm{P}_1(\cos\theta) \\ \quad + \dfrac{2GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta), & r < a, \\ \dfrac{2GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l+1}\left(\frac{a}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta), & r > a. \end{cases} \tag{16.88}$$

这个解显然不对. 从本题的已知条件, 可以断定 $u(r, \theta)$ 应当对于赤道面对称，即 $u(r, \theta) = u(r, \pi-\theta)$. 可是，上式中的 $\mathrm{P}_1(\cos\theta)$ 项明显违反了这个对称性． C. A. Croxton 的依据是所谓的轴定理，即 *如果轴对称系统的势函数在轴上一点可以表示成以下形式:*

$$\psi(z) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l z^l + B_l z^{-(l+1)}\right], \tag{16.89}$$

那么，任意一点 (r, θ, ϕ) 的势是

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{16.90}$$

按照这个思想，就应该把 (16.87) 式中的坐标改为 z ，即

$$u\Big|_{(0,0,z>0)} = \frac{2GM}{a^2}\left[\sqrt{a^2+z^2}-z\right]$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2GM}{a^2}z + \dfrac{2GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l}\left(\frac{z}{a}\right)^{2l}, & z < a, \\ \dfrac{2GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l+1}\left(\frac{a}{z}\right)^{2l+1}, & z > a, \end{cases} \tag{16.91}$$

这个结果只适用于 $z>0$(即 $\theta=0$ 方向)，当 $z<0$ 时 (即在 $\theta=\pi$ 方向)，应该有

$$
\begin{aligned}
u\Big|_{(0,0,z<0)} &= \frac{2GM}{a^2}\left[\sqrt{a^2+z^2}+z\right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{2GM}{a^2}z+\dfrac{2GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l}\left(\frac{z}{a}\right)^{2l}, & -z<a, \\ -\dfrac{2GM}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\binom{1/2}{l+1}\left(\frac{a}{z}\right)^{2l+1}, & -z>a. \end{cases}
\end{aligned} \tag{16.92}
$$

这样，仅凭 (16.87) 或 (16.91) 作出的推论当然可能就有问题. 事实上，分析一下轴定理的内容，可以判断：它不只是适用于轴对称的系统，而且，对源 (质量，电荷，$\cdots$) 的分布也有一定的限制. 这是因为，从轴定理中最后解的形式，(16.90) 式，可以看出，它一定满足 Laplace 方程. 这样，源就只能分布在作为系统内部界面的球面上. 16.7 节中讨论过的圆环引力势问题，便是一个这样的例子. 而在本题中，作为引力势的源的质量，分布在赤道面上的一个圆形区域内. 这样，在 $r<a$ 的范围内，Laplace 方程并不是处处成立，因而，在这个范围内，引力势并不能写成 (16.90) 式的形式. (16.82) 和 (16.84b) 式就明确地说明了这一点.

最后，还要指出，对于介质圆盘的静电势问题，更加合理、更加实际的图象应当是均匀分布的电偶层，上、下层的总电量分别为 $+Q$ 和 $-Q$. 设电偶层的厚度 d 为 0，而电偶极矩 Qd 为常数，则静电势为

$$
\lim_{d\to 0}\left[u(r,\,z-d/2)-u(r,\,z+d/2)\right] = -\lim_{d\to 0}\left[d\frac{\partial u(r,\,z)}{\partial z}\right],
$$

其中 $u(r,z)$ 就是前面得到的单层面电荷分布所产生的静电势，即 (16.85) 和 (16.86) 式，只不过要把其中的 GM 换成 $Q/4\pi\varepsilon_0$. 由于这两个解式都是在球坐标系下得到的，所以，在实际计算偏导数时，还需要用到

$$
\frac{\partial r}{\partial z}=\cos\theta, \qquad \frac{\partial\cos\theta}{\partial z}=\frac{1}{r}\sin^2\theta. \tag{16.93}
$$

当偶极层的厚度为有限值时，解比较复杂. 这里就不再讨论了.

当圆盘是导体时，设圆盘带电，总电量仍为 Q. 这时，圆盘上的电荷绝不会是均匀分布的. 圆盘 (不考虑厚度) 一定是等势面. 而电荷的分布，恰恰会自动地调整平衡，以保证圆盘等电势. 因此，上面得到的解不再适用. 为了求解带电导体圆盘的静电势问题，现在就必须重新列出正确的定解问题.

在球坐标系中，这个定解问题应该是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0, \quad \text{圆盘上的点除外}, \tag{16.94a}$$

$$u\Big|_{\theta=0}\text{有界}, \qquad u\Big|_{\theta=\pi}\text{有界}, \tag{16.94b}$$

$$u\Big|_{\theta=\pi/2}=u_0, \qquad r<a, \tag{16.94c}$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}, \qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0. \tag{16.94d}$$

其中的常数 u_0 当然与圆盘的半径 a 及圆盘上的总电荷 Q 有关. 用分离变量法求解这个定解问题，还需要采取一定技术性的措施：首先，考虑到问题的对称性，可以只在赤道面以上的半无界空间内求解. 而后，因为要将 $\theta=\pi/2$ 上的边界条件是非齐次的，还必须齐次化. 事实上，也还可以采用柱坐标系. 这时，定解问题是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad 0<r<\infty,\ z>0, \tag{16.95a}$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}, \qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0, \tag{16.95b}$$

$$u\Big|_{z=0}=u_0, \qquad r<a, \tag{16.95c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0, \qquad r>a, \tag{16.95d}$$

$$u\Big|_{z\to\infty}\to 0. \tag{16.95e}$$

其中边界条件 (16.95d) 反映了 $u(r,z)$ 对于 $z=0$ 平面对称，因而应当是 z 的偶函数. 定解问题则可在 $z>0$ 的半无界空间中求解. 用积分变换的办法可以求得这个定解问题的解，

$$u(r,z)=\frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pz}\mathrm{J}_0(rp)\sin p\,\mathrm{d}p. \tag{16.96}$$

我们将在 19.4 节中讨论.

现在介绍一个更特殊的解法，即采用一个特殊的坐标系：旋转扁椭球坐标系. 在轴对称的特殊情形下，旋转扁椭球坐标 (ξ, η) 和柱坐标 (r, z) 的关系是

$$r = a\sqrt{\left(1-\xi^2\right)\left(1+\eta^2\right)}, \qquad z = a\xi\eta. \tag{16.97}$$

它的等坐标面 $\xi =$ 常数 和 $\eta =$ 常数 分别是旋转双曲面

$$\frac{r^2}{1-\xi^2} - \frac{z^2}{\xi^2} = a^2$$

和旋转椭球面

$$\frac{r^2}{1+\eta^2} + \frac{z^2}{\eta^2} = a^2.$$

对应于 $z>0$ 的半无界空间，ξ 和 η 的取值范围是

$$0<\xi<1, \qquad \eta>0.$$

当 $\eta=0$ 时，椭球面退化为圆盘 $r<a$, $z=0$；而 $\xi=0$ 时，双曲面则退化为 $z=0$ 平面上 $r>a$ 的部分. 可以证明，在这个坐标系下，Laplace 算符是

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2\left(\xi^2+\eta^2\right)}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1+\eta^2\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]\right\}. \tag{16.98}$$

于是，定解问题 (16.95) 就转化为

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\left(1+\eta^2\right)\frac{\partial u}{\partial\eta}\right] = 0, \quad 0<\xi<1, \eta>0, \tag{16.99a}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\xi}\right|_{\xi=0} = 0, \qquad \left.u\right|_{\xi=1}\text{有界}, \tag{16.99b}$$

$$\left.u\right|_{\eta=0} = u_0, \qquad \left.u\right|_{\eta\to\infty} \to 0. \tag{16.99c}$$

用分离变量法就能求解这个定解问题. 令 $u(\xi,\eta)=\Xi(\xi)H(\eta)$，分离变量，就得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[\left(1-\xi^2\right)\frac{\partial\Xi(\xi)}{\partial\xi}\right] + \lambda\Xi(\xi) = 0, \quad 0<\xi<1, \tag{16.100a}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Xi(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=0} = 0, \qquad \Xi(\xi=1)\text{有界}, \tag{16.100b}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[\left(1+\eta^2\right)\frac{\mathrm{d}H(\eta)}{\mathrm{d}\eta}\right]-\lambda H(\eta)=0. \tag{16.101}$$

解本征值问题 (16.100)，得本征值

$$\lambda_l=2l(2l+1), \qquad l=0,1,2,\cdots \tag{16.102}$$

和本征函数

$$\varXi_l(\xi)=\mathrm{P}_{2l}(\xi), \tag{16.103}$$

其中 $\mathrm{P}_{2l}(x)$ 是 $2l$ 次的 Legendre 多项式. 将 (16.102) 代入微分方程 (16.101)，则可求得相应的解为

$$H_l(\eta)=A_l\mathrm{P}_{2l}(\mathrm{i}\eta)+B_l\mathrm{Q}_{2l}(\mathrm{i}\eta), \tag{16.104}$$

$\mathrm{Q}_{2l}(z)$ 是第二类 Legendre 函数 (见 (16.6) 式). 于是满足齐次偏微分方程 (16.99a) 和齐次边界条件 (16.99b) 的一般解便是

$$u(\xi\,\eta)=\sum_{l=0}^{\infty}\Big[A_l\mathrm{P}_{2l}(\mathrm{i}\eta)+B_l\mathrm{Q}_{2l}(\mathrm{i}\eta)\Big]\mathrm{P}_{2l}(\xi). \tag{16.105}$$

代入边界条件 (16.99c)，即得

$$H_l(0)=u_0\delta_{l0}, \quad \lim_{\eta\to\infty}H_l(\eta)=0. \tag{16.106}$$

注意到 $\mathrm{P}_0=1$ 和 $\mathrm{Q}_l(0)=0$，就有

$$A_l=u_0\delta_{l0} \tag{16.107}$$

又因为 $\eta\to\infty$ 时，多项式 $\mathrm{P}_l(\mathrm{i}\eta)$ 无界，而且 $\mathrm{Q}_l(\mathrm{i}\eta)$ 也无界，除非 $l=0$. 这样，当 $l\neq0$ 时，就一定又有 $B_l=0$，于是

$$H_l(\eta)=0. \tag{16.108}$$

因此，级数解 (16.105) 中便只剩下一项， $l=0$ 项，

$$u(\xi,\eta)=\varXi_0(\xi)H_0(\eta)=A_0\mathrm{P}_0(\mathrm{i}\eta)+B_0\mathrm{Q}_0(\mathrm{i}\eta).$$

再根据 $\mathrm{Q}_0(z)$ 的表达式，即可定出 B_0. 事实上，当时，我们不如直接求解方程 (16.101). 当 $\lambda=0$ 时， (16.101) 的通解为

$$H_0(\eta)=C_0\arctan\eta+D_0.$$

由边界条件 (16.106)，即可定出

$$D_0 = u_0, \qquad C_0 = -\frac{2u_0}{\pi}.$$

最后，就求出了 $u(\xi, \eta)$，它只是 η 的函数，

$$u(\xi, \eta) = \frac{2u_0}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arctan\eta\right] = \frac{2u_0}{\pi}\operatorname{arccot}\eta. \tag{16.109}$$

当然还可以把电势 u 表示成 r, z 的函数，但结果相当复杂，这里就不再列出．不过，我们倒可以容易地求得圆盘上的电荷密度

$$\begin{aligned}\sigma &= -2\varepsilon_0\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0,\, r<a} = -2\varepsilon_0\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}\right]_{z=0,\, r<a} \\ &= \frac{4\varepsilon_0 u_0}{\pi}\frac{1}{1+\eta^2}\cdot\frac{\xi}{a}\frac{1+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}\bigg|_{\eta=0} = \frac{4\varepsilon_0 u_0}{\pi}\frac{1}{a\xi}\bigg|_{\eta=0} \\ &= \frac{4\varepsilon_0 u_0}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}},\end{aligned} \tag{16.110}$$

进一步求出圆盘上的总电荷

$$Q = 2\pi\int_0^a \sigma r \mathrm{d}r = 8\varepsilon_0 u_0 a, \tag{16.111}$$

这样，就求出了 u_0 和 Q 之间的关系

$$u_0 = \frac{Q}{8\varepsilon_0 a}. \tag{16.112}$$

需要注意，实际的情形是，即使圆盘的厚度为 0，圆盘的上、下表面都会带有等量的电荷．最准确的做法是，不妨先把圆盘看成是一个非常扁的旋转椭球，例如，椭球面的方程是

$$\frac{r^2}{1+d^2} + \frac{z^2}{d^2} = a^2,$$

在求出了静电势之后，再令 $d \to 0$．

16.9 连带 Legendre 函数

在这一节中我们讨论连带 Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0 \tag{16.113}$$

在有界条件

$$y(\pm 1)\text{有界} \tag{16.114}$$

下的解．方法是试图找出连带 Legendre 方程和 Legendre 方程之间的关系．

首先分析一下连带 Legendre 方程在奇点处的性质．由 (16.113) 式，可以看出，连带 Legendre 方程的奇点和 Legendre 方程完全一样，都是 $x=\pm 1$ 和 $x=\infty$，而且也都是正则奇点．在 $x=\pm 1$ 处的指标方程是

$$\rho(\rho-1)+\rho-\frac{m^2}{4}=0,$$

所以，指标为

$$\rho=\pm\frac{m}{2}.$$

这说明，连带 Legendre 方程的解可以写成 $y(x)=\left(1-x^2\right)^{\pm m/2}v(x)$ 的形式．所以，我们便假设

$$y(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}v(x),$$

代入方程，就可以得到 $v(x)$ 所满足的方程

$$\left(1-x^2\right)v''-2(m+1)xv'+[\lambda-m(m+1)]v=0. \tag{16.115}$$

这时 $v(x)$ 在 $x=\pm 1$ 的指标为 0 与 $-m$．指标为 $-m$ 的解在 $x=\pm 1$ 点一定是发散的．

下面，我们证明，方程 (16.115) 可以通过 Legendre 方程微商 m 次而得到．为此，不妨将方程 (16.115) 再微商一次，

$$\begin{aligned}&\left(1-x^2\right)v'''-2xv''-2(m+1)xv''\\&\qquad-2(m+1)v'+[\lambda-m(m+1)]v'=0,\end{aligned}$$

这样就得到

$$\left(1-x^2\right)\left(v'\right)''-2(m+2)x\left(v'\right)'+[\lambda-(m+1)(m+2)]v'=0, \tag{16.116}$$

这表明，$v'(x)$ 满足的方程和 $v(x)$ 满足的方程的不同之处只在于

把 m 换成了 $m+1$. 这样，将 Legendre 方程 (也就是 $m=0$ 时的 (16.115) 式) 微商一次得到的结果就是在 (16.115) 式中令 $m=1$ ，将 Legendre 方程微商两次就得到 $m=2,\cdots$ ，将 Legendre 方程微商 m 次后得到的结果当然就是 (16.115) 式. 于是，连带 Legendre 方程在环域 $0<|x-1|<2$ 内的解就是

$$y(x)=c_1\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_\nu^{(m)}(x)+c_2\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{Q}_\nu^{(m)}(x), \qquad (16.117)$$

其中 $\lambda=\nu(\nu+1)$. 下面再用有界条件定出本征值和本征函数.

16.1 节中已经看到，$\mathrm{P}_\nu(x)$ 在 $x=1$ 点是有界的，而 $\mathrm{Q}_\nu(x)$ 是对数发散的. 所以，$\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_\nu^{(m)}(x)$ 在 $x=1$ 点也是有界的，它是连带 Legendre 方程在 $x=1$ 点的邻域内指标 $\rho=m/2$ 的解；而 $\mathrm{Q}_\nu^{(m)}(x)$ 在 $x=1$ 点是以 $(x-1)^{-m}$ 的方式发散的，所以， $\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_\nu^{(m)}(x)$ 在 $x=1$ 点也一定是发散的，它正是连带 Legendre 方程在 $x=1$ 点的邻域内指标 $\rho=-m/2$ 的解. 有界条件要求解在 $x=1$ 点有界，所以， $c_2=0$.

更进一步，在 16.2 节中，我们还看到，对于一般的 ν 值，只要 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 是无穷级数，它在 $x=-1$ 点就是对数发散的. 这样， $x=-1$ 点就是 $\mathrm{P}_\nu^{(m)}(x)$ 的 m 阶极点，所以， $\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_\nu^{(m)}(x)$ 在 $x=-1$ 点也还是发散的. 为了满足在 $x=-1$ 点有界的要求，唯一的可能是 $\mathrm{P}_\nu(x)$ 断成多项式，即 ν 为非负整数. 但由于在解中出现的是 $\mathrm{P}_\nu^{(m)}(x)$ ，所以必须有 $\nu\geq m$.

总结上面的讨论，我们就求出了连带 Legendre 方程 (16.113) 在有界条件 (16.114) 下的解是

$$\text{本征值} \qquad \lambda_l=l(l+1), \quad l=m,m+1,m+2,\cdots \qquad (16.118\text{a})$$

$$\text{本征函数} \qquad y_l(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x). \qquad (16.118\text{b})$$

通常把 (16.118b) 式右端的函数记为 $\mathrm{P}_l^m(x)$ ，

$$\mathrm{P}_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\mathrm{P}_l^{(m)}(x), \qquad (16.119)$$

称为 m 阶 l 次连带 Legendre 函数.

连带 Legendre 函数，也是作为本征值问题的解、即常微分方程 (16.115) 在有界条件 (16.116) 下的本征函数引入的，因此，连带 Legendre 函数也应当具有正交性：相同阶但不同次的连带 Legendre 函数在区间 $[-1,1]$ 上正交，

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad k \neq l. \tag{16.120}$$

这里注意的是，对于连带 Legendre 方程来说，m 是固定的已知参数，因此，在上面的正交关系中，连带 Legendre 函数的阶数 m 必须是相同的．

可以从方程 (16.115) 出发，并应用有界条件 (16.116)，来证明正交关系 (16.120)．这是证明本征函数正交性的标准方法，前面已多次用过，这里不再重复．下面换一个做法，采用和证明 Legendre 多项式的正交性类似的办法．由于 $k \neq l$，不妨假设 $k < l$．于是，代入连带 Legendre 函数的定义 (16.119)，并分部积分，即得

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\mathrm{d}x \\
&= \left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\bigg|_{-1}^{1} \\
&\quad - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\mathrm{d}x \\
&= -\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\frac{\mathrm{d}^{m-1}\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^{m-1}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

这样，分部积分一次的结果除了在积分号前增加一个负号外，就只不过是将被积函数中 $\mathrm{P}_l(x)$ 的微商转移一次到其余的因子上．可以预料，在分部积分 m 次后，就应当得到

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)\mathrm{d}x = (-)^m \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m \frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x.$$

注意上式右方的被积函数是 l 次 Legendre 多项式和另一个多项式

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_k(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]$$

的乘积．容易求出这个多项式的次数为 $k-m+2m-m=k$．由于前设 $k<l$，根据 16.4 节练习 16.5，立即就可以证得连带 Legendre 函数的正交性，即 (16.120) 式．

作变换 $x=\cos\theta$，还可以得到连带 Legendre 函数正交性的另一种表达形式，即

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=0,\qquad k\neq l. \tag{16.121}$$

注意，这里出现了正交权重 $\sin\theta$．

完全模仿前面的做法，还能求得连带 Legendre 函数的模方．事实上，这只要在以上证明过程的各式中取 $k=l$ 即可．于是，

$$\int_{-1}^1 \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x=(-)^m\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x.$$

现在出现在等式右端的被积函数是 l 次 Legendre 多项式和另一个 l 次多项式

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^m\mathrm{P}_l(x)}{\mathrm{d}x^m}\right]=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left[\left(1-x^2\right)^m\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}}\left(x^2-1\right)^l\right]$$

的乘积．由 16.4 节的讨论可知，对积分值的唯一贡献就只来自这个多项式的最高幂次项．容易求出这个最高幂次项的系数是

$$(-)^m\frac{1}{2^l l!}\frac{(2l)!}{(l-m)!}\frac{(l+m)!}{l!},$$

所以，就得到

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{P}_l^m(x)\mathrm{d}x&=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int_{-1}^1 x^l\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}.\end{aligned} \tag{16.122}$$

或者进一步作变换 $x=\cos\theta$，

$$\int_{-1}^1 \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}. \tag{16.123}$$

从原则上说，连带 Legendre 函数的许多性质都可由 Legendre 多项式的相应性质得到．这里从略．

16.10　球面调和函数

我们现在回到 Laplace 方程在球坐标系下的分离变量．为了确定起见，不妨先讨论球内 Laplace 方程的第一类边值问题．在球坐标系下，定解问题是

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0, \tag{16.124a}$$

$$u\Big|_{\theta=0}\ \text{有界},\qquad u\Big|_{\theta=\pi}\ \text{有界}, \tag{16.124b}$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi},\qquad \frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi}, \tag{16.124c}$$

$$u\Big|_{r=0}\ \text{有界},\qquad u\Big|_{r=a}=f(\theta,\phi). \tag{16.124d}$$

重复 15.6 节的步骤，令 $u(r,\theta,\phi)=R(r)S(\theta,\phi)$，将上面的方程和齐次边界条件分离变量，即得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]-\lambda R(r)=0, \tag{16.125a}$$

$$u\Big|_{r=0}\ \text{有界}, \tag{16.125b}$$

和

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}+\lambda S(\theta,\phi)=0, \tag{16.126a}$$

$$S\Big|_{\theta=0}\ \text{有界},\qquad S\Big|_{\theta=\pi}\ \text{有界}, \tag{16.126b}$$

$$S\Big|_{\phi=0}=S\Big|_{\phi=2\pi},\qquad \frac{\partial S}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial S}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi}. \tag{16.126c}$$

(16.126) 式也是一个本征值问题，偏微分方程的本征值问题．为了求出本征值 λ 和相应的本征函数，可以再令 $S(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$，进一步分离变量，就有

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]+\left[\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)=0, \tag{16.127a}$$

$$\Theta(0)\ 有界, \qquad \Theta(\pi)\ 有界, \tag{16.127b}$$

和

$$\Phi''+\mu\Phi=0. \tag{16.128a}$$

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi). \qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi). \tag{16.128b}$$

这两个常微分方程的本征值问题都已经讨论过，分别见 16.9 节和 15.4 节．这样，对于偏微分方程的本征值问题 (16.126) 来说，本征值就是

$$\lambda_l=l(l+1), \quad l=0,1,2,3,\cdots, \tag{16.129}$$

而对应于一个本征值 λ_l ，有 $2l+1$ 个本征函数

$$S_{lm1}(\theta,\phi) = \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi, \ m=0,1,2,\cdots,l, \tag{16.130a}$$

$$S_{lm2}(\theta,\phi) = \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi, \ m=1,2,\cdots,l. \tag{16.130b}$$

这些本征函数，统称为球面调和函数，或球面谐函数．这里我们看到，本征值问题 (16.130) 的简并度是 $2l+1$ ，大于常微分方程本征值问题所许可的简并度 2 ．

至于常微分方程 (16.125a) ，在 16.7 节中已经讨论过．它在有界条件 (16.125b) 下的解是 $R_l(r)=r^l$ ．这样，偏微分方程定解问题 (16.124) 的特解就是

$$u_{lm1}(r,\theta,\phi)=r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\cos m\phi, \quad l=0,1,2,\cdots, \ m=0,1,2,\cdots,l \tag{16.131a}$$

和

$$u_{lm2}(r,\theta,\phi)=r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\sin m\phi, \quad l=0,1,2,\cdots, \ m=1,2,\cdots,l. \tag{16.131b}$$

而一般解则为

$$u(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}r^l\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\left[A_{lm}\cos m\phi+B_{lm}\sin m\phi\right]. \tag{16.132}$$

练习 16.9　写出球外区域 Laplace 方程的第一类边值问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0,$$

$$u\Big|_{\theta=0}\ \text{有界},\qquad u\Big|_{\theta=\pi}\ \text{有界},$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi},\qquad \frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi},$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\theta,\phi),\qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0$$

的 (全部) 特解和一般解.

练习 16.10　写出球壳内部 Laplace 方程的第一类边值问题

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}=0,$$

$$u\Big|_{\theta=0}\ \text{有界},\qquad u\Big|_{\theta=\pi}\ \text{有界},$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi},\qquad \frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi},$$

$$u\Big|_{r=a}=f(\theta,\phi),\qquad u\Big|_{r=b}=g(\theta,\phi)$$

的 (全部) 特解和一般解.

这里值得回顾一下 13.8 节中的讨论. 在该节中给出过 Laplace 方程在直角坐标系中的多项式解，它们和上面得到的特解 (16.131) 是完全一致的. 只是因为采用的坐标系不同，因而表达式的具体形式不同. 把 (16.131) 式中的特解改写为直角坐标 x, y, z 的函数，就可以看出，它们正是 x, y, z 的 l 齐次多项式. 就固定的 l 而言，这样的多项式有 $2l+1$ 个. 这正是 13.8 节中提到过的结论.

现在再对球面调和函数作一些讨论. 我们可以在球面上画出这些函数的零点分布. 容易看出，除了 $m\neq 0$ 时的两个零点 $\theta=0$ 和 $\theta=\pi$(它们来自连带 Legendre 函数中的因子 $\left(1-x^2\right)^{m/2}$ 即 $\sin^m\theta$) 是球面上的两个点 (南北极) 以外，其余的零点均呈线状分布，它们分别是函数 $\mathrm{d}^m\mathrm{P}_l(\cos\theta)/(\mathrm{d}\cos\theta)^m\equiv\mathrm{P}_l^{(m)}(x)$ 和 $\cos m\phi$ 及 $\sin m\phi$ 的零点，因此分别是球面上的曲线 $\theta=$ 常数 (纬线) 和 $\phi=$ 常数(经线)，称为节线. 对于 $m=0$ 的球面调和函数，也就是 l 次 Legendre 多项式，它的节线全部都是纬线，这些纬线把球面分割成 $l+1$ 个带

形区域，因此，这种函数可以形象化地称为带状球面调和函数．在一个带内，球面调和函数的数值恒为正值或负值．当 $m=l$ 时，节线全部都是经线，这种球面调和函数又称为瓣状球面调和函数．对于给定的 $l(\neq 0)$，瓣状球面调和函数有两个，即 $\mathrm{P}_l^l(\cos\theta)\cos l\phi$ 和 $\mathrm{P}_l^l(\cos\theta)\cos l\phi$．其余的球面调和函数，它们的节线既有纬线，又有经线，所以称为田状球面调和函数．

综合 16.4 节和 16.9 节的讨论，可以看出，l 或 m 不同的球面调和函数在整个 4π 立体角上是彼此正交的，

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\cos n\phi\,\mathrm{d}\phi$$

$$=0,\qquad\qquad l\neq k,\quad m\neq n,\tag{16.133a}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin m\phi\sin n\phi\,\mathrm{d}\phi$$

$$=0,\qquad\qquad l\neq k,\quad m\neq n,\tag{16.133b}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\mathrm{P}_k^n(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos m\phi\sin n\phi\,\mathrm{d}\phi$$

$$=0,\qquad\qquad l\neq k,\quad m\neq n.\tag{16.133c}$$

同样，还可以写出球面调和函数的模方

$$\int_0^\pi\left[\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\right]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\cos^2 m\phi\,\mathrm{d}\phi=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2\pi}{2l+1}\left(1+\delta_{m0}\right),\tag{16.134a}$$

$$\int_0^\pi\left[\mathrm{P}_l^m(\cos\theta)\right]^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\sin^2 m\phi\,\mathrm{d}\phi=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2\pi}{2l+1}.\tag{16.134b}$$

在物理上常用的是另一种形式的球面调和函数．第一，是将本征值问题 (16.128) 的解在形式上写成

本征值 $\qquad \mu_m=m^2,\quad m=0,\pm1,\pm2,\pm3\cdots,\qquad$ (16.135a)

本征函数 $\qquad \Phi_m(\phi)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}.\qquad$ (16.135b)

这样，对应于一个本征值 $\lambda_l = l(l+1)$， $l = 0, 1, 2, 3, \cdots$， 本征值问题 (16.126) 的本征函数就是

$$S_{lm}(\theta, \phi) = \mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l. \tag{16.136}$$

这样定义的球面调和函数，其正交关系和模方可以写成更简单的形式，

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} S_{lm}(\theta,\phi)S_{kn}^*(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\frac{4\pi}{2l+1}\delta_{lk}\delta_{mn}. \tag{16.137}$$

注意，由于现在的本征函数是复函数，所以在正交关系和模方的公式中，要把其中的一个本征函数取复共轭. 其直接原因是为了保证本征函数的模方恒为正值.

第二，通常更是采用归一化的球面调和函数. 例如，可定义为

$$\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\frac{2l+1}{4\pi}}\mathrm{P}_l^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm l. \tag{16.138}$$

这时就有正交归一关系

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)\mathrm{Y}_k^{n*}(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = \delta_{lk}\delta_{mn}. \tag{16.139}$$

应当注意的是，在不同的文献中， $\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$ 常常有不同的定义. 在使用时需要认真核对.

最后，还要提到， $\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$ 定义中的绝对值符号也可以去掉，这是因为

$$\mathrm{P}_l^{-m}(x) = (-)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\mathrm{P}_l^m(x).$$

证明从略. 读者可参阅参考书目 [1]， 第 16.11 节.

*16.11 超几何函数

在本章中，我们讨论了 Legendre 方程和连带 Legendre 方程的解. 这两个方程的共同特点是：都具有三个奇点， ±1 和 ∞ ，并且

全是正则奇点.

作为具有三个正则奇点、并且全是正则奇点的二阶线性齐次常微分方程的原型，这里简要地讨论一下超几何方程

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)z\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta z=0 \tag{16.140}$$

的解. 这个方程的奇点是 $0, 1$ 和 ∞ . 根据常微分方程的级数解法 (见 6.3 节)，可设方程在 $z=0$ 点邻域内的解为

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^{n+\rho}, \qquad c_0\neq 0, \tag{16.141}$$

由此可以求得方程在 $z=0$ 点处的两个指标为 $\rho=0$ 和 $1-\gamma$，系数之间的递推关系为

$$c_n=\frac{(\rho+n-1+\alpha)(\rho+n-1+\beta)}{(\rho+n)(\rho+n-1+\gamma)}c_{n-1}. \tag{16.142}$$

因此，当 $\gamma\neq$ 整数时，方程的两个线性无关解是

$$w_1(z)=\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}z^n, \tag{16.143}$$

$$w_2(z)=z^{1-\gamma}\mathrm{F}(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;z). \tag{16.144}$$

作为这两个级数解的代表，下面对 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 再作一些更进一步的讨论.

$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 称为超几何级数. 显然，它对于 α 和 β 是对称的，

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)=\mathrm{F}(\beta,\alpha;\gamma;z). \tag{16.145}$$

除了 α 或 β 为负整数、 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 退化为多项式的特殊情形外，超几何级数，作为无穷级数，它的相邻系数之比为

$$\frac{c_{n-1}}{c_n}=\frac{n(n-1+\gamma)}{(n-1+\alpha)(n-1+\beta)}=1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

所以级数的收敛半径为 1，在单位圆内就代表了一个解析函数.

由常微分方程的解析理论 (见第六章) 可知，只有方程的奇点才可能是解的奇点. 因此，可以将超几何级数解析延拓到全平面上去，只是 $z=1$ 和 ∞ 点可能除外. 事实上，可以把超几何级数化为

复变积分的形式，而后就很容易进行解析延拓. 在较严的限制条件 $\mathrm{Re}\,\gamma > \mathrm{Re}\,\beta > 0$ 下，可以求得超几何级数的一个积分表示

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\mathrm{d}t, \quad (16.146)$$

其中，规定

$$|\arg(1-z)| < \pi, \qquad (1-zt)^{-\alpha}\Big|_{z=0} = 1.$$

在 $|z| < 1$ 的条件下，直接验算就可以证明 (16.146) 式的正确性. 但是，由于式中的积分并不受条件 $|z| < 1$ 的约束，因而根据解析延拓的原理，就可以通过这个积分表示而把超几何级数延拓到全平面上去. 延拓后的函数称为超几何函数，但仍用 $\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;z)$ 表示. 由 (16.146) 式可以看出，超几何函数是多值函数， $z=1$ 和 ∞ 是它的枝点. 所以，准确地说，超几何函数是在沿 $z=1$ 到 $z=\infty$ 割开的平面上解析.

由超几何函数的级数表示和积分表示，立即可以得到它的两个特殊值，

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;0) = 1, \quad (16.147)$$

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma;1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad \mathrm{Re}\,(\gamma-\alpha-\beta) > 0. \quad (16.148)$$

关于超几何函数的其他性质，以及 $\gamma =$ 整数 时超几何方程的解的形式，读者可参阅参考书目 [12, 13] . 这里从略.

为了要求得超几何方程在其他奇点处的解，可以通过自变量的变换来实现. 例如，要求超几何方程在 $z=1$ 处的解，则可作变换 $z = 1-\zeta$. 在这个变换下，超几何方程 (16.140) 将变为

$$\zeta(1-\zeta)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\zeta^2} - \Big[\gamma - (\alpha+\beta+1)(1-\zeta)\Big]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} - \alpha\beta w = 0,$$

即

$$\zeta(1-\zeta)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\zeta^2} + \Big[(\alpha+\beta+1-\gamma) - (\alpha+\beta+1)\zeta\Big]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\zeta} - \alpha\beta w = 0. \quad (16.149)$$

这还是超几何方程的形式，它在 $\zeta = 0$ 处的指标为 0 和 $\gamma-\alpha-\beta$ ，

于是，方程 (16.140) 在 $z=1$ 处的两个线性无关解就是

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\alpha+\beta-\gamma+1;1-z)$$

和

$$(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\mathrm{F}(\gamma-\alpha,\gamma-\beta;\gamma-\alpha-\beta+1;1-z).$$

这里，当然要假设 $\gamma-\alpha-\beta\neq$ 整数．同样，通过变换 $z=1/\zeta$，也能写出超几何方程在 $z=\infty$ 处的解.

有意思的是，如果我们列出超几何方程 (16.140) 的奇点以及这些奇点处的指标，

$$\begin{aligned} z=0:&\quad \text{指标为 } 0 \text{ 和 } 1-\gamma;\\ z=1:&\quad \text{指标为 } 0 \text{ 和 } \gamma-\alpha-\beta;\\ z=\infty:&\quad \text{指标为 } \alpha \text{ 和 } \beta,\end{aligned}$$

而经过变换 $z=1-\zeta$ 后，方程 (16.149) 的相应的奇点和指标为

$$\begin{aligned} \zeta=1:&\quad \text{指标为 } 0 \text{ 和 } 1-\gamma;\\ \zeta=0:&\quad \text{指标为 } 0 \text{ 和 } \gamma-\alpha-\beta;\\ \zeta=\infty:&\quad \text{指标为 } \alpha \text{ 和 } \beta.\end{aligned}$$

这就是说，对应奇点处的指标并没有发生变化．事实上，更一般地，超几何方程在线性分式变换 (参看 2.5 节)

$$\zeta=\frac{az+b}{cz+d}$$

下，都保持仍然是超几何方程的形式，奇点的位置发生相应的变化，但是，对应奇点处的指标不变．利用这个性质，我们就可以把任意一个具有三个奇点、并且全是正则奇点的二阶线性齐次常微分方程通过线性分式变换变为超几何方程，三个奇点的对应关系就唯一地决定了这个变换.

还可以列出一些与超几何函数有关的特殊函数，例如 Legendre 多项式

$$\mathrm{P}_n(z)=\mathrm{F}\left(-n,n+1;1;\frac{1-z}{2}\right); \tag{16.150}$$

Legendre 函数

$$\mathrm{P}_\nu(z) = \mathrm{F}\left(-\nu, \nu+1; 1; \frac{1-z}{2}\right); \tag{16.151}$$

$$\mathrm{Q}_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\nu+\dfrac{3}{2}\right)}(2z)^{-\nu-1}\mathrm{F}\left(\frac{\nu+1}{2}, \frac{\nu}{2}+1; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right); \tag{16.152}$$

连带 Legendre 函数

$$\mathrm{P}_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{\mu/2}\mathrm{F}\left(-\nu, \nu+1; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right); \tag{16.153}$$

$$\mathrm{Q}_\nu^\mu(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\mu}\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\dfrac{3}{2}\right)}z^{-\nu-\mu-1}\left(z^2-1\right)^{\mu/2}$$
$$\times\ \mathrm{F}\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu+\mu}{2}+1; \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right); \tag{16.154}$$

超球函数

$$\mathrm{P}_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}2^\mu\left(z^2-1\right)^{-\mu/2}\mathrm{P}_\nu^\mu(z); \tag{16.155}$$

$$\mathrm{Q}_{\nu-\mu}^{(\mu,\mu)}(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)}2^\mu\left(z^2-1\right)^{-\mu/2}\mathrm{Q}_\nu^\mu(z); \tag{16.156}$$

Chebyshev 多项式

$$\mathrm{T}_n(z) = \mathrm{F}\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right); \tag{16.157}$$

Gegenbauer 多项式

$$\mathrm{C}_n^{(\lambda)}(z) = \frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!\,\Gamma(2\lambda)}\mathrm{F}\left(-n, n+2\lambda; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right); \tag{16.158}$$

Gegenbauer 函数

$$\mathrm{C}_\nu^{(\lambda)}(z) = \frac{\Gamma(2\lambda+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(2\lambda)}\mathrm{F}\left(-\nu, 2\lambda+\nu; \lambda+\frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right); \tag{16.159}$$

Jacobi 多项式

$$\mathrm{P}_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}\mathrm{F}\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-z}{2}\right). \tag{16.160}$$

在这些公式中，还出现了一些多值函数的因子，这里没有列出关于这些函数的单值分枝的规定. 因此，在使用这些公式时，务必查阅有关的专著，如前面多次提到的参考书目 [12, 13] 两书.

第十七章 柱 函 数

在第十五章中，我们将 Helmholtz 方程在柱坐标系下分离变量时，曾经得到常微分方程 (15.65)

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left[k^2-\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right]R(r)=0. \tag{17.1}$$

如果 $k^2-\lambda\neq 0$，则可以作变换 $x=\sqrt{k^2-\lambda}r$， $y(x)=R(r)$，于是，方程 (17.1) 变为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[1-\frac{\nu^2}{x^2}\right]y(x)=0, \tag{17.2}$$

其中 $\mu=\nu^2$.

方程 (17.2) 称为 (ν 阶)Bessel 方程. 它有两个奇点： $x=0$ 和 $x=\infty$； $x=0$ 是正则奇点， $x=\infty$ 是非正则奇点. 在正则奇点 $x=0$ 处，指标 $\rho=\pm\nu$. 在第六章中已经求出了 Bessel 方程在 $x=0$ 点的正则解. 下面扼要地罗列一下已经得到的结果.

当 $\nu\neq$ 整数时， Bessel 方程的两个 (线性无关) 正则解是

$$\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k\pm\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k\pm\nu}. \tag{17.3}$$

如果 $\nu=$ 整数 n，则 $\mathrm{J}_n(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-n}(x)$ 线性相关，

$$\mathrm{J}_{-n}(x)=(-)^n\mathrm{J}_n(x),$$

这时， Bessel 方程的第一解仍是 $\mathrm{J}_n(x)$，第二解则可取为

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_n(x)=&\frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\\&-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,(k+n)!}\Big[\psi(n+k+1)+\psi(k+1)\Big]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},\end{aligned} \tag{17.4}$$

并且约定，当 $n=0$ 时，需去掉表达式中第二项的有限和.

本章将讨论上述这些函数 (和其他有关函数) 的基本性质，以及它们在分离变量法中的应用.

17.1 Bessel 函数的基本性质

Bessel 方程 (17.2) 中的 ν^2，即方程 (17.1) 中的 μ，通常是由本征值问题

$$\Phi''+\mu\Phi=0,$$

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi),\qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)$$

决定的，$\mu=m^2, m=0,1,2,\cdots$. 因此，本节中将着重介绍整数阶 Bessel 函数的性质. 下面先列出以前已经得到过的一些结果 (图 17.1 中给出了前几个 Bessel 函数的图形).

1. $\mathrm{J}_{-n}(x)$ 和 $\mathrm{J}_n(x)$ 线性相关，

$$\mathrm{J}_{-n}(x)=(-)^n\mathrm{J}_n(x). \tag{17.5}$$

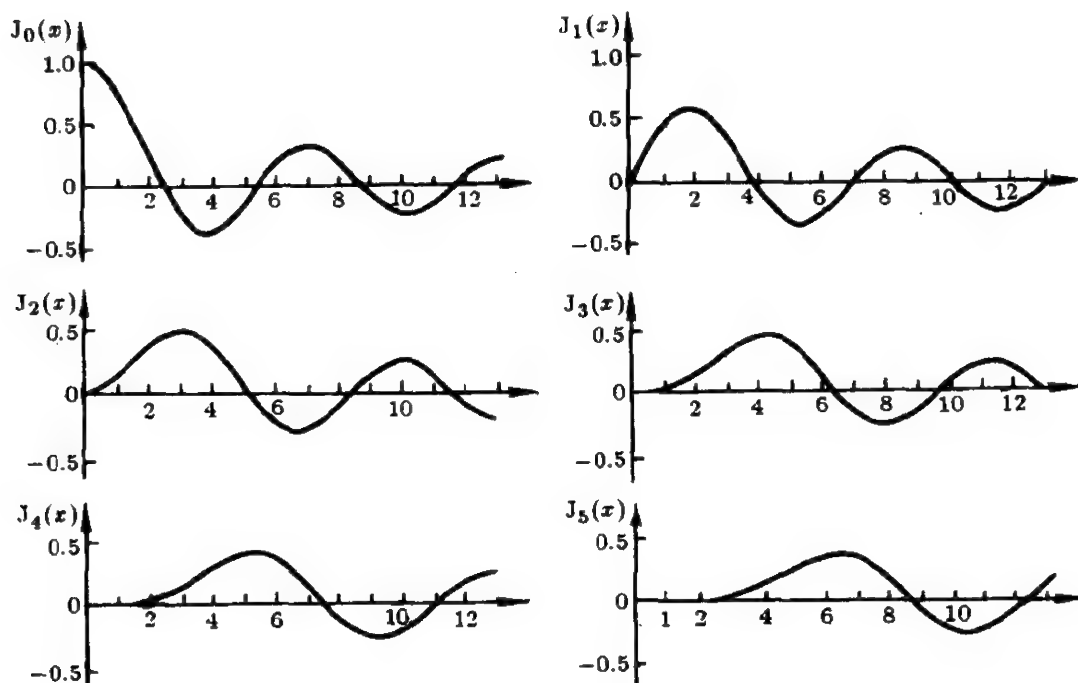


图 17.1　Bessel 函数

证明见 6.4 节 (6.45) 式.

2. $\mathrm{J}_n(x)$ 的奇偶性,

$$\mathrm{J}_n(-x) = (-)^n \mathrm{J}_n(x). \tag{17.6}$$

这可以从 $\nu = n$ 时的表达式 (17.3) 式直接看出.

3. $\mathrm{J}_n(x)$ 的生成函数

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(x) t^n, \qquad 0 < |t| < \infty. \tag{17.7}$$

证明见 5.4 节例 5.7 .

从 (17.7) 式出发，可得到整数阶 Bessel 函数的其他一些性质:

4. $\mathrm{J}_n(x)$ 的积分表示

$$\mathrm{J}_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{17.8}$$

证 在 (17.7) 式中令 $t = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ，就得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{J}_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}. \tag{17.9}$$

这就是函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\sin\theta}$ 的 Fourier 展开式 (复数形式). 于是，由 Fourier 展开的系数公式，就能证得

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\mathrm{i}x\sin\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right)^* \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(x\sin\theta - n\theta) + \mathrm{i}\sin(x\sin\theta - n\theta)]\, \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

在右端积分的被积函数中，虚部是奇函数，所以积分为 0 ；实部是偶函数，所以就能直接化为 (17.8) 式. □

这里要特别强调，如果将 (17.8) 式被积函数中的整数 n 改为任意复数 ν ，这样得到的并不是函数 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的积分表示. 事实上，这个积分定义了另一个函数， Anger 函数

$$\mathbb{J}_\nu(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - \nu\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{17.10}$$

直接计算可以证明，它是非齐次方程

$$\left[x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\left(x^2-\nu^2\right)\right]\mathbb{J}_\nu(x)=\frac{x-\nu}{\pi}\sin\pi\nu \tag{17.11}$$

的解. 另外，还有 Weber 函数，

$$\mathbb{E}_\nu(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin(x\sin\theta-\nu\theta)\mathrm{d}\theta, \tag{17.12}$$

它是非齐次方程

$$\left[x^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\left(x^2-\nu^2\right)\right]\mathbb{E}_\nu(x)=-\frac{x+\nu}{\pi}-\frac{x-\nu}{\pi}\cos\pi\nu \tag{17.13}$$

的解.

5. 如果在 (17.7) 式中令 $t=\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，还可以得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cos\theta} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{J}_n(x)\mathrm{i}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \\
&=\mathrm{J}_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+\mathrm{J}_{-n}(x)\mathrm{i}^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right] \\
&=\mathrm{J}_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+(-)^n\mathrm{i}^{-n}\mathrm{J}_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right] \\
&=\mathrm{J}_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(x)\cos n\theta.
\end{aligned}$$

特别是，如果再令 $x=kr$，于是就有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}=\mathrm{J}_0(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}^n\mathrm{J}_n(kr)\cos n\theta. \tag{17.14}$$

把上式中的 r 和 θ 理解为柱坐标系中的坐标变量，并且把 k 理解为波数，同时取相位的时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则上式两端都分别对应于波动过程相位因子的空间部分：左端是沿正 x 轴方向传播[①]的平面波，因为它的等相位面是

$$kr\cos\theta-\omega t=常数;$$

---

① 传播方向当然与相位的时间因子的规定有关. 如果取时间因子为 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，那么这个平面波就是向负 x 轴方向传播的.

而右端各项中的 $\mathrm{J}_0(kr)$ 和 $\mathrm{J}_n(kr)$ 描述的是柱面波 (理由见下面的性质 8)．因此，(17.14) 式的意义就是平面波按柱面波展开．

以上介绍的都是整数阶 Bessel 函数的性质．下面再介绍几个性质，对任意阶 Bessel 函数都成立．

6. Bessel 函数 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 的 Wronski 行列式

$$W\left[\mathrm{J}_\nu(x),\ \mathrm{J}_{-\nu}(x)\right] \equiv \begin{vmatrix} \mathrm{J}_\nu(x) & \mathrm{J}_{-\nu}(x) \\ \mathrm{J}'_\nu(x) & \mathrm{J}'_{-\nu}(x) \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu. \tag{17.15}$$

证 根据 Bessel 方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{dJ}_\nu(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \left[1-\frac{\nu^2}{x^2}\right]\mathrm{J}_\nu(x) = 0,$$

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{dJ}_{-\nu}(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \left[1-\frac{\nu^2}{x^2}\right]\mathrm{J}_{-\nu}(x) = 0.$$

以 $x\mathrm{J}_{-\nu}(x),\ x\mathrm{J}_\nu(x)$ 分别乘这两个方程，相减即得

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{-\nu}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{dJ}_\nu(x)}{\mathrm{d}x}\right] &- \mathrm{J}_\nu(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{dJ}_{-\nu}(x)}{\mathrm{d}x}\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{x\left[\mathrm{J}_{-\nu}(x)\mathrm{J}'_\nu(x)-\mathrm{J}_\nu(x)\mathrm{J}'_{-\nu}(x)\right]\right\} = 0.\end{aligned}$$

所以

$$\mathrm{J}_\nu(x)\mathrm{J}'_{-\nu}(x)-\mathrm{J}_{-\nu}(x)\mathrm{J}'_\nu(x) \equiv W\left[\mathrm{J}_\nu(x),\ \mathrm{J}_{-\nu}(x)\right] = \frac{C}{x}.$$

为了决定积分常数 C，我们只需求出 $\mathrm{J}_\nu(x)\mathrm{J}'_{-\nu}(x)-\mathrm{J}_{-\nu}(x)\mathrm{J}'_\nu(x)$ 中 x^{-1} 项的系数．这一项只来自各级数的第一项．因此

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{1}{2^\nu}\cdot\frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\frac{-\nu}{2^{-\nu}} - \frac{1}{\Gamma(-\nu+1)}\frac{1}{2^{-\nu}}\cdot\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\frac{\nu}{2^\nu} \\ &= -\frac{2\nu}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(-\nu+1)} = -\frac{2}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu)} \\ &= -\frac{2}{\pi}\sin\pi\nu.\end{aligned}$$

所以就证得

$$W\left[\mathrm{J}_\nu(x),\ \mathrm{J}_{-\nu}(x)\right] = -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu. \quad \square$$

这个结果具体地表明，当 $\nu \neq$ 整数时，$W[\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{J}_{-\nu}(x)] \neq 0$，$\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 线性无关；当 $\nu =$ 整数 n 时，$W[\mathrm{J}_n(x), \mathrm{J}_{-n}(x)] = 0$，$\mathrm{J}_n(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-n}(x)$ 线性相关.

7. Bessel 函数 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 的递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)\right] = x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x), \tag{17.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} \mathrm{J}_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} \mathrm{J}_{\nu+1}(x). \tag{17.17}$$

证 首先证明 (17.16) 式. 为此，直接从 Bessel 函数的级数表达式 (17.3) 出发. 由于级数在全平面收敛，所以可以逐项微商.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^\nu \mathrm{J}_\nu(x)\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu)}\frac{x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu-1}} \\ &= x^\nu \mathrm{J}_{\nu-1}(x).\end{aligned}$$

这就是 (17.16) 式. 同样，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu} \mathrm{J}_\nu(x)\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k}}{2^{2k+\nu}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k-1)!\,\Gamma(k+\nu+1)}\frac{x^{2k-1}}{2^{2k+\nu-1}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^{k+1}}{k!\,\Gamma(k+\nu+2)}\frac{x^{2k+1}}{2^{2k+\nu+1}} \\ &= -x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x).\end{aligned}$$

这样就又证明了 (17.17) 式. □

从这两个递推关系中消去 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 或 $\mathrm{J}_\nu'(x)$，又可以得到两个新的递推关系：

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(x) - \mathrm{J}_{\nu+1}(x) = 2\mathrm{J}_\nu'(x), \tag{17.18}$$

$$\mathrm{J}_{\nu-1}(x) + \mathrm{J}_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x}\mathrm{J}_\nu(x). \tag{17.19}$$

把这些递推关系应用到整数阶的情形，就可以看到，任意整数阶的 Bessel 函数，总可以用 $J_0(x)$ 和 $J_1(x)$ 表示出来．这只要反复利用递推关系即可．特别是，在 (17.16)(17.17) 或 (17.18) 式中令 $\nu=0$，并利用 (17.5) 式的结果，还能得到

$$J_0'(x)=-J_1(x). \tag{17.20}$$

8. Bessel 函数的渐近展开． Bessel 函数的渐近展开有两种基本的类型．一种适用于 $x\to 0$，

$$J_\nu(x)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu+O\left(x^{\nu+2}\right). \tag{17.21}$$

这可以直接由 Bessel 函数的级数表达式得到．另一种渐近展开适用于 $x\to\infty$，

$$J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\qquad |\arg x|<\pi. \tag{17.22}$$

这个公式的推导通常要用到任意阶 Bessel 函数的积分表示，而且还要用到一种特殊的技巧 (鞍点法，或称最陡下降法)．严格的推导可见参考书目 [3] 的第七章．在参考书目 [1] 中也给出了整数阶 Bessel 函数渐近展开的证明．本书第六章事实上也曾得到过 Bessel 方程的解的渐近展开，但严格说来并不完全，因为在那里并未能证明得到的渐近展开式到底对应于 Bessel 方程的哪一种解式．

现在来解释为什么 $J_\nu(x)$ 描述的是柱面波．正如性质 5 中所作的那样，如果令 $x=kr$，并且把 r 理解为柱坐标系中的坐标变量，把 k 理解为波数，取时间因子为 $e^{-i\omega t}$，则当 r 足够大时， $J_\nu(kr)$ 所描述的波动过程的相位就是

$$\cos\left(kr-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)e^{-i\omega t}=\frac{1}{2}\left\{\exp\left[i\left(kr-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-\omega t\right)\right]\right.$$
$$\left.+\exp\left[-i\left(kr-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\omega t\right)\right]\right\},$$

等相位面是柱面

$$kr-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\mp\omega t=\text{常数},$$

分别描述的是等相位面随着时间不断扩大或收缩的发散或会聚的柱面波．而且，由于 (17.22) 式中还含有与 $\sqrt{r}$ 成反比的振幅因子，波动过程的能流密度就与 r 成反比，可是由于圆柱的侧面积与 r 成正比，所以单位时间内通过每个圆柱面流过的总能量不变．这就是说， (17.22) 式描述的还是一个不衰减的柱面波．

9. 实数阶 Bessel 函数的零点：当 $\nu > -1$ 或为整数时， $\mathrm{J}_\nu(x)$ 有无穷多个零点，它们全部都是实数，对称地分布在实轴上．

关于 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 零点的存在性，这里不证．下面只证明后两个结论．而且不必讨论根据负整数阶的 Bessel 函数，因为根据整数阶 Bessel 函数的奇偶性，可以知道，它们和正整数阶的 Bessel 函数最多只差一个负号．所以，下面只讨论 $\nu > -1$ 的情形．

首先， $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的零点不可能是纯虚数，因为当 x 是纯虚数时， $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的无穷级数表示是一个正项级数，级数和不可能为 0．

其次，设 α 是 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的一个零点，即 $\mathrm{J}_\nu(\alpha) = 0$，则 α 的复共轭 α^* 也一定是 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的零点， $\mathrm{J}_\nu(\alpha^*) = [\mathrm{J}_\nu(\alpha)]^* = 0$．换言之， $\mathrm{J}_\nu(\alpha x)$ 和 $\mathrm{J}_\nu(\alpha^* x)$ 均以 $x = 1$ 为零点．它们分别满足方程

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{dJ}_\nu(\alpha x)}{\mathrm{d}x}\right] + \left[\alpha^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right]\mathrm{J}_\nu(\alpha x) = 0, \tag{17.23a}$$

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{dJ}_\nu(\alpha^* x)}{\mathrm{d}x}\right] + \left[\alpha^{*2} - \frac{\nu^2}{r^2}\right]\mathrm{J}_\nu(\alpha^* x) = 0. \tag{17.23b}$$

将方程 (17.23a) 和 (17.23b) 分别乘以 $x\mathrm{J}_\nu(\alpha^* x)$ 和 $x\mathrm{J}_\nu(\alpha x)$，相减，再在区间 [0, 1] 上积分，即得

$$\begin{aligned}&\left(\alpha^2 - \alpha^{*2}\right)\int_0^1 x\mathrm{J}_\nu(\alpha x)\mathrm{J}_\nu(\alpha^* x)\mathrm{d}x\\ &\qquad = -x\left[\mathrm{J}_\nu(\alpha^* x)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(\alpha x)}{\mathrm{d}x} - \mathrm{J}_\nu(\alpha x)\frac{\mathrm{dJ}_\nu(\alpha^* x)}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_0^1 = 0.\end{aligned}$$

由于

$$x\mathrm{J}_\nu(\alpha x)\mathrm{J}_\nu(\alpha^* x) = x\left|\mathrm{J}_\nu(\alpha x)\right|^2 \geq 0,$$

且不恒为 0，所以当 $\nu > -1$ 时，积分

$$\int_0^1 x\mathrm{J}_\nu(\alpha x)\mathrm{J}_\nu(\alpha^* x)\mathrm{d}x$$

存在，且不为 0，这样就证得

$$\alpha^2 = \alpha^{*2},$$

即 α^2 是实数. 这时有两个可能： $\alpha^2 \geq 0$ (α 为实数) 和 $\alpha^2 < 0$ (α 为纯虚数)，但由于 α 不可能为纯虚数，所以 α 一定是实数. 而且，一旦 $\mathrm{J}_\nu(\alpha) = 0$，则由 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的级数表达式可以看出，也一定有 $\mathrm{J}_\nu(-\alpha) = 0$. 所以 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的零点对称地分布在实轴上. □

更进一步，根据递推关系和 Rolle 定理，就可以知道 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 的相邻的两个零点之间，必定有 $\mathrm{J}_{\nu\pm1}(x)$ 的一个零点.

17.2 Neumann 函 数

在上一节中我们提到， Bessel 方程 (17.2) 的两个解 $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 当 $\nu \neq$ 整数 时是线性无关的，

$$W\left[\mathrm{J}_\nu(x), \mathrm{J}_{-\nu}(x)\right] = -\frac{2}{\pi x}\sin\pi\nu,$$

方程的通解当然就可以表示为 $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 的线性组合；当 $\nu =$ 整数n 时， $\mathrm{J}_{\pm n}(x)$ 是线性相关的，因此还需要重新求出方程的第二解. 从原则上来说，最基本的办法是取第二解为含对数项的正则解，代入方程定系数. 另一种比较巧妙的办法是当 $\nu \neq$ 整数 时，把第二解也不是简单地取为 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$，而是仍然取为 $\mathrm{J}_{\pm\nu}(x)$ 的某种线性组合. 完全可以适当地选择组合系数，例如取

$$y_2(x) = \frac{c\mathrm{J}_\nu(x) - \mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \tag{17.24}$$

就一定有

$$W\left[\mathrm{J}_\nu(x), y_2(x)\right] = \frac{2}{\pi x}. \tag{17.25}$$

这样，即使 $\nu \to$ 整数n， $y_2(x)$ 仍然与 $\mathrm{J}_n(x)$ 线性无关. 但是，当 $\nu \to$ 整数n 时，解式 (17.24) 的分母 $\sin\nu\pi$ 变为 0，因此必须适当选择另一个组合系数 c (c 的不同选取，并不影响 $W\left[\mathrm{J}_\nu(x), y_2(x)\right]$ 的

值)，使得 (17.24) 式的分子也变为 0，解式才可能有意义. 考虑到 (17.5) 式，故可取 $c=\cos\nu\pi$. 这样就定义了 Neumann 函数 [①]

$$\mathrm{N}_\nu(x)=\frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi},\tag{17.26}$$

不论 ν 是否为整数，它总可以取为 Bessel 方程的第二解.

整数阶的 Neumann 函数 $\mathrm{N}_n(x)$，应该理解为 $\nu\to n$ 时 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 的极限.

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_n(x)&=\lim_{\nu\to n}\frac{\cos\nu\pi\,\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}\\&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial\mathrm{J}_\nu(x)}{\partial\nu}-(-)^n\frac{\partial\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n}\\&=\frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\\&\quad-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,(n+k)!}\big[\psi(n+k+1)\\&\quad+\psi(k+1)\big]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n},\qquad|\arg x|<\pi.\end{aligned}\tag{17.27}$$

并且约定，当 $n=0$ 时要去掉右端第二项的有限和.

Neumann 函数也有无穷多个零点. 但是，即使限于整数阶的 Neumann 函数，它们的零点也不全是实数.

当 $x\to 0$, $\mathrm{Re}\,\nu>0$ 时，$\mathrm{N}_\nu(x)$ 的渐近行为完全由 $\mathrm{J}_{-\nu}(x)$ 决定，

$$\mathrm{N}_\nu(x)\sim-\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}.\tag{17.28}$$

而对于 $\mathrm{N}_0(x)$，可由 (17.27) 式直接得到

$$\mathrm{N}_0(x)\sim\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}.\tag{17.29}$$

所以，不论 ν 是否为整数， $\mathrm{N}_\nu(x)$ 在 $x=0$ 点都是发散的.

还可以证明，当 $x\to\infty$ 时，Neumann 函数的渐近表达式是

$$\mathrm{N}_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right),\qquad|\arg x|<\pi.\tag{17.30}$$

① 在有的文献中也写作 $\mathrm{Y}_\nu(x)$.

因此，$N_\nu(x)$ 也可以用来描写柱面波，同样也是发散的柱面波和会聚的柱面波的叠加.

根据 $J_\nu(x)$ 的递推关系 (17.16) 和 (17.17)，容易证明，$N_\nu(x)$ 的递推关系是

$$\frac{d}{dx}\left[x^{\nu}N_\nu(x)\right]=x^{\nu}N_{\nu-1}(x), \tag{17.31}$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu}N_\nu(x)\right]=-x^{-\nu}N_{\nu+1}(x). \tag{17.32}$$

因此，Neumann 函数的递推关系的形式和 Bessel 函数完全相同. 事实上，下一节将看到，柱函数正是用这两个递推关系来定义的.

Bessel 函数又称为第一类柱函数，Neumann 函数又称为第二类柱函数.

$N_0(x)$, $N_1(x)$ 和 $N_2(x)$ 的图形见图 17.2 .

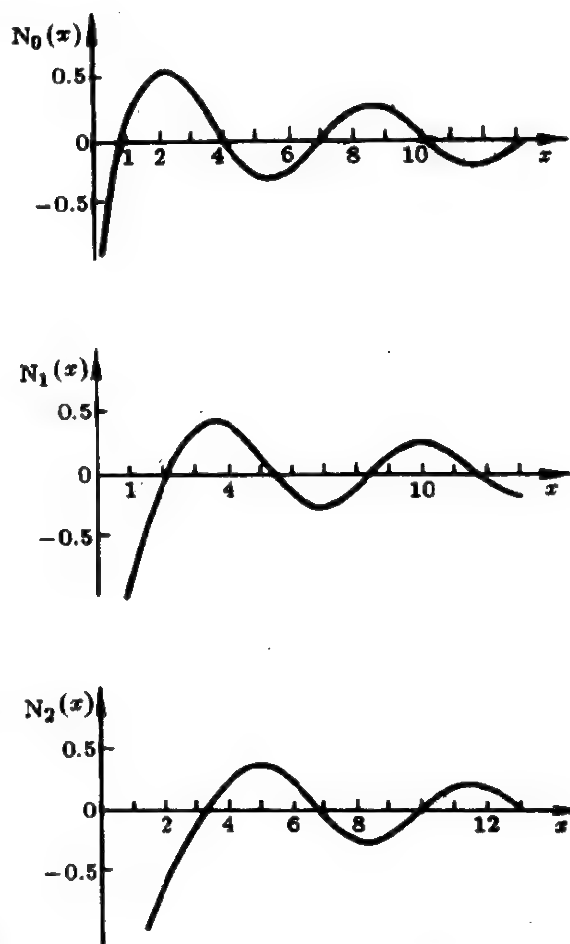


图 17.2　Neumann 函数

练习 17.1　证明:

$$N_{-\nu}(z)=\sin\nu\pi J_\nu(z)+\cos\nu\pi N_\nu(z),$$

$$N_\nu\left(ze^{m\pi i}\right)=e^{-m\nu\pi i}N_\nu(z)+2i\sin m\nu\pi\ \cot\nu\pi\ J_\nu(z).$$

$$N_{-\nu}\left(ze^{m\pi i}\right)=e^{-m\nu\pi i}N_{-\nu}(z)+2i\sin m\nu\pi\csc\nu\pi\ J_\nu(z).$$

练习 17.2　证明 $J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 无共同零点.

提示：证明若 $J_\nu(x)$ 和 $N_\nu(x)$ 有共同零点，则必线性相关.

练习 17.3　证明 $N_\nu(x)$ 的递推关系 (17.31) 和 (17.32) 式.

17.3 柱 函 数

上一节提到，凡是满足递推关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{\nu}C_{\nu}(x)\right]=x^{\nu}C_{\nu-1}(x), \tag{17.33}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}C_{\nu}(x)\right]=-x^{-\nu}C_{\nu+1}(x) \tag{17.34}$$

的函数 $\{C_{\nu}(x)\}$，统称为柱函数. 前面介绍的 Bessel 函数和 Neumann 函数都是柱函数.

下面我们证明：柱函数一定是 Bessel 方程的解.

首先，我们把递推关系 (17.33) 和 (17.34) 改写成

$$C_{\nu}'(x)+\frac{\nu}{x}C_{\nu}(x)=C_{\nu-1}(x) \tag{17.35}$$

和

$$C_{\nu}'(x)-\frac{\nu}{x}C_{\nu}(x)=-C_{\nu+1}(x). \tag{17.36}$$

将 (17.35) 式微商，得

$$C_{\nu}''(x)+\frac{\nu}{x}C_{\nu}'(x)-\frac{\nu}{x^2}C_{\nu}(x)=C_{\nu-1}'(x). \tag{17.37}$$

再将 (17.36) 式中的 ν 改写为 $\nu-1$，并将 (17.35) 式代入，

$$\begin{aligned}C_{\nu-1}'(x)&=\frac{\nu-1}{x}C_{\nu-1}(x)-C_{\nu}(x)\\&=\frac{\nu-1}{x}\left[C_{\nu}'(x)+\frac{\nu}{x}C_{\nu}(x)\right]-C_{\nu}(x).\end{aligned}$$

再代入 (17.37) 式，即得

$$C_{\nu}''(x)+\frac{\nu}{x}C_{\nu}'(x)-\frac{\nu}{x^2}C_{\nu}(x)=\frac{\nu-1}{x}C_{\nu}'(x)+\frac{\nu(\nu-1)}{x^2}C_{\nu}(x)-C_{\nu}(x),$$

稍加整理，就得到

$$C_{\nu}''(x)+\frac{1}{x}C_{\nu}'(x)+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)C_{\nu}(x)=0.$$

这就证明了柱函数 $\{C_{\nu}(x)\}$ 一定是 Bessel 方程的解. □

17.4 Bessel 方程的本征值问题

现在从一个具体问题入手，讨论 Bessel 方程的本征值问题．要讨论的问题是：求四周固定的圆形薄膜的固有频率．

注意，这个问题不同于过去讨论过的偏微分方程定解问题：现在并没有给出初始条件，所要求的也不是描写圆形薄膜振动的位移如何随时间和空间而变化．现在要求的是固有频率，即求出给定偏微分方程和边界条件下的所有各种振动模式的角频率．也正是因为现在的问题中并没有给出初始条件，所以也不能得出位移转动不变的结论．

取平面极坐标系，并将坐标原点放置在圆形薄膜的中心．这样，偏微分方程和边界条件就是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right] = 0, \tag{17.38a}$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}, \qquad u\Big|_{r=a} = 0, \tag{17.38b}$$

$$u\Big|_{\phi=0} = u\Big|_{\phi=2\pi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0} = \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}. \tag{17.38c}$$

现在要求的就是在边界条件 (17.38b) 和 (17.38c) 的限制下，到底许可那些 ω 值，使得方程 (17.38a) 有非零解

$$u(r,\phi,t) = v(r,\phi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{17.39}$$

将此解式代入方程 (17.38a) 及边界条件 (17.38b) 和 (17.38c)，就可以得到

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 v = 0,$$

$$v\Big|_{r=0}\text{有界} \qquad v\Big|_{r=a} = 0,$$

$$v\Big|_{\phi=0} = v\Big|_{\phi=2\pi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0} = \frac{\partial v}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}.$$

再令 $v(r,\phi) = R(r)\Phi(\phi)$，分离变量，就得到两个本征值问题

$$\Phi''(\phi)+m^2\Phi(\phi)=0, \tag{17.40a}$$

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi), \qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi) \tag{17.40b}$$

和

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0, \tag{17.41a}$$

$$R(0)\text{有界}, \qquad R(a)=0, \tag{17.41b}$$

其中 $k=\omega/c$.

本征值问题 (17.40) 已经多次见到过，对应于它的本征值

$$m^2, \quad m=0,1,2,3,\cdots,$$

本征函数为

$$\Phi_m(\phi)=\begin{cases}\cos m\phi,\\ \sin m\phi.\end{cases}$$

所以，在本征值问题 (17.41) 中，参数 m^2 是已知的，而 k^2 是本征值，待求.

完全仿照第十四章中的办法，可以证明

$$k^2\int_0^a R(r)R^*(r)r\mathrm{d}r=m^2\int_0^a R(r)R^*(r)\frac{\mathrm{d}r}{r}+\int_0^a\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}R^*(r)}{\mathrm{d}r}r\mathrm{d}r,$$

所以，一定有本征值 $k^2>0$. 通过作变换 $x=kr$ ， $y(x)=R(r)$ ，就可以将微分方程 (17.41a) 化为 Bessel 方程，从而求得它的通解

$$R(r)=C\mathrm{J}_m(kr)+D\mathrm{N}_m(kr). \tag{17.42}$$

考虑到边界条件 (17.41b) 的要求， $R(0)$ 有界，故 $D=0$ ；又由于要求 $R(a)=0$ ，就得到

$$\mathrm{J}_m(ka)=0. \tag{17.43}$$

设 $\mu_i^{(m)}$ 是 m 阶 Bessel 函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 i 个正零点 (由小到大排列)， $i=1,2,3,\cdots$ ， 则本征值问题 (17.41) 的解是

本征值 $$k_{mi}^2=\left(\frac{\mu_i^{(m)}}{a}\right)^2, \quad i=1,2,3,\cdots, \tag{17.44a}$$

本征函数 $$R_{mi}(r)=\mathrm{J}_m(k_{mi}r). \tag{17.44b}$$

于是就求得了圆形薄膜的固有振动的角频率

$$\omega_{mi} = \frac{\mu_i^{(m)}}{a} c, \tag{17.45}$$

其中 $\mu_i^{(m)}$ 是 m 阶 Bessel 函数 $\mathrm{J}_m(x)$ 的第 i 个正零点.

为了在分离变量法中的应用，很自然地要讨论上面得到的本征函数的正交归一关系. 下面，介绍一种略为不同的做法，可以同时得到本征函数的正交归一关系.

首先，写出本征函数 $R_{mi}(r) = \mathrm{J}_m(k_{mi}r)$ 所满足的微分方程和边界条件，

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}\right] + \left(k_{mi}^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\mathrm{J}_m(k_{mi}r) = 0, \tag{17.46a}$$

$$\mathrm{J}_m(0)\text{有界}, \qquad \mathrm{J}_m(k_{mi}a) = 0. \tag{17.46b}$$

同时，再写出函数 $R(r) = \mathrm{J}_m(kr)$ 所满足的微分方程和边界条件，

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m(kr)}{\mathrm{d}r}\right] + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\mathrm{J}_m(kr) = 0, \tag{17.47a}$$

$$\mathrm{J}_m(0)\text{有界}. \tag{17.47b}$$

由于其中的 k 为任意实数，所以一般说来，不会有 $\mathrm{J}_m(ka) = 0$.

现在用 $r\mathrm{J}_m(kr)$ 和 $r\mathrm{J}_m(k_{mi}r)$ 分别乘方程 (17.46a) 和 (17.47a)，相减，再在区间 $[0, a]$ 上积分，就得到

$$\begin{aligned}&\left(k_{mi}^2 - k^2\right)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r\\ &= r\left[\mathrm{J}_m(k_{mi}r)\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m(kr)}{\mathrm{d}r} - \mathrm{J}_m(kr)\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a}.\end{aligned}$$

代入边界条件 (17.46b) 和 (17.47b)，可以将上面的结果化为

$$\begin{aligned}&\left(k_{mi}^2 - k^2\right)\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(kr)r\mathrm{d}r\\ &= -a\mathrm{J}_m(ka)\frac{\mathrm{d}\mathrm{J}_m(k_{mi}r)}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=a}\\ &= -k_{mi}a\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}_m'(k_{mi}a).\end{aligned} \tag{17.48}$$

我们对两个特殊情形感兴趣．第一种情形是 $k=k_{mj}\neq k_{mi}$，即 k 也是一个本征值，但不等于 k_{mi}．这时就有 $\mathrm{J}_m(k_{mj}a)=0$，因此 (17.48) 式的右端为 0．但由于 $k_{mj}\neq k_{mi}$，所以

$$\int_0^a \mathrm{J}_m(k_{mi}r)\mathrm{J}_m(k_{mj}r)r\mathrm{d}r=0,\qquad k_{mi}\neq k_{mj},$$

即对应于不同本征值的本征函数在区间 $[0,a]$ 上以权重 r 正交．

另一种情形是 $k=k_{mi}$，这时 (17.48) 式的两端均为 0．我们可以先将 (17.48) 式的两端同除以 $k_{mi}^2-k^2$，然后取极限 $k\to k_{mi}$，这样就得到

$$\begin{aligned}\int_0^a \mathrm{J}_m^2(k_{mi}r)r\mathrm{d}r &= -\lim_{k\to k_{mi}}\frac{k_{mi}a}{k_{mi}^2-k^2}\mathrm{J}_m(ka)\mathrm{J}_m'(k_{mi}a)\\ &=\frac{a^2}{2}\left[\mathrm{J}_m'(k_{mi}a)\right]^2.\end{aligned}\tag{17.49}$$

这正是本征函数 $\mathrm{J}_m(k_{mi}r)$ 的模方．

如果将上面本征值问题 (17.46b) 中 $r=a$ 端的齐次边界条件改为第二类或第三类边界条件，也可以类似地讨论．

练习 17.4 将边界条件 (17.46b) 改为

$$u\big|_{r=0}\text{有界},\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=0,$$

重复以上的讨论．

练习 17.5 将边界条件 (17.46b) 改为

$$u\big|_{r=0}\text{有界},\qquad \left[\alpha\frac{\partial u}{\partial r}+\beta u\right]_{r=a}=0,$$

其中已知常数 α 和 β 均不为 0，重复以上的讨论．

事实上，可以把这三种情形统一写成

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right]+\left(k^2-\frac{m^2}{r^2}\right)R(r)=0,\tag{17.50a}$$

$$R(0)\text{有界},\qquad \alpha R'(a)+\beta R(a)=0.\tag{17.50b}$$

如果 $\alpha\neq 0,\beta=0$，则是第一类边界条件；如果 $\alpha=0,\beta\neq 0$，就是第二类边界条件；如果 α 和 β 均不为 0，则为第三类边界条件．

关于 Bessel 函数族的完备性，这里只给出结论：如果函数 $f(r)$ 在区间 $[0, a]$ 上连续，且只有有限个极大和极小，则可按本征函数 $\mathrm{J}_m(k_i r)$ 展开，

$$f(r)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i \mathrm{J}_m(k_i r), \tag{17.51}$$

其中 $\mathrm{J}_m(k_i r)$ 是本征值问题 (17.50) 的解，而展开系数为

$$b_i=\frac{\displaystyle\int_0^a f(r)\mathrm{J}_m(k_i r) r\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^a \mathrm{J}_m^2(k_i r) r\mathrm{d}r}. \tag{17.52}$$

这样得到的级数在区间 $[\delta, a-\delta]$ $(\delta>0)$ 上是一致收敛的. 证明可见参考书目 [15], 第 17.33 节. 在该书中也还有更普遍的展开定理.

下面再讨论两个具体的问题.

例 17.1 圆柱体的冷却. 设有一个无穷长的圆柱体，半径为 a. 很自然地我们应该选用柱坐标系， z 轴即为圆柱体的轴. 如果柱体的表面温度维持为 0 ，初温为 $u_0 f(r)$ ，试求柱体内温度的分布和变化.

解 显然，这时温度 u 与 ϕ, z 无关，即 $u=u(r,t)$. 它由定解问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\kappa}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0, \tag{17.53a}$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}, \qquad u\Big|_{r=a}=0, \tag{17.53b}$$

$$u\Big|_{t=0}=u_0 f(r) \tag{17.53c}$$

决定.

根据前面的一般讨论，容易写出此定解问题的一般解

$$u(r,t)=\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathrm{J}_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right)\exp\left[-\kappa\left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2 t\right], \tag{17.54}$$

其中 μ_i 是 $\mathrm{J}_0(x)$ 的第 i 个正零点. 代入初条件，有

$$u(r,t)\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathrm{J}_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right)=u_0 f(r).$$

所以

$$c_i = \frac{2u_0}{a^2 \mathrm{J}_1^2(\mu_i)} \int_0^a f(r)\, \mathrm{J}_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right) r\, \mathrm{d}r. \tag{17.55}$$

只要知道了 $f(r)$ 的具体形式，就可以算出上面的积分. 例如，我们设

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2, \tag{17.56}$$

便有

$$c_i = \frac{2u_0}{a^2 \mathrm{J}_1^2(\mu_i)} \int_0^a \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \mathrm{J}_0\left(\mu_i \frac{r}{a}\right) r\, \mathrm{d}r.$$

令 $x = r/a$ ，则可化为

$$c_i = \frac{2u_0}{\mathrm{J}_1^2(\mu_i)} \int_0^1 \left(1 - x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu_i x) x \mathrm{d}x.$$

利用递推关系 (17.16)，就可以算出上面的积分.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(1 - x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu_i x) x \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(1 - x^2\right) \frac{1}{\mu_i} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[x \mathrm{J}_1(\mu_i x)\right] \mathrm{d}x \\
&= \left(1 - x^2\right) \frac{1}{\mu_i} x \mathrm{J}_1(\mu_i x)\Big|_0^1 + \frac{2}{\mu_i} \int_0^1 x^2 \mathrm{J}_1(\mu_i x) \mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\mu_i^2} x^2 \mathrm{J}_2(\mu_i x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\mu_i^2} \mathrm{J}_2(\mu_i).
\end{aligned}$$

再令递推关系 (17.19) 中 $\nu = 1$ ，

$$\mathrm{J}_0(x) + \mathrm{J}_2(x) = \frac{2}{x} \mathrm{J}_1(x),$$

并考虑到 $\mathrm{J}_0(\mu_i) = 0$ ，就有

$$\mathrm{J}_2(\mu_i) = \frac{2}{\mu_i} \mathrm{J}_1(\mu_i).$$

代入即得

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right) \mathrm{J}_0(\mu_i x) x \mathrm{d}x = \frac{4}{\mu_i^3} \mathrm{J}_1(\mu_i). \tag{17.57}$$

于是最后便可求出叠加系数

$$c_i = \frac{8u_0}{\mu i^3 \mathrm{J}_1(\mu_i)}. \tag{17.58}$$

例 17.2 空心圆柱体径向振动的固有频率．设无穷长空心圆柱体的内外半径分别为 a 和 b．若内表面固定，外表面自由，求圆柱体径向振动的固有频率．

解 显然应该选用柱坐标系， z 轴即为圆柱体的轴．由于限定讨论径向振动，故 $u=u(r,t)$ 与 ϕ, z 无关．现在的问题是要列出 $u(r,t)$ 所满足的微分方程和边界条件．这时又面临一个新的困难．

这个困难来自采用曲面坐标系讨论力学问题．对于 (机械) 振动问题来说，描写运动过程的物理量是位移，它通常是一个矢量．不妨用矢量 $\boldsymbol{A}$ 表示，它是空间坐标和时间的函数．在直角坐标系下，可以直截了当地计算矢量 $\boldsymbol{A}$ 或者它的任意一个分量对空间坐标的偏微商．特别是，如果用 Laplace 算符对于矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的作用，其形式和对于标量函数的作用没有什么不同：

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} \equiv \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial z^2}. \tag{17.59}$$

而如果写出 $\boldsymbol{A}$ 的分量表达式，

$$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{e}_x+A_y\boldsymbol{e}_y+A_z\boldsymbol{e}_z,$$

用 Laplace 算符作用于 $\boldsymbol{A}$ 的某一分量，例如 A_x，也有类似的结果

$$\nabla^2 A_x \equiv \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}. \tag{17.60}$$

其原因当然是：在直角坐标系下，坐标矢量 $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ 和 $\boldsymbol{e}_z$ 都是常矢量，不随空间位置变化．

其他正交曲面坐标系的情况就不相同．例如，在柱坐标系下，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的分量表达式是

$$\boldsymbol{A}=A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_z\boldsymbol{e}_z,$$

坐标矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 不再是常矢量，而是 θ 的函数 (见图 17.3)．因此，容易理解

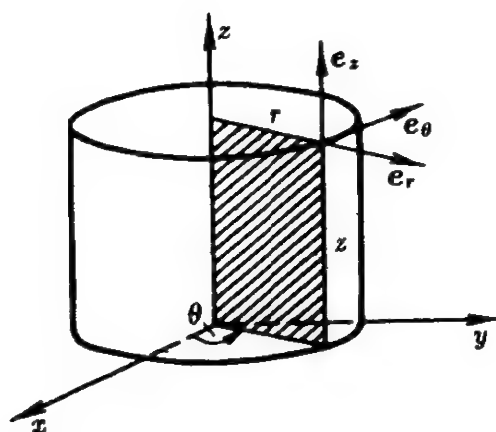


图 17.3 柱坐标系中的坐标矢量

$$\begin{aligned}\nabla^2 \boldsymbol{A} &= \nabla^2(A_r \boldsymbol{e}_r) + \nabla^2(A_\theta \boldsymbol{e}_\theta) + \nabla^2(A_z \boldsymbol{e}_z) \\ &\neq \left[\nabla^2 A_r\right]\boldsymbol{e}_r + \left[\nabla^2 A_\theta\right]\boldsymbol{e}_\theta + \left[\nabla^2 A_z\right]\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

因为还必须考虑坐标矢量对于坐标变量的偏微商. 事实上，在理论力学中已经知道

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}\theta} = \boldsymbol{e}_\theta, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{e}_r. \tag{17.61}$$

所以

$$\begin{aligned}\nabla^2 \boldsymbol{A} &= \left[\nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_r \\ &\quad + \left[\nabla^2 A_\theta - \frac{1}{r^2}A_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\theta + \left[\nabla^2 A_z\right]\boldsymbol{e}_z.\end{aligned} \tag{17.62}$$

这样，即使在 $A_\theta = 0$ 和 $A_z = 0$ 的条件下，只考虑 $\boldsymbol{A}$ 的径向分量 A_r，也应该有

$$\nabla^2 \boldsymbol{A} = \nabla^2[A_r \boldsymbol{e}_r] = \left[\nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2}A_r\right]\boldsymbol{e}_r. \tag{17.63}$$

现在回到原来的问题. 在例题所述的条件下，$u = u(r,t)$ 所满足的微分方程和边界条件应该是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{u}{r^2}\right] = 0, \tag{17.64a}$$

$$u\Big|_{r=a} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=b} = 0. \tag{17.64b}$$

令

$$u(r,t) = R(r)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t},$$

代入 (17.64)，便得到

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right] + \left[k^2 - \frac{1}{r^2}\right]R(r) = 0, \tag{17.65a}$$

$$R(a) = 0, \qquad R'(b) = 0, \tag{17.65b}$$

其中 $k = \omega/c$. 容易证明，当 $k = 0$ 时本征值问题 (17.65) 无解. 于是，可作变换 $x = kr$ 和 $y(x) = R(r)$，而将方程 (17.65a) 化为 Bessel 方程，由此即可得到方程 (17.65a) 的通解

$$R(r) = C\mathrm{J}_1(kr) + D\mathrm{N}_1(kr).$$

代入边界条件 (17.65b)，即得

$$C\mathrm{J}_1(ka)+D\mathrm{N}_1(ka)=0,\quad C\mathrm{J}_1'(kb)+D\mathrm{N}_1'(kb)=0.$$

这可以看成是关于 C 和 D 的线性代数方程组，有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\mathrm{J}_1(ka) & \mathrm{N}_1(ka)\\ \mathrm{J}_1'(kb) & \mathrm{N}_1'(kb)\end{vmatrix}=0.$$

这样就求得空心圆柱体径向振动的固有频率 $\omega_i=k_ic$，其中 k_i 是

$$\mathrm{J}_1(ka)\mathrm{N}_1'(kb)-\mathrm{N}_1(ka)\mathrm{J}_1'(kb)=0 \tag{17.66}$$

的第 i 个正根 (由小到大排列)．相应的固有振动模式是

$$u_i(r,t)=[\mathrm{N}_1(k_ia)\mathrm{J}_1(k_ir)-\mathrm{J}_1(k_ia)\mathrm{N}_1(k_ir)]\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_ict}. \tag{17.67}$$

练习 17.6　例 17.2 中的本征函数是

$$R_i(r)=\mathrm{N}_1(k_ia)\mathrm{J}_1(k_ir)-\mathrm{J}_1(k_ia)\mathrm{N}_1(k_ir).$$

试讨论本征函数的正交归一性质.

17.5　含 Bessel 函数的积分

在应用 Bessel 函数求解偏微分方程定解问题时，自然会涉及到计算含 Bessel 函数的积分．最简单的有下列几种类型的积分．

1. 被积函数为幂函数与 Bessel 函数的乘积

这种类型的积分多采用Bessel 函数的递推关系来计算．17.4 节的例题中就遇到过这种类型的积分．下面作一点更普遍的讨论．

首先考虑积分 $\int x^{\mu}\mathrm{J}_{\nu}(x)\mathrm{d}x$．采用递推关系 (17.16)，反复分部积分，就有

$$\begin{aligned}\int x^{\mu}\mathrm{J}_{\nu}(x)\mathrm{d}x &= \int x^{\mu-\nu-1}x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu}(x)\mathrm{d}x\\ &= x^{\mu-\nu-1}x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)\\ &\quad-(\mu-\nu-1)\int x^{\mu-\nu-2}x^{\nu+1}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^{\mu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x) - (\mu-\nu-1)\int x^{\mu-\nu-3}x^{\nu+2}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)\mathrm{d}x \\
&= \left[x^{\mu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x) - (\mu-\nu-1)x^{\mu-1}\mathrm{J}_{\nu+2}(x)\right] \\
&\quad + (\mu-\nu-1)(\mu-\nu-3)\int x^{\mu-\nu-5}x^{\nu+3}\mathrm{J}_{\nu+2}(x)\mathrm{d}x \\
&= \cdots.
\end{aligned}
$$

可以看出，每分部积分一次，除了分部积分出的项中再增加一项外，在新出现的积分中，被积函数的幂函数的次数就降低一次，而 Bessel 函数的阶数则升高 1．这样，在分部积分 n 次后，我们便会遇到积分

$$
\int x^{\mu-n}\mathrm{J}_{\nu+n}(x)\mathrm{d}x.
$$

若 $(\mu-n)\pm(\nu+n)=1$ ，即

$$
\mu+\nu=1 \quad \text{或} \quad \mu-\nu=2n+1, \tag{17.68}
$$

则这个积分可以表示为有限的形式，并且能够用初等方法积出．

如果采用递推关系 (17.17) ，重复上面的讨论，又可以得到

$$
\begin{aligned}
\int x^{\mu}\mathrm{J}_{\nu}(x)\mathrm{d}x &= \int x^{\mu+\nu-1}x^{-\nu+1}\mathrm{J}_{\nu}(x)\mathrm{d}x \\
&= -x^{\mu+\nu-1}x^{-\nu+1}\mathrm{J}_{\nu-1}(x) \\
&\quad -(\mu+\nu-1)\int x^{\mu+\nu-2}x^{-\nu+1}\mathrm{J}_{\nu-1}(x)\mathrm{d}x \\
&= -x^{\mu}\mathrm{J}_{\nu-1}(x) + (\mu+\nu-1)\int x^{\mu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

这样，每分部积分一次，在新出现的积分中，被积函数的幂函数的次数就降低一次，而 Bessel 函数的阶数也降低 1．于是，在分部积分 n 次后，我们便会遇到积分

$$
\int x^{\mu-n}\mathrm{J}_{\nu-n}(x)\mathrm{d}x.
$$

若 $(\mu-n)\pm(\nu-n)=1$ ，即

$$
\mu-\nu=1 \quad \text{或} \quad \mu+\nu=2n+1, \tag{17.69}
$$

则这个积分也可以表示为有限的形式，也能用初等方法积出．

练习 17.7 在分部积分时，如果我们每次均使幂函数的次数升高 1，试重复上面的讨论.

如果被积函数为幂函数和其他柱函数的乘积，上面的讨论仍然适用，因为计算中只用到了 Bessel 函数的递推关系和幂函数的微积分公式. 我们知道，所有的柱函数都满足同样的递推关系.

上面的讨论固然还可以推广到被积函数为多项式与 Bessel 函数的乘积的情形. 但是，需要注意，我们并不可照搬上面的结论. 尽管原则上我们可以将多项式和 Bessel 函数的乘积的积分拆成若干个幂函数和 Bessel 函数的乘积的积分之和，尽管这每一个积分并不满足上述条件 (17.68) 或 (17.69) 的要求，但并不排除有这样的特殊可能性，即各个积分分部积分后得到的新的积分彼此相消的情形. 最极端的例子便是积分

$$\int\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)\mathrm{J}_\nu(x)x\mathrm{d}x.$$

事实上，它直接可以利用 Bessel 方程而积出.

2. 被积函数为指数函数与 Bessel 函数的乘积

例如，考虑积分 $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x,\ \mathrm{Re}\,a>0$. 计算这种类型的积分，要充分发挥指数函数 e^{-ax} 在保证积分收敛中的作用，因此，不妨首先考虑采用 Bessel 函数的级数表示，并逐项积分. 但可以预料，这样会得到无穷级数，而后还需要求出和函数. 下面就用这种办法计算上面的积分.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{bx}{2}\right)^{2k}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}x^{2k}\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{b}{2}\right)^{2k}\frac{(2k)!}{a^{2k+1}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{2k}$$

$$= \frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{17.70}$$

这种做法的困难之处就是级数求和. 而且，级数求和时还往往要有一定的限制条件. 例如，在上面求和时就要有 $|b/a|<1$ 的限制. 当然容易证明，原来的积分在 $\mathrm{Re}\,a>0$ 的任意闭区域中一致收敛，因而在 $\mathrm{Re}\,a>0$ 的任意区域内解析；而积分出的结果也在同一区域内解析. 根据解析延拓的原理，就可以去掉上面的限制条件.

另一种做法是将被积函数中的 Bessel 函数用它的积分表示式代入，并交换积分次序. 就本题而言，这种做法要比代入 Bessel 函数的级数表达式更容易些，因为现在的计算步骤明确，不像级数求和更具有技巧性.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx\sin\theta}\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(a-\mathrm{i}b\sin\theta)x}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a-\mathrm{i}b\sin\theta}\end{aligned}$$

可以用留数定理计算这个积分，

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{J}_0(bx)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=1}\frac{1}{a-b\dfrac{z-z^{-1}}{2}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}\\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{2\mathrm{d}z}{-bz^2+2az+b}\\ &= \left.\frac{1}{-bz+a}\right|_{z=(a-\sqrt{a^2+b^2})/b}\\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.\end{aligned} \tag{17.71}$$

就本题而言，这种做法的另一个好处是不需作解析延拓. 当然，这

种方法也有局限性．例如，本书只介绍了整数阶 Bessel 函数的积分表示．对于非整数阶的 Bessel 函数，尽管也有积分表示，从有关专著中可以查到，但形式比较复杂，应用起来要麻烦一些．

从这个积分还可以推出一个有意思的结果．如果将这个积分理解为 Bessel 函数 $\mathrm{J}_0(bt)$ 的 Laplace 变换，

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_0(bt)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{p^2+b^2}},$$

那么，根据 Laplace 变换的卷积定理 (见 10.3 节)，就应该有

$$\int_0^t \mathrm{J}_0(b\tau)\mathrm{J}_0(b(t-\tau))\mathrm{d}\tau \doteq \frac{1}{p^2+b^2}.$$

另一方面，我们又知道，

$$\frac{1}{p^2+b^2} \doteq \frac{1}{b}\sin bt.$$

所以，就能得到积分

$$\int_0^t \mathrm{J}_0(b\tau)\,\mathrm{J}_0(b(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{b}\sin bt. \tag{17.72}$$

3．被积函数为三角函数与 Bessel 函数的乘积

这种类型的积分，一般说来比较复杂．在很多情形下，结果是间断函数．同时，考虑到积分的收敛性，在积分方法的选择上需要特别小心．这里也举一个例子：计算积分

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_0(\beta x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x, \qquad \alpha>0,\ \beta>0.$$

这个积分并不能由 (17.71) 式的结果中简单地令 $a=\mathrm{i}\alpha,\ b=\beta$ 而得到，因为在导出 (17.71) 式时明显地用到 a 为实数这个条件．所以，只得代入 Bessel 函数的积分表示重新计算．

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_0(\beta x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^\infty \cos\alpha x\cos(\beta x\sin\theta)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[e^{i(\alpha-\beta\sin\theta)x} + e^{i(\alpha+\beta\sin\theta)x}\right]dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2}\left[\delta(\alpha-\beta\sin\theta) + \delta(\alpha+\beta\sin\theta)\right]d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \delta(\alpha-\beta\sin\theta)d\theta = \int_0^{\pi/2} \delta(\alpha-\beta\sin\theta)d\theta.$$

作变换 $x=\beta\sin\theta$，就可以算出上面含 δ 函数的积分.

$$\int_0^{\infty} J_0(\beta x)\cos\alpha x\,dx = \int_0^{\beta} \frac{\delta(\alpha-x)}{\sqrt{\beta^2-x^2}}dx.$$

现在要区分 $\alpha<\beta$, $\alpha>\beta$ 和 $\alpha=\beta$ 三种情形. 当 $\alpha<\beta$ 时，积分区间 $[0,\beta]$ 中含有 $x=\alpha$ 点，所以，根据 δ 函数的定义或基本公式，可以求出积分值为

$$\left.\frac{1}{\sqrt{\beta^2-t^2}}\right|_{t=\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}.$$

当 $\alpha>\beta$ 时，积分区间 $[0,\beta]$ 中不含有 $x=\alpha$ 点，所以，积分值为 0. 现在的积分值，作为 α 的函数，在 $\alpha=\beta$ 点是不连续的. 可以预料，当 $\alpha=\beta$ 时，积分值应为左右极限的平均值. 因此，当 $\alpha=\beta$ 时积分不存在. 把这三种情形集中写在一起，就有

$$\int_0^{\infty} J_0(\beta x)\cos\alpha x dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}, & \alpha<\beta, \\ \infty, & \alpha=\beta, \\ 0, & \alpha>\beta. \end{cases} \tag{17.73}$$

对于这一问题我们还可以作进一步的分析. 因为积分

$$\int_0^{\infty} J_0(\beta x)\cos\alpha x dx, \qquad \alpha>0,\ \beta>0.$$

是一个反常积分，其反常性表现在积分上限为 ∞. 可以利用 Bessel 函数的渐近展开来分析这个积分的收敛性. 当 x 足够大时，被积函数

$$J_0(\beta x)\cos\alpha x \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(\beta x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\alpha x$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\left[\cos(\beta-\alpha)x + \cos(\beta+\alpha)x \right.$$

$$\left. + \sin(\beta+\alpha)x + \sin(\beta-\alpha)x\right].$$

可以看到，当 $\alpha \neq \beta$ 时，方括号内的各项都是周期振荡的．所以，被积函数就是一个单调地趋于 0 的函数和周期振荡函数的乘积，这就保证了积分的收敛．但当 $\alpha = \beta$ 时，被积函数变为

$$\mathrm{J}_0(\alpha x)\cos\alpha x \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\Big[1 + \cos 2\alpha x + \sin 2\alpha x\Big].$$

$\sqrt{1/2\pi x}$ 项的单独存在，使得积分不再收敛．

严格说来，上面计算中用到的交换积分次序，本来是不合法的，其后果就表现在得到的无穷积分在通常意义下是不存在的．而引进 δ 函数的实质，就相当于计算

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_0(\beta x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x = \lim_{\gamma\to 0}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\gamma x}\mathrm{J}_0(\beta x)\cos\alpha x\,\mathrm{d}x,$$

$$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0.$$

指数函数 $\mathrm{e}^{-\gamma x}$ 的引入，保证了交换积分次序合法．

最后，需要强调，这里介绍的只是最简单的几种含 Bessel 函数的积分，介绍的只是计算这些积分的最简单的几种方法．含 Bessel 函数的积分，是一个涉及面很广的问题．有兴趣的读者，可参阅有关的专著，例如参考书目 [12, 15]．

17.6 Hankel 函数

前面介绍的 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 都可以用来描写柱面波，它们的渐近展开分别是

$$\mathrm{J}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\mathrm{N}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

容易看出，它们描写的柱面波中，既有发散波，又有会聚波．但是，如果我们处理的问题中，只涉及发散波或会聚波，或是要求明确区别出发散波或会聚波，这两个函数显然就不方便了．这时显然应当作线性组合

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x) \equiv \mathrm{J}_\nu(x) + \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x) \tag{17.74}$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[\mathrm{i}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \tag{17.75}$$

$$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x) \equiv \mathrm{J}_\nu(x) - \mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x) \tag{17.76}$$

$$\sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-\mathrm{i}\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{17.77}$$

如果配合上相应的时间因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则 $\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$ 代表发散波，$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$ 代表会聚波．

$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)$ 和 $\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$ 分别称为第一类和第二类 Hankel 函数．它们显然都是 Bessel 方程的解，都是柱函数．统称为第三类柱函数．

练习 17.8　证明：

$$\mathrm{H}_{-\nu}^{(1)}(z) = \mathrm{e}^{\nu\pi\mathrm{i}}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z), \qquad \mathrm{H}_{-\nu}^{(2)}(z) = \mathrm{e}^{-\nu\pi\mathrm{i}}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z).$$

练习 17.9　证明：

$$\mathrm{H}_\nu^{(1)}\left(z\mathrm{e}^{m\pi\mathrm{i}}\right) = \frac{\sin(1-m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z) - \mathrm{e}^{-\nu\pi\mathrm{i}}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z),$$

$$\mathrm{H}_\nu^{(2)}\left(z\mathrm{e}^{m\pi\mathrm{i}}\right) = \frac{\sin(1+m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}\mathrm{H}_\nu^{(2)}(z) + \mathrm{e}^{\nu\pi\mathrm{i}}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}\mathrm{H}_\nu^{(1)}(z).$$

例 17.3　电磁波在金属圆柱表面上的散射．

设平面电磁波垂直入射到一金属圆柱面上．若电磁波的频率一定，其电矢量与柱轴平行，求被柱面散射的电磁波．

解　显然应该取柱坐标系，z 轴即与柱轴重合．由于入射电磁波的电矢量平行于柱轴，因此在圆柱体表面上的感生电流也是轴向的，散射波的电矢量也是轴向的．如果用 u 代表电磁波的电矢量，则由问题的描述可知，$u = u(r, \phi, t)$ 与 z 无关．它满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\right] = 0. \tag{17.78}$$

因为频率一定，故可设

$$u(r,\phi,t) = v(r,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{17.79}$$

$v(r,\phi)$ 就满足 Helmholtz 方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} + k^2 v = 0, \tag{17.80}$$

其中波数 $k = \omega/c$ ， c 是光速．进一步将 $u(r,\phi,t)$ 以及相应的 $v(r,\phi)$ 划分为两部分，入射波部分和散射波部分，

$$v(r,\phi) = v_1(r,\phi) + v_2(r,\phi), \tag{17.81}$$

其中

$$v_1(r,\phi) = E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\phi} \tag{17.82}$$

是入射的电磁波，入射的方向取为 x 轴 (即 $\phi = 0$) 的方向； $v_2(r,\phi)$ 表示散射波．容易验证， $v_1(r,\phi)$ 满足 Helmholtz 方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_1}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial \phi^2} + k^2 v_1 = 0, \tag{17.83}$$

所以， $v_2(r,\phi)$ 也满足 Helmholtz 方程

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_2}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial \phi^2} + k^2 v_2 = 0. \tag{17.84}$$

为了求解 $v_2(r,\phi)$ ，当然还必须列出 $v_2(r,\phi)$ 所满足的边界条件．首先，它应当满足周期条件

$$v_2(r,\phi)\Big|_{\phi=0} = v_2(r,\phi)\Big|_{\phi=2\pi}, \tag{17.85a}$$

$$\frac{\partial v_2(r,\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0} = \frac{\partial v_2(r,\phi)}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}. \tag{17.85b}$$

其次，假设柱体表面是理想导体，电场强度在柱面 $r = a$ 上的切向分量为 0 ，所以

$$u(r,\phi,t)\Big|_{r=a} = 0,$$

由此可以导出

$$v_2(r,\phi)\Big|_{r=a} = -E_0 e^{ika\cos\phi}. \tag{17.86}$$

最后，无穷远条件则是： $v_2(r,\phi)$ 是向无穷远散射的柱面波，即

$$v_2(r,\phi)\Big|_{r\to\infty}\text{中只含有散射波的成分}. \tag{17.87}$$

偏微分方程 (17.84) 和边界条件 (17.85)(17.86)(17.87) 就构成了一个完整的定解问题. 按照分离变量法的标准步骤，可以写出满足方程 (17.84) 和周期条件 (17.85) 及无穷远条件 (17.87) 的一般解

$$v_2(r,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos m\phi + B_m\sin m\phi)\mathrm{H}_m^{(1)}(kr). \tag{17.88}$$

代入边界条件 (17.86)，就得到

$$\begin{aligned} v_2(r,\phi)\Big|_{r=a} &= \sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos m\phi + B_m\sin m\phi)\mathrm{H}_m^{(1)}(ka) \\ &= -E_0 e^{ika\cos\phi} \\ &= -E_0\mathrm{J}_0(ka) - 2E_0\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{i}^m\mathrm{J}_m(ka)\cos m\phi. \end{aligned}$$

上面的最后一步用到了 (17.14) 式. 比较系数，就得到

$$A_0 = -E_0\frac{\mathrm{J}_0(ka)}{\mathrm{H}_0^{(1)}(ka)}, \tag{17.89a}$$

$$A_m = -2E_0\mathrm{i}^m\frac{\mathrm{J}_m(ka)}{\mathrm{H}_m^{(1)}(ka)}, \qquad m = 1,2,3,\cdots, \tag{17.89b}$$

$$B_m = 0, \qquad m = 1,2,3,\cdots. \tag{17.89c}$$

于是，散射波电矢量的空间部分就是

$$v_2(r,\phi) = -\frac{E_0\mathrm{J}_0(ka)}{\mathrm{H}_0^{(1)}(ka)}\mathrm{H}_0^{(1)}(kr) - 2E_0\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{i}^m\frac{\mathrm{J}_m(ka)}{\mathrm{H}_m^{(1)}(ka)}\mathrm{H}_m^{(1)}(kr)\cos m\phi.$$

最后，就求得

$$\begin{aligned} u(r,\phi,t) &= E_0 e^{\mathrm{i}(kr\cos\phi-\omega t)} - \frac{E_0\mathrm{J}_0(ka)}{\mathrm{H}_0^{(1)}(ka)}\mathrm{H}_0^{(1)}(kr)e^{-\mathrm{i}\omega t} \\ &\quad -2E_0 e^{-\mathrm{i}\omega t}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{i}^m\frac{\mathrm{J}_m(ka)}{\mathrm{H}_m^{(1)}(ka)}\mathrm{H}_m^{(1)}(kr)\cos m\phi. \end{aligned} \tag{17.90}$$

17.7 虚宗量 Bessel 函数

现在讨论几类特殊的 Bessel 函数．首先是特殊宗量的 Bessel 函数．这一节先讨论 Bessel 函数的宗量为纯虚数的情形．

从原则上说来，本来似乎并不需要特别讨论这种情形，因为在 Bessel 函数乃至 Neumann 函数和 Hankel 函数的定义中，它们的宗量本来就可以是复数．但是，为了实用上的方便，对于 Bessel 函数的宗量为纯虚数的情形还是值得作一些分析讨论，并进一步定义两类虚宗量的 Bessel 函数．

现在不妨仍然从偏微分方程的定解问题出发，来引入虚宗量的 Bessel 函数．例如，假设有圆柱体内的 Laplace 方程定解问题

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{17.91a}$$

$$u\Big|_{\phi=0}=u\Big|_{\phi=2\pi},\qquad \frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=0}=\frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|_{\phi=2\pi}, \tag{17.91b}$$

$$u\Big|_{z=0}=0,\qquad u\Big|_{z=h}=0, \tag{17.91c}$$

$$u\Big|_{r=0}\text{有界},\qquad u\Big|_{r=a}=f(\phi,z). \tag{17.91d}$$

按照分离变量法的标准做法，令

$$u(r,\phi,z)=R(r)\Phi(\phi)Z(z),$$

代入方程 (17.91a) 以及边界条件 (17.91b) 和 (17.91c)，分离变量，就会得到本征值问题

$$\Phi''(\phi)+\mu\Phi(\phi)=0, \tag{17.92a}$$

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi),\qquad \Phi'(0)=\Phi'(2\pi) \tag{17.92b}$$

和

$$Z''(z)+\lambda Z(z)=0, \tag{17.93a}$$

$$Z(0)=0,\qquad Z(h)=0 \tag{17.93b}$$

以及常微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(-\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0. \tag{17.94}$$

由本征值问题 (17.92)，可以得到

本征值　　$\mu_m=m^2,\qquad m=0,1,2,3,\cdots,$ (17.95a)

本征函数　$\Phi_m(\phi)=A_m\cos m\phi+B_m\sin m\phi,$ (17.95b)

其中 A_m 和 B_m 是任意常数. 再由本征值问题 (17.93)，又可以求得

本征值　　$\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2,\qquad n=1,2,3,\cdots,$ (17.96a)

本征函数　$Z_n(z)=\sin\frac{n\pi}{h}z.$ (17.96b)

这样，常微分方程 (17.94) 就变成

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\left(-\frac{n\pi}{h}\right)^2-\frac{m^2}{r^2}\right]R=0.$$

作变换 $x=(n\pi/h)r$ 和 $y(x)=R(r)$，就可以将此方程化为

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\left(-1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0. \tag{17.97}$$

这个方程称为虚宗量 Bessel 方程，因为再作变换 $t=\mathrm{i}x$ 就可以将它化为 Bessel 方程. 于是，方程 (17.94) 的通解就是

$$R(r)=C\mathrm{J}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right)+D\mathrm{N}_m\left(\frac{\mathrm{i}n\pi}{h}r\right). \tag{17.98}$$

这里就出现了宗量为纯虚数的 Bessel 函数和 Neumann 函数.

一般说来，当 Bessel 函数的宗量为纯虚数 $x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}$(其中 x 为实数) 时，函数值也是复数.

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_\nu(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\right)^{2k+\nu}\\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu\pi/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.\end{aligned}$$

这样，便不妨定义第一类虚宗量 Bessel 函数

$$\mathrm{I}_\nu(x)\equiv\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu\pi/2}\mathrm{J}_\nu(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{17.99}$$

特别是对于整数阶的第一类虚宗量 Bessel 函数，简单地有

$$\mathrm{I}_n(x)=\mathrm{i}^{-n}\mathrm{J}_n(\mathrm{i}x). \tag{17.100}$$

这样做的目的十分明显：使得 x 和 ν 都是实数时，$\mathrm{I}_\nu(x)$ 的函数值还是实数.

同样，由于 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{I}_{-\nu}(x)$ 都是虚宗量 Bessel 方程 (17.97) 的解，而且，考虑到

$$\mathrm{I}_{-n}(x)=\mathrm{I}_n(x), \tag{17.101}$$

可以定义第二类虚宗量 Bessel 函数为

$$\mathrm{K}_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\Big[\mathrm{I}_{-\nu}(x)-\mathrm{I}_\nu(x)\Big]. \tag{17.102}$$

这种定义的好处是：当 ν 为整数 n 时，$\mathrm{K}_n(x)$ 仍然有意义，且与 $\mathrm{I}_n(x)$ 线性无关.

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_n(x)&=\lim_{\nu\to n}\mathrm{K}_\nu(x)\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-)^k\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}+(-)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{k!\,(n+k)!}\right.\\&\quad\left.\times\left[\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\psi(n+k+1)-\frac{1}{2}\psi(k+1)\right]\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\right\}.\end{aligned} \tag{17.103}$$

这里仍约定，当 $n=0$ 时，应去掉右端第一项的有限和.

练习 17.10 证明：

$$\mathrm{I}_{-n}(x)=\mathrm{I}_n(x).$$

练习 17.11 证明：

$$\mathrm{K}_\nu(z)=\begin{cases}\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\nu\pi\mathrm{i}/2}\mathrm{H}_\nu^{(1)}\left(z\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/2}\right), & -\pi<\arg z\le\pi/2;\\ -\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\nu\pi\mathrm{i}/2}\mathrm{H}_\nu^{(2)}\left(z\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}/2}\right), & -\pi/2<\arg z<\pi.\end{cases}$$

由上面给出的 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{K}_\nu(x)$ 的定义，容易写出它们在 $x\to 0$ 时的渐近行为. 特别是，如果 $\nu\ge 0$，则 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 是有界的，而 $\mathrm{K}_\nu(x)$ 是无界的. 当 $x\to\infty$ 时，它们的渐近行为又是

$$\mathrm{I}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\mathrm{e}^{x}, \tag{17.104}$$

$$\mathrm{K}_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{e}^{-x}. \tag{17.105}$$

在实用中，常常根据这些渐近行为挑选出所需要的解．例如，在上面的定解问题 (17.91) 中，由于有界条件

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}$$

的限制，在解式 (17.98) 中就一定有

$$D = 0.$$

于是，在边界条件 (17.91b)，(17.91c) 和有界条件的限制下，方程 (17.91a) 的特解就是

$$u_{mn}(r,\phi,z) = (A_{mn}\cos m\phi + B_{mn}\sin m\phi)\,\mathrm{I}_m\left(\frac{n\pi}{h}r\right)\sin\frac{n\pi}{h}z. \tag{17.106}$$

将这无穷多个特解叠加起来，得到一般解，然后再利用边界条件 (17.91d) 即可定出叠加系数．

练习 17.12 将圆柱体内的定解问题 (17.91) 改为圆柱体外的定解问题，相应地，有界条件

$$u\Big|_{r=0}\text{有界}$$

改为无穷远条件

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\phi,z) = 0,$$

重复上面的讨论．

$\mathrm{I}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{K}_\nu(x)$ 的其他性质 (例如，递推关系)，当然都可以由 $\mathrm{J}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{N}_\nu(x)$ 的相应性质导出，这里从略．

练习 17.13 导出 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 和 $\mathrm{K}_\nu(x)$ 的递推关系．

以上定义的虚宗量 Bessel 函数，纯粹是在默认 x 为实数的条件下引进的．但是，这种限制条件并不是必要的．我们完全可以把 $\mathrm{I}_\nu(x)$ 的定义 (17.99) 扩充到带有割线的复平面 $|\arg x| < \pi$ 上．相应地，$\mathrm{K}_\nu(x)$ 的定义 (17.102) 也就扩充到了同一区域中．

17.8 Kelvin 函 数

现在再介绍另一类特殊宗量的 Bessel 函数，宗量辐角为 $\pm\pi/4$ 或 $\pm 3\pi/4$ 的 Bessel 函数，称为 Kelvin 函数.

首先是零阶的情形.

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_0\left(x\mathrm{e}^{\mp\pi\mathrm{i}/4}\right) &= \mathrm{J}_0\left(x\mathrm{e}^{\pm 3\pi\mathrm{i}/4}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k)!\,(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!\,(2k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+2},\end{aligned}$$

其中 $\arg x = 0$. 于是可以定义

$$\operatorname{ber} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k)!\,(2k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k}, \tag{17.107}$$

$$\operatorname{bei} x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!\,(2k+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+2}, \tag{17.108}$$

$\operatorname{ber} x$ 和 $\operatorname{bei} x$ 均称为 Kelvin 函数. 它们最初是由 Kelvin(原名 William Thomson) 在研究某些电学问题时引进的，后来又推广到任意复数和任意阶 Bessel 函数的情形.

$$\operatorname{ber}_\nu(z) \pm \mathrm{i}\operatorname{bei}_\nu(z) = \mathrm{J}_\nu\left(z\mathrm{e}^{\pm 3\pi\mathrm{i}/4}\right), \tag{17.109}$$

$$\operatorname{ker}_\nu(z) \pm \mathrm{i}\operatorname{kei}_\nu(z) = \mathrm{e}^{\mp\nu\pi\mathrm{i}/2}\mathrm{K}_\nu\left(z\mathrm{e}^{\pm\pi\mathrm{i}/4}\right), \tag{17.110}$$

$$\operatorname{her}_\nu(z) + \mathrm{i}\operatorname{hei}_\nu(z) = \mathrm{H}_\nu^{(1)}\left(z\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}/4}\right), \tag{17.111}$$

$$\operatorname{her}_\nu(z) - \mathrm{i}\operatorname{hei}_\nu(z) = \mathrm{H}_\nu^{(1)}\left(z\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i}/4}\right). \tag{17.112}$$

显然，当 ν 为实数，且 $\arg z = 0$ 时，$\operatorname{ber}_\nu(z)$, $\operatorname{bei}_\nu(z)$, $\operatorname{ker}_\nu(z)$, $\operatorname{kei}_\nu(z)$, $\operatorname{her}_\nu(z)$ 和 $\operatorname{hei}_\nu(z)$ 都是实函数.

Kelvin 函数的性质，均可由 Bessel 函数导出，不再赘述.

17.9 半奇数阶 Bessel 函数

下面再讨论另一类特殊的 Bessel 函数：具有特殊阶数的 Bessel 函数. 本节讨论 Bessel 函数的阶为半奇数的情形.

先讨论 $\mathrm{J}_{1/2}(x)$：

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{1/2}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1/2}\\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.\end{aligned} \tag{17.113}$$

所以，$\mathrm{J}_{1/2}(x)$ 是初等函数．实际上，不只 $\mathrm{J}_{1/2}(x)$ 是初等函数，任意一个半奇数阶的 Bessel 函数都是初等函数，都是幂函数和三角函数的复合函数．这可以从递推关系来证明．

首先，我们把递推关系 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(x)] = x^{\nu}\mathrm{J}_{\nu-1}(x)$ 改写成

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)x^{\nu}\mathrm{J}_{\nu}(x) = x^{\nu-1}\mathrm{J}_{\nu-1}(x), \tag{17.114}$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n x^{1/2}\mathrm{J}_{1/2}(x) &= \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x\\ &= x^{-n+1/2}\mathrm{J}_{-n+1/2}(x).\end{aligned} \tag{17.115}$$

因此，$\mathrm{J}_{-n+1/2}(x)$ 都是初等函数．特别是，

$$\mathrm{J}_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{17.116}$$

同样，把递推关系 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(x)\right] = -x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu+1}(x)$ 改写成

$$\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)x^{-\nu}\mathrm{J}_{\nu}(x) = -x^{-(\nu+1)}\mathrm{J}_{\nu+1}(x), \tag{17.117}$$

所以

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n x^{-1/2}\mathrm{J}_{1/2}(x) &= \left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{x}\\ &= (-)^n x^{-n-1/2}\mathrm{J}_{n+1/2}(x).\end{aligned} \tag{17.118}$$

因此，$\mathrm{J}_{n+1/2}(x)$ 也都是初等函数．

事实上，在 6.5 节中，我们曾经得到过 $n+1/2$ 阶 Bessel 方程的两个线性无关解

$$y_1(x) = (-\mathrm{i})^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k(n+1/2,\ k)}{(2\mathrm{i}k)^k},$$

$$y_2(x) = \mathrm{i}^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1/2,\ k)}{(2\mathrm{i}k)^k}.$$

将它们重新组合，就可以得到 $\mathrm{J}_{\pm(n+1/2)}(x)$ 的普遍表达式

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{n+1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{[n/2]}(-)^k\frac{(n+1/2,\ 2k)}{(2x)^{2k}}\right.\\ &\left.+\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-)^k\frac{(n+1/2,\ 2k+1)}{(2x)^{2k+1}}\right],\end{aligned} \tag{17.119}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_{-(n+1/2)}(x) &= (-)^{n+1}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-)^k\frac{(n+1/2,\ 2k+1)}{(2x)^{2k+1}}\right.\\ &\left.-\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)\sum_{k=0}^{[n/2]}(-)^k\frac{(n+1/2,\ 2k)}{(2x)^{2k}}\right],\end{aligned} \tag{17.120}$$

其中

$$(n+1/2,\ 0) = 1,$$

$$(n+1/2,\ k) = \frac{1}{2^{2k}k!}\prod_{r=1}^{k}\left[(2n+1)^2-(2r-1)^2\right].$$

显然， $\mathrm{J}_{n+1/2}(x)$ 与 $\mathrm{J}_{-(n+1/2)}(x)$ 是线性无关的，

$$\begin{aligned}&W[\mathrm{J}_{n+1/2}(x),\ \mathrm{J}_{-(n+1/2)}(x)]\\ &\qquad= -\frac{2}{\pi x}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi = (-)^{n+1}\frac{2}{\pi x}.\end{aligned} \tag{17.121}$$

而 $\mathrm{N}_{n+1/2}(x)$ 与 $\mathrm{J}_{-(n+1/2)}(x)$ 线性相关，

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{n+1/2}(x) &= \frac{\cos(n+1/2)\pi\cdot\mathrm{J}_{n+1/2}(x)-\mathrm{J}_{-(n+1/2)}(x)}{\sin(n+1/2)\pi}\\ &= (-)^{n+1}\mathrm{J}_{-(n+1/2)}(x).\end{aligned} \tag{17.122}$$

练习 17.14 将下列函数在 $t=0$ 点的邻域内展开：

(1) $\frac{1}{z}\sinh\sqrt{z^2-2\mathrm{i}zt}$，规定 $\left.\sqrt{z^2-2\mathrm{i}zt}\right|_{t=0}=z$；

(2) $\frac{1}{z}\cosh\sqrt{z^2+2\mathrm{i}zt}$，规定 $\left.\sqrt{z^2+2\mathrm{i}zt}\right|_{t=0}=z$．

17.10 Airy 函数

这一节再介绍另一类特殊阶的 Bessel 函数，1/3 阶的虚宗量 Bessel 函数，称为 Airy 函数．

Airy 函数是求解常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}-zw=0 \tag{17.123}$$

时引进的．经过变量变换 $x=z^{3/2}$, $y(x)=w(z)/\sqrt{z}$，就可以把上述方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)y=0.$$

在此基础上，就可以求得方程 (17.123) 的线性无关解

$$\mathrm{Ai}(z) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{z}{3}}\,\mathrm{K}_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), \tag{17.124}$$

$$\mathrm{Bi}(z) = \sqrt{\frac{z}{3}}\left[\mathrm{I}_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)+\mathrm{I}_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right]. \tag{17.125}$$

$\mathrm{Ai}(z)$ 和 $\mathrm{Bi}(z)$ 都称为 Airy 函数．由方程 (17.123) 可以判断，它们应当在全平面都解析．

与 Airy 函数有关的是 Airy 积分

$$\int_0^{\infty}\cos(t^3\pm xt)\mathrm{d}t=3^{-1/3}\pi\mathrm{Ai}\left(\pm3^{-1/3}x\right). \tag{17.126}$$

17.11 球 Bessel 函数

我们在球坐标系下将 Helmholtz 方程 $\nabla^2u+k^2u=0$ 分离变量

$$u(r,\theta,\phi)=R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi),$$

曾经得到三个常微分方程

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right] + \left[\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right]\Theta = 0,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0.$$

在一般情况下，第一个方程和相应的周期条件构成本征值问题，可以定出

本征值 $\qquad \mu_m = m^2, \qquad m = 0, 1, 2, \cdots.$

第二个方程和相应的有界条件构成本征值问题，定出

本征值 $\qquad \lambda_l = l(l+1), \qquad l = m, m+1, m+2, \cdots.$

在这一节，讨论第三个方程的求解问题.

不必讨论 $k = 0$ 的情形，因为这时方程的求解问题在上一章已经讨论过. 它的两个线性无关解就是 r^l 和 r^{-l-1} . 这样，如果 $k \neq 0$ ，就可以作变换 $x = kr$ 和 $y(x) = R(r)$ ，将方程变为

$$\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + \left[1 - \frac{l(l+1)}{x^2}\right]y(x) = 0. \tag{17.127}$$

这个方程称为球 Bessel 方程，它的形式和 Bessel 方程非常相似. 而且，进一步分析方程的奇点，可以看到，球 Bessel 方程也有两个奇点，一个是 $x = 0$ ，正则奇点，一个是 $x = \infty$ ，非正则奇点，也和 Bessel 方程相同. 因此，可以试图将它化为 Bessel 方程. 考虑到这个方程在 $x = 0$ 点的指标方程

$$\rho(\rho - 1) + 2\rho - l(l+1) = 0,$$

因而指标为 $\rho_1 = l$ 和 $\rho_2 = -(l+1)$ ，和 Bessel 方程的指标 $\rho = \pm\nu$ 的特点 $\rho_1 + \rho_2 = 0$ 不同，故应该作变换

$$y(x) = \frac{v(x)}{\sqrt{x}}, \tag{17.128}$$

这样，可以预料， $v(x)$ 的微分方程在 $x = 0$ 点的指标就会变为

$$\rho = \pm\left(l + \frac{1}{2}\right),$$

和 Bessel 方程的特点完全一样. 容易计算，在变换 (17.128) 之下，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{2}\frac{v}{x}\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) - \frac{v}{4}\right],$$

所以， $v(x)$ 所满足的微分方程就是

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) + \left[1 - \frac{(l+1/2)^2}{x^2}\right]v = 0. \tag{17.129}$$

这正是 $l+1/2$ 阶的 Bessel 方程. 它的两个线性无关解就是 $\mathrm{J}_{l+1/2}(x)$ 和 $\mathrm{N}_{l+1/2}(x)$. 在此基础上，就可以将球 Bessel 方程 (17.127) 的线性无关解取为

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{l+1/2}(x)\\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\,\Gamma(n+l+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+l+1/2}\\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\,\Gamma(n+l+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+l}
\end{aligned} \tag{17.130}$$

和

$$\begin{aligned}
\mathrm{n}_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{N}_{l+1/2}(x) = (-)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\mathrm{J}_{-(l+1/2)}(x)\\
&= (-)^{l+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\,\Gamma(n-l+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-l-1/2}\\
&= (-)^{l+1}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!\,\Gamma(n-l+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-l-1},
\end{aligned} \tag{17.131}$$

分别称为 l 阶球 Bessel 函数和球 Neumann 函数.

前几个球 Bessel 函数和球 Neumann 函数的表达式是：

$$\mathrm{j}_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \tag{17.132a}$$

$$\mathrm{j}_1(x) = \frac{1}{x^2}\left(\sin x - x\cos x\right), \tag{17.132b}$$

$$\mathrm{j}_2(x) = \frac{1}{x^3}\Big[\big(3-x^2\big)\sin x - 3x\cos x\Big]; \tag{17.132c}$$

$$\mathrm{n}_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \tag{17.132d}$$

$$\mathrm{n}_1(x) = -\frac{1}{x^2}\big(\cos x + x\sin x\big), \tag{17.132e}$$

$$\mathrm{n}_2(x) = -\frac{1}{x^3}\Big[\big(3-x^2\big)\cos x + 3x\sin x\Big]. \tag{17.132f}$$

类似地，也还可以定义球 Hankel 函数

$$\mathrm{h}_l^{(1)}(x) = \mathrm{j}_l(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{n}_l(x), \quad \mathrm{h}_l^{(2)}(x) = \mathrm{j}_l(x) - \mathrm{i}\,\mathrm{n}_l(x). \tag{17.133}$$

练习 17.15 将下列函数在 $t=0$ 点的邻域内展开：

(1) $\frac{1}{z}\sin\sqrt{z^2+2zt}$，规定 $\sqrt{z^2+2zt}\Big|_{t=0} = z$；

(2) $\frac{1}{z}\cos\sqrt{z^2-2zt}$，规定 $\sqrt{z^2-2zt}\Big|_{t=0} = z$.

练习 17.16 当球 Bessel 方程配合上适当的边界条件也可以构成本征值问题. 试问：如果该本征值问题有解的话，其本征函数的正交权重函数是什么？

例 17.4 将函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta}$ 按 Legendre 多项式展开.

解 设

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l(kr)\mathrm{P}_l(\cos\theta),$$

则展开系数

$$c_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}krx}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^n}{n!}\int_{-1}^{1}x^n\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x.$$

利用 16.4 节的结果，就有

$$\begin{aligned} c_l(kr) &= \frac{2l+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}kr)^{l+2n}}{(l+2n)!}\int_{-1}^{1}x^{l+2n}\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2l+1}{2}\mathrm{i}^l\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(l+2n)!}(kr)^{l+2n}\cdot\frac{(l+2n)!}{2^{l+2n}\,n!}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+l+3/2)} \end{aligned}$$

$$= \frac{2l+1}{2} \mathrm{i}^l \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!\,\Gamma(n+l+3/2)} \left(\frac{kr}{2}\right)^{l+2n}$$

$$= (2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l(kr).$$

所以，最后就有展开式

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\,\mathrm{i}^l\,\mathrm{j}_l(kr)\,\mathrm{P}_l(\cos\theta). \tag{17.134}$$

也可以赋予这个展开式一个物理解释：平面波按球面波展开．这是因为，如果规定相位的时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ ，而且把 r 和 θ 理解为球坐标，则上式左端是向 $\theta=0$ (即正 z 轴) 方向传播的平面波，波数为 k ，而右端每一项中的 $\mathrm{j}_l(kr)$ 则具有球面波的相位因子，

$$\mathrm{j}_l(kr) \sim \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right). \tag{17.135}$$

*17.12 合流超几何函数

从方程的奇点数目与类型来分类， Bessel 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \left(1 - \frac{1}{z^2}\right) w = 0$$

属于具有两个奇点，其中一个 ($z=0$) 是正则奇点，另一个 ($z=\infty$) 是非正则奇点的二阶线性齐次常微分方程．作为这类微分方程的原型，有合流超几何方程

$$z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + (\gamma - z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \alpha w = 0. \tag{17.136}$$

这个方程也有两个奇点， $z=0$ 和 $z=\infty$ ；前者是正则奇点，后者是非正则奇点．合流超几何方程在正则奇点 $z=0$ 处的指标为 $\rho=0$ 和 $\rho=1-\gamma$ ，当 $\gamma\neq$ 整数时，用级数解法可以求得方程的两个线性无关解为

$$w_1(z) = \mathrm{F}(\alpha;\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)} z^n, \tag{17.137}$$

$$w_2(z) = z^{1-\gamma}\mathrm{F}(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;z). \tag{17.138}$$

其中的 $F(\alpha;\gamma;z)$ 在全平面解析，称为合流超几何函数．显然，当 $\alpha=$ 负整数时，$F(\alpha;\gamma;z)$ 退化为多项式．

有许多特殊函数能用合流超几何函数表示出来．例如，Bessel 函数

$$J_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}e^{-iz}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu F\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2iz\right), \tag{17.139}$$

虚宗量 Bessel 函数

$$I_\nu(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}e^{-z}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu F\left(\nu+\frac{1}{2};2\nu+1;2z\right), \tag{17.140}$$

Hankel 函数

$$H_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i(2\nu+1)\pi/4}W_{0,\nu}\left(2e^{-i\pi/2}z\right), \tag{17.141}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i(2\nu+1)\pi/4}W_{0,\nu}\left(2e^{i\pi/2}z\right), \tag{17.142}$$

抛物线柱函数

$$D_\nu(z)=2^{(2\nu+1)/4}z^{-1/2}W_{(2\nu+1)/4,-1/4}\left(\frac{1}{2}z^2\right), \tag{17.143}$$

不完全 Γ 函数

$$\gamma(\nu,z)=\frac{1}{\nu}z^\nu F(\nu;\nu+1;-z), \tag{17.144}$$

误差函数

$$\mathrm{erf}(z)=\frac{2z}{\sqrt{\pi}}F\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};-z^2\right), \tag{17.145}$$

Fresnel 积分

$$C(z)\pm iS(z)=zF\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};\pm\frac{i\pi}{2}z^2\right), \tag{17.146}$$

指数积分

$$\mathrm{Ei}(z)=-e^{z/2}(-z)^{-1/2}W_{-1/2,0}(-z), \qquad |\arg(-z)|<\pi, \tag{17.147}$$

对数积分

$$\mathrm{li}(z)=-(-\ln z)^{-1/2}z^{1/2}W_{-1/2,0}(-\ln z), \quad |\arg(-\ln z)|<\pi, \tag{17.148}$$

Hermite 函数

$$\mathrm{H}_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}\mathrm{F}\left(-\frac{\nu}{2};\frac{1}{2};z^2\right) - \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}z\mathrm{F}\left(\frac{1-\nu}{2};\frac{3}{2};z^2\right), \tag{17.149}$$

Hermite 多项式

$$\mathrm{H}_{2n}(z) = (-)^n\frac{(2n)!}{n!}\mathrm{F}\left(-n;\frac{1}{2};z^2\right), \tag{17.150}$$

$$\mathrm{H}_{2n+1}(z) = (-)^n\frac{(2n+1)!}{n!}2z\,\mathrm{F}\left(-n;\frac{3}{2};z^2\right), \tag{17.151}$$

Laguerre 函数

$$\mathrm{L}_\nu^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\mathrm{F}(-\nu;\mu+1;z), \tag{17.152}$$

Laguerre 多项式

$$\mathrm{L}_n(z) = \mathrm{F}(-n;1;z), \tag{17.153}$$

广义 Laguerre 多项式

$$\mathrm{L}_n^\mu(z) = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+\mu+1)}{\Gamma(\mu+1)}\mathrm{F}(-n;\mu+1;z). \tag{17.154}$$

其中的 $\mathrm{W}_{k,\mu}(z)$ 称为 Whittaker 函数,

$$\mathrm{W}_{k,\mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-k\right)}\mathrm{M}_{k,\mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-k\right)}\mathrm{M}_{k,-\mu}(z), \tag{17.155}$$

$$\mathrm{M}_{k,\pm\mu}(z)=z^{\pm\mu+1/2}\mathrm{e}^{-z/2}\mathrm{F}\left(\pm\mu-k+\frac{1}{2};\pm 2\mu+1;z\right). \tag{17.156}$$

关于上面这些特殊函数的定义，特别是有关单值分枝的规定，均请见有关专著，例如，参考书目 [12, 13] 两书．但要注意，不同书中的定义可能有所不同．

合流超几何方程可以通过超几何方程的两个正则奇点合流而

得到．将超几何方程 (16.140) 中的自变量 z 换成 z/b，有

$$z\left(1-\frac{z}{b}\right)\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+\left[\gamma-(\alpha+\beta+1)\frac{z}{b}\right]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\frac{\beta}{b}w=0,$$

这个方程的奇点当然就是 $0, b$ 和 ∞．令 $b=\beta\to\infty$，就得到合流超几何方程．

附录　涉及 Bessel 函数的常微分方程

在实际问题中，常有许多常微分方程的解可以用 Bessel 函数表示出来．上面的虚宗量 Bessel 方程 (17.97)、方程 (17.123) 和球 Bessel 方程 (17.127) 只不过是其中的几个特例．下面再列出一部分方程以及它们的解，其中的 C_ν 可代表任何一种柱函数．在引用这些结果时，如果出现多值函数，注意必须遵守有关单值分枝的规定．

1. $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\left[\left(\beta\gamma x^{\gamma-1}\right)^2-\frac{\nu\gamma^2}{x^2}\right]u=0,\qquad u=C_\nu(\beta x^\gamma).$$

2. $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+4\left(x^2-\frac{\nu^2}{x^2}\right)u=0,\qquad u=C_\nu\left(x^2\right).$$

3. $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{4x}\left(1-\frac{\nu^2}{x}\right)u=0,\qquad u=C_\nu\left(\sqrt{x}\right).$$

4. $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\left(1+\frac{\nu^2}{x^2}\right)u=0,\qquad u=C_\nu(\mathrm{i}x).$$

5. $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\left(\frac{1}{x}+\frac{\nu^2}{4x^2}\right)u=0,\qquad u=C_\nu\left(2\mathrm{i}\sqrt{x}\right).$$

6. $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2\alpha-2\beta\nu+1}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\left[\left(\beta\gamma x^{\beta-1}\right)^2+\frac{\alpha(\alpha-2\beta\nu)}{x^2}\right]u=0,\qquad u=x^{\beta\nu-\alpha}C_\nu\left(\gamma x^\beta\right).$$

7. $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1-2\alpha}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\left[\left(\beta\gamma x^{\gamma-1}\right)^2+\frac{\alpha^2-\nu^2\gamma^2}{x^2}\right]u=0,\qquad u=x^\alpha C_\nu(\beta x^\gamma).$$

8. $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1-2\alpha}{x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\left(\beta^2+\frac{\alpha^2-\nu^2}{x^2}\right)u=0,\qquad u=x^\alpha C_\nu(\beta x).$$

9. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{1-2\nu}{x}\dfrac{du}{dx} + \beta^2 u = 0, \qquad u = x^\nu C_\nu(\beta x).$

10. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{1-\nu}{x}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{4x}u = 0, \qquad u = x^{\nu/2} C_\nu\left(\sqrt{x}\right).$

11. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{1-\nu}{x}\dfrac{du}{dx} - \dfrac{1}{4x}u = 0, \qquad u = x^{\nu/2} C_\nu\left(\mathrm{i}\sqrt{x}\right).$

12. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left[\left(\beta\gamma x^{\gamma-1}\right)^2 - \dfrac{4\nu^2\gamma^2-1}{4x^2}\right]u = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_\nu(\beta x^\gamma).$

13. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(\beta^2 - \dfrac{4\nu^2-1}{4x^2}\right)u = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_\nu(\beta x).$

14. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \beta x^\alpha u = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_{1/(\alpha+2)}\left(\dfrac{2\sqrt{\beta}}{\alpha+2}x^{(\alpha+2)/2}\right).$

15. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(\beta\gamma x^{\beta-1}\right)^2 u = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_{1/(2\beta)}\left(\gamma x^\beta\right).$

16. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(\dfrac{\beta^2}{4x} - \dfrac{\nu^2-1}{4x^2}\right)u = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_\nu\left(\beta\sqrt{x}\right).$

17. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(\beta^2 e^{2x} - \nu^2\right)u = 0, \qquad u = C_\nu(\beta e^x).$

18. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{e^{2/x} - \nu^2}{x^4}u = 0, \qquad u = xC_\nu\left(e^{1/x}\right).$

19. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(\dfrac{1}{x} - 2\tan x\right)\dfrac{du}{dx} - \left(\dfrac{\nu^2}{x^2} + \dfrac{\tan x}{x}\right)u = 0, \quad u = \sec x\; C_\nu(x).$

20. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(\dfrac{1}{x} + 2\cot x\right)\dfrac{du}{dx} - \left(\dfrac{\nu^2}{x^2} - \dfrac{\cot x}{x}\right)u = 0, \quad u = \csc x\; C_\nu(x).$

21. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{du}{dx} + \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{4} - \nu^2\right)u = 0, \qquad u = \sqrt{x}e^{-x/2}C_\nu(\mathrm{i}x/2).$

22. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(\dfrac{2\nu+1}{x} - k\right)\dfrac{du}{dx} - \dfrac{2\nu+1}{2x}ku = 0,$

$$u = x^{-\nu}e^{kx/2}C_\nu(\mathrm{i}kx/2).$$

23. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{u}{\sqrt{x}} = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_{2/3}\left(\dfrac{4}{3}x^{3/4}\right).$

24. $\dfrac{d^2u}{dx^2} - \dfrac{u}{\sqrt{x}} = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_{2/3}\left(\dfrac{4\mathrm{i}}{3}x^{3/4}\right).$

25. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + xu = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_{1/3}\left(\dfrac{2}{3}x^{3/2}\right).$

26. $\dfrac{d^2u}{dx^2} - xu = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_{1/3}\left(\dfrac{2i}{3}x^{3/2}\right).$

27. $\dfrac{d^2u}{dx^2} - \left[k^2 + \dfrac{\nu(\nu+1)}{x^2}\right]u = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_{\nu+1/2}(ikx).$

28. $\dfrac{d^2u}{dx^2} - \dfrac{2\nu}{x}\dfrac{du}{dx} - k^2u = 0, \qquad u = x^{\nu+1/2}C_{\nu+1/2}(ikx).$

29. $\dfrac{d^2u}{dx^2} - k^2x^{2\nu-2}u = 0, \qquad u = \sqrt{x}C_{1/(2\nu)}(ikx^\nu/\nu).$

30. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{du}{dx} + \left(i - \dfrac{\nu^2}{x^2}\right)u = 0, \qquad u = C_\nu\left(e^{i\pi/4}x\right).$

31. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(\dfrac{1}{x} - 2i\right)\dfrac{du}{dx} - \left(\dfrac{\nu^2}{x^2} + \dfrac{i}{x}\right)u = 0, \qquad u = e^{ix}C_\nu(x).$

32. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(\dfrac{1}{x} + 2i\right)\dfrac{du}{dx} - \left(\dfrac{\nu^2}{x^2} - \dfrac{i}{x}\right)u = 0, \qquad u = e^{-ix}C_\nu(x).$

33. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{1}{x}\dfrac{du}{dx} + k^2e^{i\alpha}u = 0, \qquad u = C_0\left(kxe^{i\alpha/2}\right).$

34. $\dfrac{d^2u}{dx^2} + \left(k^2e^{i\alpha} + \dfrac{1}{4x^2}\right)u = 0, \qquad u = \sqrt{x}\,C_0\left(kxe^{i\alpha/2}\right).$

35. $$\dfrac{d^2u}{dx^2} + \dfrac{x^2 - 3\nu^2}{x^2 - \nu^2}\dfrac{1}{x}\dfrac{du}{dx} + \left[\left(x^2 - \nu^2\right) - \dfrac{x^2 + \nu^2}{x^2 - \nu^2}\right]\dfrac{1}{x^2}u = 0, \qquad u = C'_\nu(x).$$

36. $$\dfrac{d^2u}{dx^2} - \left[\dfrac{g''(x)}{g'(x)} + (2\nu - 1)\dfrac{g'(x)}{g(x)} + 2\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]\dfrac{du}{dx} + \left\{\left[\dfrac{g''(x)}{g'(x)} + (2\nu - 1)\dfrac{g'(x)}{g(x)} + 2\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]\dfrac{f'(x)}{f(x)} - \dfrac{f''(x)}{f(x)} + [g'(x)]^2\right\}u = 0, \qquad u = f(x)\,[g(x)]^\nu\,C_\nu\,(g(x)).$$

37. $$\dfrac{d^2u}{dx^2} - \dfrac{f'(x)}{f(x)}\dfrac{du}{dx} + \left\{\dfrac{3}{4}\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]^2 - \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(x)}{f(x)} - \dfrac{3}{4}\left[\dfrac{g''(x)}{g'(x)}\right]^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{g'''(x)}{g'(x)} + \left[g^2(x) - \nu^2 + \dfrac{1}{4}\right]\left[\dfrac{g'(x)}{g(x)}\right]^2\right\}u = 0,$$

$$u = \sqrt{\dfrac{f(x)g(x)}{g'(x)}}C_\nu\,(g(x)).$$

38. $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\left\{\frac{1}{2}\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{4}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2+\left[f^2(x)-\nu^2+\frac{1}{4}\right]\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2\right\}u=0,\qquad u=\sqrt{\frac{f(x)}{f'(x)}}C_\nu\left(f(x)\right).$$

39. $$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}+(2\mu-1)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\left[\mu^2-\nu^2+f^2(x)\right]\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]^2u=0,\qquad u=[f(x)]^\mu C_\nu\left(f(x)\right).$$

还有一些三阶、四阶，乃至更高阶的常微分方程，它们的解也涉及 Bessel 函数.

1. $$\theta^4u-2\left(\nu^2+\mu^2\right)\theta^2u+\left[4x^2(\theta+1)(\theta+2)+\left(\nu^2-\mu^2\right)^2\right]u=0,\qquad u=C_\nu(x)D_\mu(x).$$

2. $$\theta\left(\theta^2-4\nu^2\right)u+4x^2(\theta+1)u=0,\qquad u=C_\nu(x)D_\nu(x).$$

3. $$\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}+\left(4-\frac{4\nu^2-1}{x^3}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{4\nu^2-1}{x^3}u=0,\qquad u=xC_\nu(x)D_\nu(x).$$

其中 $\theta\equiv x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ，而 $C_\nu(x)$ 和 $D_\mu(x)$ 分别代表 ν 和 μ 阶的任意柱函数. 又如，方程

$$\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}x^4}+\frac{2}{x}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}-\frac{2\nu^2+1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{2\nu^2+1}{x^3}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\left[\frac{\nu^2\left(\nu^2-4\right)}{x^4}-1\right]u=0$$

的通解便是

$$u=A\mathrm{J}_\nu(x)+B\mathrm{N}_\nu(x)+C\mathrm{I}_\nu(x)+D\mathrm{K}_\nu(x).$$

甚至，更一般地，方程

$$u^{(2n)}-\frac{(-)^n\beta^{2n}}{x^n}u=0$$

的 $2n$ 个特解也都可以用柱函数表示，

$$x^{n/2}C_n\left(2\beta\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi/n}\sqrt{x}\right),\quad k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

第十八章　分离变量法总结

到现在为止，我们已经处理了几种典型的偏微分方程定解问题，介绍了求解这些定解问题的一种有效方法，分离变量法．这种方法，当然有一定的适用条件，例如，要求方程和定解条件都是线性的，因此定解问题的解具有叠加性．在第十四章中，我们曾经结合具体的求解过程，分析了这种解法对于定解问题的要求．特别是，曾经指出 (见 14.1 节) 这种方法是否能够普遍地应用于求解偏微分方程定解问题，在理论上，取决于下列几个问题：

1. 本征值问题是否一定有解，换句话说，在什么条件下，本征值问题一定有解；

2. 定解问题的解是否一定可以按照某一组本征函数展开，换句话说，在什么条件下，本征函数是完备的；

3. 本征函数是否一定具有正交性．

在这一章中，我们就要从理论上回答这几个问题，从而为分离变量法奠定一个坚实的理论基础．当然，严格说来，这里介绍的也只是充分条件．在一般物理问题中，这些条件是能够满足的．

为此，我们从自伴算符的本征值问题入手，开始本章的讨论．由于我们所关心的这种特定背景，所以这里讨论的算符实际上只是微分算符，并且主要是二阶常微分算符．而在讨论自伴算符的本征值问题之前，先要建立内积空间和函数空间的概念．

18.1　内 积 空 间

设在数域 K 上定义了 n 维矢量空间 V，它的元素 (矢量) 用 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$ 表示．我们可以把三维矢量空间中矢量的长度的概念推广

到 n 维矢量空间. 为此，先定义 n 维矢量的内积.

对于实 n 维矢量空间 (即 K 为实数域)，在选定了一组基 $\{\boldsymbol{e}_i, i=1, 2, \cdots, n\}$ 之后，空间中的任意一个矢量 $\boldsymbol{x}$ 都可以用它在这一组基上的投影 (坐标) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示，

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i.$$

对于空间中的矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$，最常见的内积定义为

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i. \tag{18.1}$$

这是一个实数. 显然有

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \quad 和 \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0,$$

并且，当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时，才有 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$. 在此基础上，就可以定义矢量 $\boldsymbol{x}$ 的长度 $\|\boldsymbol{x}\|$

$$\|\boldsymbol{x}\| = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})^{1/2}. \tag{18.2}$$

对于复 n 维矢量空间，如果仍保留内积定义 (18.1)，容易看出，这时的矢量长度 (18.2) 就可能不是实数. 为了保持矢量长度仍是实数，不妨在保持长度定义 (18.2) 的前提下，把内积定义修改为

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1^*y_1 + x_2^*y_2 + \cdots + x_n^*y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i^*y_i, \tag{18.3}$$

其中 x_i^* 是 x_i 的复共轭. 显然，在复矢量空间中，

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})^*.$$

这样的内积概念显然是三维矢量的标积的简单推广. 但这样的推广不能用作为矢量内积的最一般的定义，因为它具有明显的缺陷：这样的内积概念还不够普遍和抽象，特别是矢量的内积明显依赖于基的选取. 不排除可能出现这样的情形：在给定的矢量空间中，选取不同的基，矢量的坐标随之改变，因而两个矢量的内积的数值也随之改变. 很容易举出这样的例子. 例如，在下面这两组基

$$
\begin{aligned}
&e_1=(1,0,0,\cdots,0), && e_1'=(1,1,1,\cdots,1),\\
&e_2=(0,1,0,\cdots,0), \quad \text{和} && e_2'=(0,1,1,\cdots,1),\\
&\vdots && \vdots\\
&e_n=(0,0,0,\cdots,1) && e_n'=(0,0,0,\cdots,1)
\end{aligned}
$$

之下，同样两个矢量的内积值就会不同．内积定义的这种缺陷，当然就限制了它在物理学中的应用价值．

为了克服上面指出的这种缺陷，我们当然需要从内积的各种可能定义中抽象出它的最本质的要素．下面就给出一个公理化的内积定义 (以后就称为内积公理)．

定义 18.1 (定义在实数或复数域 K 上的) 矢量空间中矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是它们的标量值函数，满足：

1. $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})^*$ ；

2. $(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=\alpha^*(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+\beta^*(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ ，其中 α 和 β 是数域 K 上的标量；

3. 对于任何 $\boldsymbol{x}$ ，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0$ ；当且仅当 $\boldsymbol{x}=0$ 时，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0$ ．

这样定义的内积，显然包含了上面的 (18.1) 和 (18.3) 作为它的特殊形式．下面再举两个内积的例子．

例 18.1 若

$$
\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}
$$

是实数域上的列矢量， $\boldsymbol{P}$ 为 (给定的) 对角矩阵，对角元 P_{ii} 均为正实数，则可定义矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 的内积为

$$
(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix}x_1, & x_2, & \cdots, & x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & P_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & P_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}.
$$

读者可以验证，它符合上面的内积公理.

例 18.2 实变量 t 的所有复系数的多项式的集合，在多项式加法以及多项式和复数的乘法下构成一个复矢量空间. 不妨假设 $0 \le t \le 1$. 若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是此矢量空间中的两个矢量 (多项式)，则它们的内积可以定义为

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = \int_0^1 x^*(t)\, y(t)\, \rho(x)\, \mathrm{d}t,$$

其中 $\rho(x) \ge 0$ 且 $\not\equiv 0$. 它的特殊情形是 $\rho(x) \equiv 1$ ，

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = \int_0^1 x^*(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

根据内积公理中的第 1 条要求，可以看出，不论是实的或复的矢量空间，一个矢量和它自身的内积总是实数，这样第 3 条要求中的不等式才有意义. 在此基础上，我们就把

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})^{1/2} = \|\boldsymbol{x}\| \tag{18.4}$$

称为矢量 $\boldsymbol{x}$ 的模 (即矢量 x 的"长度") . 从上面内积公理中的第 1 和第 2 条要求，可得

$$(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}). \tag{18.5}$$

因此

$$\|\alpha \boldsymbol{x}\| = (\alpha \boldsymbol{x},\, \alpha \boldsymbol{x})^{1/2} = \Big[\alpha\alpha^*(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})\Big]^{1/2} = |\alpha|\, \|\boldsymbol{x}\|. \tag{18.6}$$

任何一个非零矢量除以它的模就成为"单位长度"的矢量，或称为归一化的矢量，

$$\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|},\, \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right) = 1.$$

定义了内积的矢量空间称为内积空间. 具有内积的实矢量空间称为欧氏 (欧几里德) 空间 (Euclidean space) ；具有内积的复矢量空间称为酉空间 (unitary space) .

在建立了内积定义后，就可以引入矢量正交的概念.

当且仅当 $(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = 0$ 时，两矢量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 正交.

显然，零矢量和任何矢量都正交.

任何一组线性无关的矢量，都可以通过标准步骤使之两两正交. 例如，把这组线性无关的矢量记为 $\{\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \cdots\}$，可以作线性组合

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{y}_1, \\ \boldsymbol{x}_2 &= \boldsymbol{y}_2 + \alpha_{21}\boldsymbol{x}_1, \\ \boldsymbol{x}_3 &= \boldsymbol{y}_3 + \alpha_{31}\boldsymbol{x}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{x}_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

要求它们是两两正交的：

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_2 + \alpha_{21}\boldsymbol{x}_1) \\ &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_2) + \alpha_{21}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = 0, \\ (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_3 + \alpha_{31}\boldsymbol{x}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{x}_2) \\ &= (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_3) + \alpha_{31}(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) = 0, \\ (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) &= (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_3 + \alpha_{31}\boldsymbol{x}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{x}_2) \\ &= (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_3) + \alpha_{32}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

所以

$$\alpha_{21} = -\frac{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_2)}{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1)}, \quad \alpha_{31} = -\frac{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_3)}{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1)}, \quad \alpha_{32} = -\frac{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_3)}{(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2)}.$$

更普遍的结果是

$$\alpha_{jk} = -\frac{(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_j)}{(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_k)}.$$

这样的步骤称为 Schmidt 正交化.

定义 18.2 若对于所有的 i 和 j，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \delta_{ij}$，则称矢量组 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots\}$ 是正交归一的.

正交归一的矢量一定是线性无关的，这是因为如果将它们线性组合成零矢量，

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3 + \cdots = \boldsymbol{0},$$

则一定有

$$\alpha_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \cdots.$$

所以 n 维矢量空间中的任何一组 n 个正交归一矢量都可以构成此空间的基，称为正交归一基 (或称正交标准基)．选择正交归一基，无论在理论上或实用上，都具有极大的重要性．

在 n 维矢量空间 V 中，设有一组正交归一矢量

$$\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}, \quad k \le n.$$

则对于任意一个矢量 $\boldsymbol{x} \in V$ ，可求得 $\alpha_i = (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})$．显然，应当有

$$\left\|\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i\right\|^2 \equiv \left(\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i\right) \ge 0.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i\right) \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^*(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_i) + \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i^* \alpha_j (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \alpha_i - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \alpha_i^* + \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_i^* \alpha_j \delta_{ij} \\
&= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i^* \alpha_i,
\end{aligned}$$

于是，得到一个重要的不等式

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \ge \sum_{i=1}^{k} \left|(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})\right|^2, \tag{18.7}$$

即

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 \ge \sum_{i=1}^{k} \left|(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})\right|^2, \tag{18.8}$$

这个不等式称为 Bessel 不等式．

练习 18.1 证明：

$$\left(\boldsymbol{x} - \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}_j\right) = 0,$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k\}$ 的意义与 Bessel 不等式中的相同.

Bessel 不等式的一个重要推论就是 Schwarz 不等式：若 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 是内积空间中的两个矢量，则

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|. \tag{18.9}$$

如果 $\boldsymbol{y}$ 是零矢量，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$，上式中的等号成立. 如果 $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$，则可在 Bessel 不等式中的 k 取为 1，且 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{y}/\|\boldsymbol{y}\|$，于是就有

$$\left|\left(\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}\right)\right|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2,$$

由此即可证得 (18.9) 式.

定义 18.3 在有限维矢量空间中，如果一组正交归一的矢量 (称为一个正交归一矢量集)，并不包含在另一个更大的正交归一矢量集之中，则称该正交归一矢量集是完备的.

在有限维的矢量空间中，一个完备的正交归一矢量集中矢量的个数必然与空间的维数相同. 但在实际问题中，往往是并不是先知道矢量空间的维数，反而是要通过找出一组完备的正交归一矢量 (这是一组特殊的最大线性无关矢量组) 来判断空间的维数，而建立这个矢量空间的一组基. 因此，在一个内积空间 V 中，有一组正交归一的矢量 $\{\boldsymbol{x}_i, i = 1, 2, \cdots, k\}$，要判断它是否完备，是一个非常现实的问题. 常用的判别法有下列几个：

1. 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时，$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}) = 0, i = 1, 2, \cdots, k$.
2. 对于任意的 $\boldsymbol{x} \in V$，恒有 $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})\boldsymbol{x}_i$.
3. Bessel 不等式中的等号成立，即对于任意的 $\boldsymbol{x} \in V$，恒有
$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x})|^2.$$
4. Parseval 方程成立，即对于任意的 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$，恒有
$$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i)(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}).$$

它们都是正交归一矢量组完备的充分必要条件，因而也是完全等价的. 有关证明可以在线性代数的教材中找到. 这里从略.

18.2 函 数 空 间

函数空间是一类特殊的矢量空间：空间的元素是函数，更确切地说，是定义在一定区间 (为确定起见，设为闭区间 $a \le x \le b$) 上的复值函数 $f(x)$，并且积分 $\int_a^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x$ 存在 (“函数 $f(x)$ 平方可积”). 定义元素 f_1 和 f_2 的加法 $f_1 + f_2$ 就是两函数相加，

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

元素 f 和复数 α 的数乘 αf 是

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

可以证明，这样的平方可积函数的集合，对于加法和数乘是封闭的，因此的确构成一个矢量空间. 特别是，两个平方可积函数之和仍是平方可积的，这是因为

$$\left|f_1(x) + f_2(x)\right|^2 + \left|f_1(x) - f_2(x)\right|^2 = 2\left[|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2\right],$$

所以

$$\left|f_1(x) + f_2(x)\right|^2 \le 2\left[|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2\right].$$

现在来定义函数空间中的内积.

定义 18.4 设 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 是函数空间中的两个函数，它们的内积是

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^*(x) f_2(x) \mathrm{d}x. \tag{18.10}$$

由于

$$\left|f_1(x)\right|^2 + \left|f_2(x)\right|^2 - 2\left|f_1(x)\right| \cdot \left|f_2(x)\right| = \left[|f_1(x)| - |f_2(x)|\right]^2 \ge 0,$$

因此

$$\left|f_1^*(x) f_2(x)\right| = \left|f_1(x)\right| \cdot \left|f_2(x)\right| \le \frac{1}{2}\left[|f_1(x)|^2 + |f_2(x)|^2\right],$$

所以，积分 $\int_a^b \left|f_1^*(x)f_2(x)\right|\mathrm{d}x$ 存在. 又因为

$$\left|\int_a^b f_1^*(x)f_2(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b \left|f_1^*(x)f_2(x)\right|\mathrm{d}x,$$

所以，只要 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 平方可积，那么它们的内积也一定存在.

回顾一下内积公理中的三条要求，前两条是显然满足的. 而且，对于空间中的任意函数 $f(x)$，恒有 $(f, f) \ge 0$. 在此基础上，可以定义函数 $f(x)$ 的“长度”

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}, \tag{18.11}$$

称为函数 $f(x)$ 的范数. 现在的问题是：在这样的内积定义下，如果 $(f, f) = 0$，$f(x)$ 并不见得在整个区间上处处为 0. 明显的事实是，$f(x)$ 可以在有限个点上不为 0，但这些不为 0 的函数值并不会影响积分值，所以仍可以有 $(f, f) = 0$. 准确地说，如果 $(f, f) = 0$，则 $f(x)$ 只能在测度为零的点集上取非零值. 所以我们说 $(f, f) = 0$ 隐含着 $f(x)$ 几乎处处为 0. 如果我们把任何几乎处处为 0 的函数称为零函数，那么，在这种广义的零函数的意义下，这里定义的内积也就符合内积公理中的第 3 条要求. 这样，定义 18.4 给出的函数内积的定义的确符合内积公理的要求.

在定义了函数的内积之后，就可以定义函数的正交性与归一性，并建立函数的正交归一集合的概念.

若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

$$(f, g) \equiv \int_a^b f^*(x)g(x)\mathrm{d}x = 0, \tag{18.12}$$

则称它们是 (在区间 $[a, b]$ 上) 正交的. 若函数 $f(x)$ 和它自身的内积

$$(f, f) \equiv \int_a^b f^*(x)f(x)\mathrm{d}x = 1, \quad 亦即 \quad \|f\| = 1, \tag{18.13}$$

则称 $f(x)$ 是归一化的. 而若对于函数集合 $\{f_i\}$，恒有

$$(f_i, f_j) \equiv \int_a^b f_i^*(x)f_j(x)\mathrm{d}x = \delta_{ij}, \tag{18.14}$$

则称此函数集合是正交归一的.

例 18.3　函数集合 $\left\{e^{inx}/\sqrt{2\pi},\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$ 在区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上是正交归一的. 它的证明留给读者完成.

再介绍正交归一函数集的完备性概念. 它是和任意函数是否可以按该函数集展开相联系的. 如果对于 (函数空间中的) 任意函数 $f(x)$，总可以表示成正交归一函数集 $\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$ 的线性组合

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x), \tag{18.15}$$

则称正交归一函数集 $\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$ 是完备的.

这里我们看到，第一，一般说来，这个函数集应该含有无穷多个函数，否则 (18.15) 式不可能对任意 $f(x)$ 均成立. 这一事实告诉我们，函数空间是无穷维的矢量空间. 第二，(18.15) 式应该对区间 $[a,\ b]$ 内的每一点 x 都成立，或者说，对于区间 $[a,\ b]$ 内的每一点 x，级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x)$ 都应该收敛于 $f(x)$. 这种收敛性称为逐点收敛. 但是，为了和广义零函数的概念相适应，也可以把 (18.15) 式理解为左右两端相差一个广义的零函数，换句话说，把级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i f_i(x)$ 理解为平均收敛于 $f(x)$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(x)\right|^2\mathrm{d}x=0. \tag{18.16}$$

第三，由函数集 $\{f_i,\ i=1,2,\cdots\}$ 的正交归一性，可求得展开系数

$$c_i=\int_a^b f_i^*(x)f(x)\mathrm{d}x=(f_i,\ f). \tag{18.17}$$

第四，容易证明

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n}c_i f_i(x)\right|^2\mathrm{d}x\\
&=(f,\ f)-\sum_{i=1}^{n}c_i^*(f_i,\ f)-\sum_{i=1}^{n}c_i(f,\ f_i)+\sum_{i=1}^{n}\left|c_i\right|^2\\
&=(f,\ f)-\sum_{i=1}^{n}\left|c_i\right|^2,
\end{aligned}$$

因此，只要函数集 $\{f_i, i=1,2,\cdots\}$ 是完备的，那么，根据 (18.16) 式，就有

$$(f, f)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|c_n\right|^2=\sum_{i=1}^{\infty}\left|(f_i, f)\right|^2. \tag{18.18}$$

这就是函数集 $\{f_i, i=1,2,\cdots\}$ 的完备性关系，亦称 Parseval 方程.

函数集 $\{f_i, i=1,2,\cdots\}$ 的完备性还有另一种表达形式，这可以从 (18.15) 和 (18.17) 式推得. 将 (18.17) 式代入 (18.15) 式，就有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b f(x')f_i(x)f_i^*(x')\mathrm{d}x' \\ &= \int_a^b f(x')\left[\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)f_i^*(x')\right]\mathrm{d}x'. \end{aligned}$$

这个结果对于 (取定函数空间中的) 任意函数 $f(x)$ 均成立，所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)f_i^*(x')=\delta(x-x'). \tag{18.19}$$

在此基础上，又可以得到

$$(f, g)=\sum_{i=1}^{\infty}(f, f_i)(f_i, g). \tag{18.20}$$

现在把函数集 $\{f_i, i=1,2,\cdots\}$ 的条件放宽，假设此函数集是正交归一的，但不一定完备，当然仍可以试图用这个函数集的线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_if_i(x)$ 来逼近 $f(x)$. 现在的问题是：如何选择组合系数 a_i(与 n 无关)，可以得到最佳逼近，使误差

$$\left\|f(x)-\sum_{i=1}^{n}a_if_i(x)\right\|^2\equiv\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n}a_if_i(x)\right|^2\mathrm{d}x \tag{18.21}$$

取极小？仿照 (18.18) 式的证明，可以求得

$$\begin{aligned} &\int_a^b\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n}a_if_i(x)\right|^2\mathrm{d}x \\ &\quad=(f, f)-\sum_{i=1}^{n}a_i^*(f_i, f)-\sum_{i=1}^{n}a_i(f, f_i)+\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right|^2 \end{aligned}$$

$$= (f, f) - \sum_{i=1}^{n} a_i^* c_i - \sum_{i=1}^{n} a_i c_i^* + \sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i$$

$$= (f, f) + \sum_{i=1}^{n} \left|a_i - c_i\right|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^* c_i,$$

因此，当 $a_i = c_i \equiv (f_i, f)$ 时，误差一定取极小值，

$$(f, f) - \sum_{i=1}^{n} \left|c_i\right|^2 \geq 0,$$

而且，随着项数 n 的增加，误差越来越小. 但无论如何，总有

$$(f, f) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \left|c_i\right|^2. \tag{18.22}$$

这正好是函数空间中的 Bessel 不等式. 等号对应于函数集是完备的情形.

练习 18.2 证明函数空间中的 Schwarz 不等式

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

还要介绍一下函数空间的完备性概念. 如果由空间内的函数组成的 Cauchy 序列的极限仍保持在该空间内，则称该空间为完备的. 可以证明，平方可积函数构成的空间是完备的.

通常，把完备的内积空间称为 Hilbert 空间. 这个概念，在物理学中有广泛的应用. 下面的讨论，实际上都是在 Hilbert 空间的范围内进行的.

最后，还需要指出，函数内积的定义还可以推广为

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1^*(x)\, f_2(x)\, \rho(x)\, \mathrm{d}x, \tag{18.23}$$

其中 $\rho(x) \geq 0$ 且 $\neq 0$. 这样，本节中的有关公式均需要作相应的修改. 特别是，关于函数平方可积的要求也应该修改为要求积分

$$\int_a^b \left|f(x)\right|^2 \rho(x)\, \mathrm{d}x$$

存在.

18.3 自伴算符的本征值问题

定义 18.5 设 $\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 为定义在一定函数空间内的 (微分) 算符，若对于该函数空间内的任意两个函数 u 和 v，恒有

$$(v, \boldsymbol{L}u) = (\boldsymbol{M}v, u) \quad 即 \quad \int_a^b v^* \boldsymbol{L}u\mathrm{d}x = \int_a^b (\boldsymbol{M}v)^* u\mathrm{d}x, \tag{18.24}$$

则称 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的伴算符.

例 18.4 若 $\boldsymbol{L}$ 为微分算符 $\boldsymbol{L} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，于是

$$\int_a^b v^* \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = v^* u\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x} u\mathrm{d}x.$$

所以，当 u 和 v 都满足边界条件

$$y(a) = y(b)$$

时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 的伴算符是 $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

更准确地说，定义 18.5 中的算符 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 是互为伴算符，这是因为，如果 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的伴算符，则对于任意函数 u 和 v，也有

$$\begin{aligned}\int_a^b v^* \boldsymbol{M}u\mathrm{d}x &= \left[\int_a^b (\boldsymbol{M}u)^* v\mathrm{d}x\right]^* \\ &= \left[\int_a^b u^* \boldsymbol{L}v\mathrm{d}x\right]^* = \int_a^b (\boldsymbol{L}v)^* u\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以，$\boldsymbol{L}$ 也是 $\boldsymbol{M}$ 的伴算符.

例 18.5 再设 $\boldsymbol{L}$ 为微分算符 $\boldsymbol{L} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$，容易证明

$$\int_a^b v^* \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = \Big[v^* u' - (v^*)' u\Big]_a^b + \int_a^b \left(\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\right)^* u\mathrm{d}x.$$

所以，当函数 u 和 v 都满足一、二、三类边界条件

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \qquad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

(其中 $|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 \neq 0, |\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 \neq 0$) 或周期条件

$$y(a) = y(b), \qquad y'(a) = y'(b)$$

时，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ 的伴算符就是它自身.

定义 18.6 若算符 $\boldsymbol{L}$ 的伴算符就是它自身，即对于该函数空间内的任意两个函数 u 和 v，恒有

$$(v,\ \boldsymbol{L}u)=(\boldsymbol{L}v,\ u) \quad 即 \quad \int_a^b v^*\boldsymbol{L}u\mathrm{d}x=\int_a^b(\boldsymbol{L}v)^*u\mathrm{d}x, \tag{18.25}$$

则称 $\boldsymbol{L}$ 是自伴算符.

例 18.6 在和例 18.4 完全相同的条件下，算符 $\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 就是自伴算符. 这是因为

$$\int_a^b v^*\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x=-\mathrm{i}\int_a^b\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}u\mathrm{d}x=\int_a^b\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^*u\mathrm{d}x.$$

容易理解，我们所讨论的算符的自伴性，总是和一定的函数空间联系在一起的. 通常，我们总是要求函数定义在给定的区间上，要求函数具有足够的连续性 (例如，对于二阶微分算符，就要求函数的二阶导数连续，至少分段连续；如果是无界区间，则要求函数平方可积)，因此，实际上总是限于 Hilbert 空间. 并且，还要求函数满足一定的边界条件，即总是局限在 Hilbert 空间中的一定子空间内. 这里，绝不能脱离边界条件的约束来讨论算符的自伴性. 一个算符，相对于某一类函数是自伴的，但对于另一类函数，就可能不是自伴的. 这里仍以例 18.6 中的算符为例作进一步的讨论.

例 18.7 设 $\boldsymbol{L}=\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，而将函数类的边界条件取成更一般的形式

$$y(b)=\alpha y(a), \qquad \alpha 为 (复) 常数.$$

于是

$$\begin{aligned}\int_a^b v^*\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x &=\mathrm{i}v^*u\Big|_a^b-\mathrm{i}\int_a^b\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}x}u\,\mathrm{d}x\\ &=\mathrm{i}(\alpha\alpha^*-1)u(a)v^*(a)+\int_a^b\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^*u\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

所以只有边界条件中的 α 满足 $\alpha\alpha^*=1$ 时，算符 $\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 才是自伴的.

定义 18.7 设 $\boldsymbol{L}$ 为自伴算符，则方程

$$\boldsymbol{L}y(x)=\lambda y(x) \tag{18.26}$$

称为自伴算符的本征值问题.

这里我们没有明确写出齐次边界条件，是因为它已经隐含在自伴算符 $\boldsymbol{L}$ 的定义中了.

自伴算符的本征值问题具有下列几个重要的基本性质：

性质 1 自伴算符的本征值必然存在. (不证)

性质 2 自伴算符的本征值必为实数.

证 因为

$$\boldsymbol{L}y=\lambda y,$$

取复共轭

$$(\boldsymbol{L}y)^*=\lambda^* y^*.$$

由于 $\boldsymbol{L}$ 是自伴算符，所以

$$\int_a^b [y^*\boldsymbol{L}y-(\boldsymbol{L}y)^*y]\,\mathrm{d}x=(\lambda-\lambda^*)\int_a^b yy^*\mathrm{d}x=0.$$

又因为 $\int_a^b yy^*\mathrm{d}x\neq 0$ ，所以

$$\lambda=\lambda^*,$$

即证得本征值 λ 为实数. □

性质 3 自伴算符的本征函数具有正交性，即对应不同本征值的本征函数一定正交.

证 设 λ_i 和 λ_j 是不相等的两个本征值，对应的本征函数为 y_i 和 y_j ，

$$\boldsymbol{L}y_i+\lambda_i y_i=0,\quad \boldsymbol{L}y_j+\lambda_j y_j=0.$$

注意到本征值 λ_i,λ_j 为实数，于是

$$\int_a^b [y_i^*\boldsymbol{L}y_j-(\boldsymbol{L}y_i)^*y_j]\,\mathrm{d}x=(\lambda_j-\lambda_i)\int_a^b y_i^*y_j\,\mathrm{d}x.$$

因为 $\lambda_i\neq\lambda_j$ ，所以

$$\int_a^b y_i^*(x)y_j(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{18.27}$$

这样就证明了本征函数的正交性. □

由于本征函数是齐次微分方程在齐次边界条件下的解，所以将本征函数乘以一个非零常数因子仍然是本征函数. 我们就可以适当选择这个常数因子，使得对于任意一个本征值 λ_i ，都有

$$\int_a^b y_i^*(x)y_i(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{18.28}$$

这样得到的就是一个正交归一的函数组. 而且， (18.27) 和 (18.28) 两式还可以统一写成

$$\int_a^b y_i^*(x)y_j(x)\mathrm{d}x = \delta_{ij}. \tag{18.29}$$

性质 4 自伴算符的本征函数 (的全体) 构成一个完备函数组，即任意一个在区间 $[a,b]$ 中有连续二阶导数、且满足和自伴算符 $\boldsymbol{L}$ 相同的边界条件的函数 $f(x)$ ，均可按本征函数 $\{y_n(x)\}$ 展开为绝对而且一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \tag{18.30}$$

其中

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)y_n^*(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b y_n(x)y_n^*(x)\mathrm{d}x}. \tag{18.31}$$

特别是，如果本征函数组是归一化的，则 (18.31) 式中的分母为 1 ，展开的形式更加简单. (不证)

同样，正交归一的本征函数组的完备性也还可以表示成

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)y_n^*(x') = \delta(x-x'). \tag{18.32}$$

它就是 (18.19) 式，也可以直接由 (18.30) 和 (18.31) 式推出.

由上面的性质 3 和 4 可以看到，只要将本征函数适当归一化，

则本征函数的全体就构成了一个完备的正交归一函数集. 因此，上一节中有关完备的正交归一函数集的讨论均可适用. 这里暂时忽略掉一种可能性，即对应于一个本征值可能有不止一个 (线性无关的) 本征函数，因而可能并不彼此正交. 这种情形将在 18.5 节讨论. 但即使如此，我们总还可以采用 Schmidt 的正交化步骤 (见 18.1 节，读者可以方便地把它移植到函数空间中来) 使之正交化，因而仍然可以得到一个完备的正交归一函数集.

事实上，上面的展开条件还可以放宽为：对于任意在 $[a,b]$ 中平方可积的函数，(18.31) 式在平均收敛

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^b\left|f(x)-\sum_{n=1}^{N}c_n y_n(x)\right|^2\mathrm{d}x=0 \qquad (18.33)$$

的意义下仍然成立.

严格说来，上面关于自伴算符本征值的存在性和本征函数的完备性的讨论，本来还应当区分奇异的 (区间无界或半无界；或是在有界区间上微分方程有奇点) 和非奇异的 (区间有界，且微分方程在区间上无奇点) 本征值问题这两种情形. 但由于本书中并没有给出有关的证明，所以也就未曾区分这两类本征值问题. 而且，为了叙述的方便，在有关的表述中还都采用了有界区间的形式.

最后，需要指出，算符的自伴性并不是该算符的本征值问题是否有解的必要条件. 最简单的例子就是：如果 $\boldsymbol{L}$ 是自伴算符，那么 $\mathrm{i}\boldsymbol{L}$ 一定不是自伴算符，但是后者的本征值问题是一定有解的，其本征值就是 $\boldsymbol{L}$ 的本征值乘以 i (因此全部都是纯虚数). 一般说来，非自伴算符的本征值问题即使有解，它的本征值不一定是实数，本征函数也不一定具有正交性. 例如，不妨再讨论一下例 18.6 中的算符 $\boldsymbol{L}=\mathrm{i}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. 当边界条件为

$$y(b)=\alpha y(a) \quad 且 \quad \alpha\alpha^*\neq 1$$

时，这个算符就不是自伴的. 容易看出，如果

$$\boldsymbol{L}y_j=\lambda_j y_j,\quad \boldsymbol{L}y_k=\lambda_k y_k,$$

则一定有

$$\int_a^b y_k^* \boldsymbol{L} y_j \mathrm{d}x - \int_a^b (\boldsymbol{L} y_k)^* y_j \mathrm{d}x = \mathrm{i}(\alpha\alpha^* - 1) y_j(a) y_k^*(a),$$

即

$$(\lambda_j - \lambda_k^*) \int_a^b y_j y_k^* \mathrm{d}x = \mathrm{i}(\alpha\alpha^* - 1) y_j(a) y_k^*(a).$$

这样，当 $j = k$ 时并不能得到 $\lambda_j = \lambda_j^*$，当 $j \neq k$ 时也不能推得 $\int_a^b y_j y_k^* \mathrm{d}x = 0$.

18.4 Sturm–Liouville 型方程的本征值问题

在前面几章中，我们讨论过几个常微分方程的本征值问题. 涉及的微分方程有

$$X'' + \lambda X = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1 - x^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left[\lambda - \frac{m^2}{1 - x^2}\right] y = 0;$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[\lambda - \frac{m^2}{r^2}\right] R = 0.$$

它们可以归纳为下面的一般形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \left[\lambda\rho(x) - q(x)\right] y = 0. \tag{18.34}$$

这种类型的方程称为 Sturm–Liouville 型 (简称 S–L 型) 方程. 不妨把 S–L 型方程中的函数 $p(x)$, $q(x)$ 和 $\rho(x)$ 限制为都是实函数，而且都满足必要的连续性要求. 其中的 $\rho(x)$，称为权重函数. 当权重函数 $\rho(x) =$ 常数 时，我们可以将它取为 1 . 不恒为常数的权重函数，可以来源于正交曲面坐标系的使用 (这时可以从 Laplace 算符的具体表达式中追寻到权重函数的踪迹；从根本上说，它反映了坐标长度单位是该变量的函数. 可以称之为来源于空间的几何描述的不均匀性)，也可能来源于问题所涉及的物理性质的不均匀性 (例如，密度分布的不均匀)．因此，就我们所关心的物理问题而言，不妨

假设 $\rho(x) \geq 0$，而且，应当不恒为 0 .

练习 18.3 将二阶常微分方程

$$a(x)y'' + b(x)y' + \left[c(x) - \lambda d(x)\right]y = 0$$

化为 S–L 方程的形式.

为了书写的紧凑，还可以引进算符

$$\boldsymbol{L} \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + q(x) \tag{18.35}$$

的记号. 这样， S–L 型方程就可以改写成

$$\boldsymbol{L}y(x) = \lambda\rho(x)y(x). \tag{18.36}$$

S–L 型方程附加上适当的边界条件，就构成 S–L 型方程的本征值问题. λ 称为本征值. 对于某一个本征值 λ，满足 S–L 方程及相应的边界条件的非零解就是本征函数.

从微分方程来看，由于 $\rho(x)$ 的出现， S–L 型方程 (18.34) 或 (18.36) 明显不同于方程 (18.26) . 但是，通过变量变换

$$u(x) = \sqrt{\rho(x)}y(x), \tag{18.37}$$

就可以将方程 (18.36) 化为

$$\boldsymbol{L}'u(x) = \lambda u(x), \tag{18.38}$$

其中

$$\boldsymbol{L}' = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\phi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] + \psi(x), \tag{18.39}$$

$$\phi(x) = \frac{p(x)}{\rho(x)}, \tag{18.40}$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right] + \frac{q(x)}{\rho(x)}. \tag{18.41}$$

方程 (18.38) 当然也还是 S–L 型方程，只不过是一种特殊的 S–L 型方程，权重函数为 1 的 S–L 型方程.

在此基础上，就可以建立 S–L 型方程和 S–L 型方程本征值问题的下列两个定理.

定理 18.1 对于任意函数 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$，恒有

$$u_1^* \boldsymbol{L}' u_2 - \left(\boldsymbol{L}' u_1\right)^* u_2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\phi(x)\left(u_1^* \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} - u_2 \frac{\mathrm{d}u_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\right], \tag{18.42}$$

其中的算符 $\boldsymbol{L}'$ 见 (18.39) 式.

这个定理，可以通过直接的计算而加以证明，这里从略.

练习 18.4 证明定理 18.1 .

定理 18.1 的结果，可以推广到 (18.35) 式中定义的算符 $\boldsymbol{L}$. 直接计算就可以证明，在变换 $u_1(x) = \sqrt{\rho(x)}y_1(x)$, $u_2(x) = \sqrt{\rho(x)}y_2(x)$ 之下，有

$$u_1^* \boldsymbol{L}' u_2 - \left(\boldsymbol{L}' u_1\right)^* u_2 = y_1^* \boldsymbol{L} y_2 - \left(\boldsymbol{L} y_1\right)^* y_2.$$

所以，对于任意函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，也有

$$y_1^* \boldsymbol{L} y_2 - \left(\boldsymbol{L} y_1\right)^* y_2 = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(y_1^* \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2 \frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\right]. \tag{18.43}$$

定理 18.2 在边界条件

$$\phi(x)\left(u_1^* \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} - u_2 \frac{\mathrm{d}u_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_a^b = 0 \tag{18.44}$$

之下，算符 $\boldsymbol{L}' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\phi(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] - \psi(x)$ 是自伴的.

这个定理，也可以通过直接的计算而加以证明.

练习 18.5 证明定理 18.2 .

将定理 18.1 的推论 (18.43) 和定理 18.2 结合起来，立即又可以得到：在边界条件

$$p(x)\left(y_1^* \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2 \frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_a^b = 0 \tag{18.45}$$

之下，算符 $\boldsymbol{L} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right] - q(x)$ 也是自伴的.

现在分析一下，在什么情况下，边界条件 (18.45) 能够成立.

第一种情况是在端点 $x = a$ 和 $x = b$，均有

$$p(x)\left(y_1^* \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2 \frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right) = 0. \tag{18.46}$$

常见的有：

1. 如果 y_1 和 y_2 在两端点均满足第一、二、三类边界条件，则 (18.46) 式成立．这是因为，例如，在 $x=a$ 点，

$$\alpha y_i(a)-\beta y_i'(a)=0, \qquad i=1,2, \quad \alpha \text{和} \beta \text{均为 (正) 实数},$$

取复共轭，还可以得出

$$\alpha y_i^*(a)-\beta y_i^{*\prime}(a)=0, \qquad i=1,2.$$

由于 α 和 β 不可能同时为 0，故有

$$\begin{vmatrix} y_1^*(a) & y_1^{*\prime}(a) \\ y_2(a) & y_2'(a) \end{vmatrix} = y_1^*(a)y_2'(a)-y_2(a)y_1^{*\prime}(a)=0.$$

对于 $x=b$ 点，也可以作同样的讨论．

2. 如果 $p(x)$ 在端点 (例如， $x=a$) 处为 0，这时 $x=a$ 点是方程的奇点．假定 $p(x)$, $q(x)$ 和 $\rho(x)$ 满足一定的要求 ①，使得 $x=a$ 点方程的正则奇点．这样，在 $x=a$ 点的第一解是有界的，而第二解是无界的．在附加上有界条件去掉无界解后，就有

$$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=a}=0.$$

另一种情况是

$$p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=a}=p(x)\left(y_1^*\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1^*}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=b},$$

但不为 0，这时 (18.45) 式也成立．如果

$$p(a)=p(b), \quad q(a)=q(b), \quad \rho(a)=\rho(b),$$

并且

$$y_i(a)=y_i(b), \quad y_i'(a)=y_i'(b), \quad i=1,2,$$

---

① 例如

$$p(a)=0, \quad p'(a)\neq 0, \quad \rho(x) \text{和} (x-a)q(x) \text{均在} x=a \text{点解析}$$

或

$$p(a)=0, \quad p'(a)=0, \quad p''(a)\neq 0, \quad \rho(x) \text{和} q(x) \text{均在} x=a \text{点解析},$$

这在我们讨论过的实际问题中是能够满足的．

显然就可以满足这个要求．这正是我们在第十五章中讨论过的周期条件的情形．

最后，应当特别强调，对于变换 (18.37)，不要简单地只看成是常微分方程的因变量变换．它给出的是不同函数空间中的函数之间的变换关系．如果说，函数 $y(x)$ 属于函数空间 V，函数 $u(x)$ 属于函数空间 V'．空间 V 中的内积定义是

$$(y_1,\, y_2) = \int_a^b y_1^*(x)y_2(x)\rho(x)\mathrm{d}x, \tag{18.47}$$

空间 V' 中的内积定义则是

$$(u_1,\, u_2) = \int_a^b u_1^*(x)u_2(x)\mathrm{d}x. \tag{18.48}$$

变换 (18.37) 就保证了 $(y_1,\, y_2) = (u_1,\, u_2)$．

18.5 Sturm–Liouville 型方程本征值问题的简并现象

在第十五章中，我们曾经遇到过对应一个本征值有不只一个 (线性无关的) 本征函数的情形．这种现象称为简并或退化．由于 S–L 型方程是二阶线性常微分方程，所以，对应一个本征值最多只能有两个 (线性无关的) 本征函数．到底在什么条件下，S–L 型方程的本征值问题是简并的，在什么条件下是非简并的，下面的两个定理可以给予明确的回答．

定理 18.3 如果 S–L 型方程本征值问题的一个本征函数是复的，且其实部和虚部线性无关，则此本征值问题是二重简并的．

证 根据定理所设，本征函数 $y(x)$ 是复的，其实部和虚部分别为 $f(x)$ 和 $g(x)$，

$$y(x) = f(x) + \mathrm{i}g(x).$$

则 S–L 型方程可以写成

$$\boldsymbol{L}(f + \mathrm{i}g) = \lambda\rho(f + \mathrm{i}g).$$

由于算符 $\boldsymbol{L}$ 是实算符，权重函数 $\rho(x)$ 是实函数，且本征值 λ 为实数，故将上式分别比较实部和虚部，就得到

$$\boldsymbol{L}f = \lambda\rho f, \qquad \boldsymbol{L}g = \lambda\rho g.$$

这说明 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是对应于同一个本征值 λ 的本征函数，它们的线性无关性在定理的已知条件中已经作了明确的限定.

当然，这里还必须证明 $f(x)$ 和 $g(x)$ 也满足原本征值问题的边界条件. 这时只要注意到边界条件也是线性齐次的，并且可能出现的系数也是实数，于是在边界条件中也分别比较实部和虚部即可. □

定理 18.4 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是 S-L 型方程本征值问题 (18.36) 的两个实的线性无关的本征函数，并且在 $x=a$ 和 $x=b$ 点都单独满足边界条件 (18.45)，则 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 不可能对应于同一个本征值 λ.

证 用反证法. 设 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 对应于同一个本征值 λ，

$$\boldsymbol{L}y_1 = \lambda\rho y_1, \quad \boldsymbol{L}y_2 = \lambda\rho y_2,$$

因此

$$y_1\boldsymbol{L}y_2 - y_2\boldsymbol{L}y_1 = 0,$$

注意 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是实函数， $y_1^*(x) = y_1(x)$， $y_2^*(x) = y_2(x)$，所以根据 (18.43) 式，就有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right)\right] = 0.$$

于是

$$p(x)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right) = \text{常数}\,C.$$

而根据定理给出的已知条件，

$$p(x)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=a} = 0, \quad p(x)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right)\bigg|_{x=b} = 0.$$

所以

$$p(x)\left(y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} - y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right) \equiv 0.$$

但因为 $p(x) \not\equiv 0$，故有

$$y_1\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}-y_2\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\equiv 0,$$

即

$$W\left[y_1(x),\quad y_2(x)\right]\equiv\begin{vmatrix}y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\equiv 0.$$

这说明 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 线性相关，与已知条件矛盾．所以 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 不可能对应于同一个本征值． □

这个定理就告诉我们，在一、二、三类 (齐次) 边条件或 (和) 有界条件下，S-L 型方程本征值问题不可能是简并的．就本书所讨论过的几种类型的边界条件而言，只有在周期条件之下，本征函数在区间的每一个端点并不单独满足 (18.45)，才有可能发生简并现象．

最后强调一下，这里讨论的是常微分方程的本征值问题．如果是偏微分方程的本征值问题，一般说来，即使在一、二、三类 (齐次) 边条件或 (和) 有界条件下，也会出现简并现象．由于偏微分方程的本征值问题，原则上总可以通过分离变量而化为若干个常微分方程的本征值问题，因此本书不拟作更多的讨论．

18.6 从 Sturm–Liouville 型方程的本征值问题看分离变量法

现在再回到分离变量法的话题上来．仍以弦的横振动问题为例．对于两端固定弦的自由振动，定解问题是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l,\ t>0; \tag{18.49a}$$

$$u\Big|_{x=0}=0,\qquad u\Big|_{x=l}=0,\qquad t>0; \tag{18.49b}$$

$$u\Big|_{t=0}=\phi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x),\qquad 0<x<l. \tag{18.49c}$$

根据 18.3 节和 18.4 节的讨论可知，如果存在一个 S-L 方程的本征

值问题

$$LX = \lambda\rho X, \tag{18.50a}$$

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0, \tag{18.50b}$$

那么，由于它的边界条件 (18.50b) 和定解问题 (18.49) 的边界条件 (18.49b) 形式完全相同，因此，可以将定解问题 (18.49) 的解 $u(x,t)$ 按照本征函数的全体 $\{X_n(x),\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ (为方便起见，假设本征函数均已归一化) 展开，

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x). \tag{18.51}$$

将解式 (18.51) 代入方程 (18.49a)，有

$$\sum_{m=1}^{\infty} T_m''(t) X_m(x) - a^2 \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) X_m''(x) = 0. \tag{18.52}$$

用 $X_n^*(x)$ 乘上式两端，然后在区间 $[0,\ l]$ 上积分，就得到

$$T_n''(t) - a^2 \sum_{m=1}^{\infty} (X_n,\ X_m'') T_m(t) = 0, \quad m = 1, 2, 3, \cdots. \tag{18.53}$$

一般说来，这是关于未知函数 $T_n(t)$ 的常微分方程组. 同样，再将初始条件 (18.49c) 也按这一组本征函数展开，还可以得到

$$T_n(0) = (X_n,\ \phi), \quad T_n'(0) = (X_n,\ \psi). \tag{18.54}$$

如果我们能够由 (18.53) 和 (18.54) 求出 $T_n(t)$，代回到 (18.51) 式中，当然就求出了定解问题 (18.49) 的解 $u(x,t)$. 这里，我们看到，本征函数组的完备性起了决定性的作用. 为了保证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$ 能够收敛 (至少是平均收敛) 到解 $u(x,t)$，这里的求和必须遍及**全部**本征函数. 绝不可以无理由地摈弃若干个本征函数. 否则，尽管在形式上似乎仍能求到一个级数“解”，但它绝不可能收敛到真正的解 $u(x,t)$.

弄清楚了齐次边界条件在分离变量法中的决定性作用后，非齐次方程的情形就迎刃而解了. 如果把定解问题 (18.49) 中的方程

(18.49a) 改为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t), \tag{18.55}$$

那么，现在看来，求解过程并没有太大的差异，不同之处只在于要将方程的非齐次项 $f(x,t)$ 也按本征函数展开，于是，齐次的常微分方程组 (18.53) 变成了非齐次的方程组

$$T_n''(t)-a^2\sum_{m=1}^{\infty}(X_n,X_m'')T_m(t)=(X_n,f),\quad m=1,2,3,\cdots. \tag{18.56}$$

当然，这里要求，$f(x,t)$ 作为 x 的函数，和 $\{X_n(x)\}$ 属于同一个函数空间.

同样，也就不难理解，如果定解问题的边界条件是非齐次的，就首先必须将边界条件齐次化.

到现在为止，我们着重分析了齐次边界条件在分离变量法中的决定性作用. 对于本征函数，除了要求它满足和定解问题相同的边界条件外，对于它所满足的微分方程只是要求必须是 S-L 型方程，但对于方程的具体形式并没有限制. 选择不同的本征函数组 $\{X_n(x), n=1,2,3,\cdots\}$(它们当然都必须满足和定解问题相同的边界条件)，得到的关于 $T_n(t)$ 的常微分方程组的形式也不相同，因而求得的 $T_n(t)$ 也不相同. 但是，定解问题的解的存在唯一性，保证了最后求得的是同一个 $u(x,t)$. 而且，需要注意，并不是任何常微分方程组都是容易求解的. 这样，在实际的求解过程中，我们就需要恰当地选择本征函数组 $\{X_n(x), n=1,2,3,\cdots\}$ ，使得 $T_n(t)$ 的求解问题尽可能地简单. 最简单的情形当然就是 $T_n(t)$ 满足的是常微分方程，而不是常微分方程组. 在上面的例子中，我们当然就应当使得本征函数满足常微分方程

$$-X_n''(x)=\lambda_n X_n(x), \tag{18.57}$$

这正是我们用分离变量法的标准步骤得到的微分方程. 相应地，方程组 (18.53) 和 (18.56) 就变成常微分程

$$T_n''(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=0 \tag{18.58}$$

和

$$T_n''(t)+a^2\lambda_n T_n(t)=(X_n,\ f). \tag{18.59}$$

所以，分离变量法就为我们提供了一个选择本征函数组的最佳方案. 如果说，本征函数的完备性是在理论上保证了一定可以将定解问题的解按该本征函数组展开 (这是有条件的，定解问题和本征函数要满足相同的齐次边界条件)，而选用“相应齐次问题的本征函数”则保证了可以方便地求出展开系数 (实际上是函数)，保证了这种解法在实用上的可行性.

在深入理解了分离变量法的精神实质后，求解偏微分方程定解问题时就获得了更大的自由. 这不仅体现在使得我们对于各种类型的定解问题 (方程齐次或非齐次，边界条件齐次或非齐次) 的求解有了一个统一的更深入的认识，也还表现在拓宽了对于某些定解问题的求解思路. 例如，对于单位球内的稳定问题，

$$\nabla^2 u=f,\qquad x^2+y^2+z^2<1; \tag{18.60a}$$

$$u\Big|_{x^2+y^2+z^2=1}=0, \tag{18.60b}$$

采用球坐标系求解，按照过去的做法，应当将 $u(r,\theta,\phi)$ 按“相应齐次问题的本征函数” $\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi)$ 展开，

$$u(r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}R_{lm}(r)\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi), \tag{18.61}$$

然后，根据方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2\frac{\mathrm{d}R_{lm}}{\mathrm{d}r}\right]&-\frac{l(l+1)}{r^2}R_{lm}(r)\\ &=\iint \mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\phi)\,f(r,\theta,\phi)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\end{aligned} \tag{18.62}$$

(其中的积分遍及整个 4π 立体角) 和边界条件

$$R_{lm}(0)\text{有界},\qquad R_{lm}(1)=0 \tag{18.63}$$

求出 $R_{lm}(r)$. 这里遇到的方程 (18.62) 是一个变系数的非齐次常微分方程，是否能够容易求解取决于非齐次项的具体形式. 但是，按

照本节中前面的分析，如果能找到一组本征函数，只要它也满足此定解问题的齐次边界条件，那么，就可以将 $u(r,\theta,\phi)$ 按这一组本征函数展开. 具体说来，可以先求解本征值问题

$$-\nabla^2 w=\lambda w,\qquad x^2+y^2+z^2<1; \tag{18.64a}$$

$$w\Big|_{x^2+y^2+z^2=1}=0, \tag{18.64b}$$

得到本征值 ①

$$\lambda_{nl}=k_{nl}^2,\quad n=1,2,3,\cdots,\ l=0,1,2,\cdots \tag{18.65}$$

和本征函数

$$w_{nlm}(r,\theta,\phi)=\mathrm{j}_l(k_{nl}r)\,\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi), \tag{18.66}$$

其中 k_{nl} 是 l 阶球 Bessel 函数 $\mathrm{j}_l(x)$ 的第 n 个正零点. 然后，将 $u(r,\theta,\phi)$ 按 $w_{nlm}(r,\theta,\phi)$ 展开，

$$u(r,\theta,\phi)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}c_{nlm}\,\mathrm{j}_l(k_{nl}r)\mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi), \tag{18.67}$$

代入方程 (18.60a)，就得到

$$\begin{aligned}-k_{nl}^2c_{nlm}&\int_0^1\mathrm{j}_l^2(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r\\&=\int_0^1\mathrm{j}_l(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r\iint\mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\phi)f(r,\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi,\end{aligned}$$

根据球 Bessel 函数的定义 (17.130) 以及 (17.43) 式的结果，可以求得

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{j}_l^2(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r&=\frac{\pi}{2k_{nl}}\int_0^1\mathrm{J}_{l+1/2}^2(k_{nl}r)r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi}{4k_{nl}}\left[\mathrm{J}_{l+1/2}'(k_{nl})\right]^2\\&=\frac{1}{2}\left[\mathrm{j}_l'(k_{nl})\right]^2,\end{aligned} \tag{18.68}$$

---

① 注意，这里的本征值与 $m=0,\pm1,\cdots,\pm l$ 无关，换句话说，此本征值问题是对 m 简并的，简并度为 $2l+1$.

所以

$$c_{nlm} = -\frac{2}{k_{nl}^2\left[\mathrm{j}_l'(k_{nl})\right]^2}$$
$$\times\int_0^1 \mathrm{j}_l(k_{nl}r)r^2\mathrm{d}r\iint \mathrm{Y}_l^{m*}(\theta,\phi)\,f(r,\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi. \quad (18.69)$$

前面在求解本征函数时，已经用到了全部边界条件(包括在转换到球坐标系时出现的周期条件和有界条件)，这样，就自动保证了解 $u(r,\theta,\phi)$ 也满足这些边界条件.

这种解法的优点是除了要找到合适的本征函数外，根本不需要再去求解常微分方程. 当然，这是以多作了一重级数展开为代价的. 这正是相当于将 $R_{lm}(r)$ 也按球 Bessel 函数 $\mathrm{j}_l(k_{nl}r)$ 展开而得的结果. 这种做法也有局限性，它只适用于不含时间的稳定问题，并且还要求相应的本征值问题有解，甚至还要求 0 不是本征值.

以上的做法，当然可以方便地推广到其他几何形状的三维区域，或二维平面上的一定区域.

*18.7 正交多项式的一般讨论

现在讨论一类特殊的二阶 S–L 型常微分方程，即 S–L 型方程的本征值问题只有多项式解的情形. 设有方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y(x)=0, \quad (18.70)$$

所加的边界条件自然应当保证算符

$$\boldsymbol{L}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)$$

是自伴的. 并且约定 [①]，把本征值从小到大排列，$\lambda_0\le\lambda_1\le\lambda_2\le\lambda_3\le\cdots$，本征函数 $Q_n(x)$ 具有下列特点：

① 下面的种种结论当然与此约定有关. 如果修改此约定，例如，约定 λ_n 所对应的本征函数为 $2n$ 次多项式，则第二类边界条件就是许可的， $p(x)$ 和 $q(x)$ 也将可以采取更复杂的形式. 由此得到的进一步的结论当然也就完全不同了.

本征值$\lambda = \lambda_0$,　　本征函数 $Q_0(x)$ 为零次多项式，即常数;

本征值$\lambda = \lambda_1$,　　本征函数 $Q_1(x)$ 为一次多项式;

本征值$\lambda = \lambda_2$,　　本征函数 $Q_2(x)$ 为二次多项式;

$\vdots$

本征值$\lambda = \lambda_n$,　　本征函数 $Q_n(x)$ 为 n 次多项式;

$\vdots$

显然，在这样的约定下，边界条件不可能是第一、二、三类边界条件，这是因为，本征函数为常数就排除了第一类和第三类边界条件，本征函数为一次多项式又排除掉第二类边界条件. 下面还将要看到，方程的系数不可能是周期函数，因此，边界条件也不可能是周期条件. 这样，边界条件就只可能是有界条件这种类型. 更确切地说，当奇点 (区间的端点) 在有限远处时，要求本征函数 $Q_n(x)$ 有界；当奇点 (区间的端点) 为 ∞ 时，则应当要求 $x \to \infty$ 时 $\sqrt{\rho(x)}Q_n(x)$ 足够快地趋于 0，以保证反常积分 $\int^{\infty} \left|Q_n(x)\right|^2 \rho(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 更进一步，当 $\lambda = \lambda_0$ 时， $Q_0(x)$ 为常数，由 (18.70) 式可得

$$\left[\lambda_0\rho(x) - q(x)\right]Q_0(x) = 0,$$

这意味着

$$q(x) = \lambda_0\,\rho(x), \tag{18.71}$$

相应地，方程 (18.70) 变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right] + \left(\lambda - \lambda_0\right)\rho(x)y(x) = 0; \tag{18.72}$$

同样，当 $\lambda = \lambda_1$ 时，本征函数 $Q_1(x)$ 为一次多项式，

$$\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}Q_1'(x) + \left(\lambda_1 - \lambda_0\right)\rho(x)Q_1(x) = 0,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} = -\left(\lambda_1 - \lambda_0\right)\rho(x)\frac{Q_1(x)}{Q_1'(x)},$$

注意到 $Q_1'(x)=$ 常数，就有

$$\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}=\text{常数}\times Q_1(x)\,\rho(x)=\text{一次多项式}\times\rho(x);\qquad(18.73)$$

再由于 $\lambda=\lambda_2$ 时，

$$p(x)Q_2''(x)+\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}Q_2'(x)+\big(\lambda_2-\lambda_0\big)\rho(x)Q_2(x)=0,$$

因此，

$$p(x)=-\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}\frac{Q_2'(x)}{Q_2''(x)}-\big(\lambda_2-\lambda_0\big)\frac{Q_2(x)}{Q_2''(x)}\rho(x),$$

因为 $Q_2(x)$ 是二次多项式，所以 $Q_2'(x)$ 为一次多项式， $Q_2''(x)$ 为常数，同时利用 (18.73) 中的结果，又有

$$p(x)=\text{最高为二次多项式}\times\rho(x).\qquad(18.74)$$

这样，在限定本征函数为多项式的条件下， S-L 型方程一定具有下列形式 ① ：

$$\alpha(x)\rho(x)\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}+\beta(x)\rho(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+\lambda\rho(x)y(x)=0,\qquad(18.75)$$

其中

$$\alpha(x)=a_1x^2+a_2x+a_3,\qquad(18.76)$$

$$\beta(x)=b_1x+b_2,\qquad(18.77)$$

$$\beta(x)\rho(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\alpha(x)\rho(x)\Big].\qquad(18.78)$$

这里取 $q(x)=\lambda_0=0$ ．这样只使得全部本征值同时增加或减小了一个常数值，而本征函数不变．将 (18.75) 式中消去 $\rho(x)$ ，即得

$$\alpha(x)\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}+\beta(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+\lambda y(x)=0.\qquad(18.79)$$

由 (18.78) 式，又可以求出权重函数

$$\rho(x)=\frac{1}{\alpha(x)}\exp\left\{\int\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}\mathrm{d}x\right\}.\qquad(18.80)$$

---

① 这里就看到，方程的系数不是周期函数，因此，边界条件不可能是周期条件．

$\rho(x)$ 的形式，当然要保证函数的内积有意义. 由于本征函数为多项式，因此，如果本征值问题的区间为 $(-\infty,\infty)$，则应该要求 $\rho(x)$ 在 $x\to\pm\infty$ 时比 x^{-k}(k 为任意正整数) 的方式更快地 (例如，指数地) 趋于 0. 如果本征值问题的区间为 $[0,\infty)$，则也应该要求 $\rho(x)$ 在 $x\to\infty$ 时比 x^{-k} 的方式更快地趋于 0.

练习 18.6 证明 (18.80) 式.

在方程 (18.79) 的系数 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 中，有五个常数未定. 但在下列三种变换下，本征值问题没有实质性的变化 (因此，这五个常数中，只有两个可以作实质性的改变)：

1. $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 同乘 (除) 以一常数，因此，本征值也相应地乘 (除) 以该数，但本征函数不变. 于是，总可以将 $\alpha(x)$ 中最高幂次项的系数取为 1 或 -1.

2. 对 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 作变换 $\zeta=x-x_0$，本征值不变，本征函数变为 $Q_n(\zeta)=Q_n(x-x_0)$. 于是，只要不是无界区间上的本征值问题，总可以将区间的端点作适当的安排.

3. 对 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 作变换 $\zeta=kx$，本征值不变，本征函数变为 $Q_n(\zeta)=Q_n(kx)$. 于是，可以对 $\beta(x)$ 中的系数 b_2 作适当的指定.

下面就来讨论方程 (18.79) 的各种可能的形式.

$\alpha(x)$为常数 此常数不妨取为 1. 对应于上面的变换 2 和 3，还可以进一步取 $b_1=-2, b_2=0$. 于是，方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2y(x)}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+\lambda y(x)=0. \tag{18.81}$$

这个方程称为 Hermite 方程. 它在有限远处没有奇点，∞ 点是非正则奇点. 因此，要构成本征值问题 (而且本征函数为多项式，边界条件必须是有界条件)，区间必须是 $(-\infty,\infty)$. 对于这个本征值问题，容易求出，本征值 $\lambda=2n,\ n=0,1,2,\cdots$，本征函数为 Hermite 多项式 $\mathrm{H}_n(x)$，正交权重函数为

$$\rho(x)=\exp\left\{\int\big(-2x\big)\mathrm{d}x\right\}=\exp\{-x^2\}. \tag{18.82}$$

$\alpha(x)$为一次多项式　此时不妨取 $\alpha(x)=x$．于是 $\rho(x)$ 为

$$\rho(x)=\frac{1}{x}\exp\left[\int\frac{b_1x+b_2}{x}\mathrm{d}x\right]=x^{b_2-1}\mathrm{e}^{b_1x}.$$

通常令 $b_1=-1,\ b_2=\mu+2$，则方程变为

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(\mu+1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\lambda y=0, \tag{18.83}$$

称为 Laguerre 方程. 因为 $x=0$ 和 $x=\infty$ 都是方程的奇点，所以，本征值问题的区间必然是 $[0,\infty)$．在这两端加上的边界条件也都是有界条件. 在这种情形下，可以求得本征值 $\lambda=n,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$，本征函数是广义 Laguerre 多项式 $\mathrm{L}_n^{\mu}(x)$，它的特殊情形，$\mathrm{L}_n^0(x)=\mathrm{L}_n(x)$，称为 Laguerre 多项式.

$\alpha(x)$为二次多项式　此时需区分 $\alpha(x)$ 有无实根这两种情形.

当 $\alpha(x)$ 有实根时，不妨取

$$\alpha(x)=1-x^2,\quad b_1=-(\mu+\nu+2),\quad b_2=\nu-\mu,$$

于是，

$$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\frac{-(\mu+\nu+2)x+(\nu-\mu)}{1-x^2}=\frac{\nu+1}{1+x}-\frac{\mu+1}{1-x}.$$

方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\Big[(\nu-\mu)-(\mu+\nu+2)x\Big]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\lambda y=0 \tag{18.84}$$

称为 Jacobi 方程. 方程有三个奇点，$x=\pm1$ 和 ∞．如果取本征值问题的区间为 $[-1,\ 1]$，则本征值为 $\lambda=n(n+\mu+\nu+1)$，本征函数 $\mathrm{P}_n^{(\mu,\nu)}(x)$ 称为 Jacobi 多项式，正交区间为 $[-1,\ 1]$，权重函数

$$\rho(x)=(1-x)^{\mu}(1+x)^{\nu}. \tag{18.85}$$

Gegenbauer 多项式 $\mathrm{C}_n^{\mu}(x)$、Legendre 多项式 $\mathrm{P}_n(x)$ 和 Chebyshev 多项式 $\mathrm{T}_n(x)\equiv\cos(n\arccos x)$ 都是它的特殊情形，分别对应于 $\mu=\nu$，$\mu=\nu=0$ 和 $\mu=\nu=-1/2$．如果 $\mu=\nu=$ 正整数 $m\neq0$，则本征函数为 $\mathrm{d}^m\mathrm{P}_n(x)/\mathrm{d}x^m$，正交权重函数为 $\rho(x)=\left(1-x^2\right)^m$．这实际上是连带 Legendre 函数的另一种表述形式.

如果 $\alpha(x)$ 无实根，不妨取

$$\alpha(x) = 1 + x^2,$$

这时，

$$\int \frac{b_1 x + b_2}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{b_1}{2}\ln(1+x^2) + b_2 \arctan x,$$

于是，本征值问题的区间仍应限定为 $(-\infty, \infty)$ · 但由于

$$\rho(x) = (1+x^2)^{(b_1-2)/2}\exp\left[b_2 \arctan x\right],$$

无论 b_1 和 b_2 取何值，都不可能保证积分 $\int_{-\infty}^{\infty} \left|y(x)\right|^2 \rho(x)\mathrm{d}x$ 收敛，因此，在这种情形下，本征值问题没有意义.

这些正交多项式，作为本征函数，当然具有正交性. 从它们所满足的微分方程和边界条件，很容易证明

$$\int_a^b Q_k(x)Q_l(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0, \qquad k \neq l. \tag{18.86}$$

以上是从微分方程出发，来定义正交多项式的. 正交性是它们作为本征函数的必然推论. 但是，也可以从正交关系出发，来定义正交多项式. 在指定的区间上，由给定的权重函数，就可以唯一地 (除了可以差一个常数倍) 确定一组正交多项式. 为了叙述方便起见，不妨要求这些正交多项式都是归一化的. 这样，首先就有零次多项式 $Q_0(x)$，

$$\int_a^b \left|Q_0(x)\right|^2 \rho(x)\mathrm{d}x = 1;$$

然后通过正交归一关系

$$\int_a^b Q_1(x)Q_0(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0, \quad \int_a^b \left|Q_1(x)\right|^2 \rho(x)\mathrm{d}x = 1$$

就可以确定一次多项式 $Q_1(x)$；而后，再通过

$$\int_a^b Q_2(x)Q_0(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_a^b Q_2(x)Q_1(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_a^b \left|Q_2(x)\right|^2 \rho(x)\mathrm{d}x = 1$$

确定二次多项式 $Q_2(x)$ ； $\cdots$. 如此继续，就可以定义出一组正交多项式 (当然也还可以差一个相位因子) .

正交多项式还可以通过微分表示定义. 可以证明上面介绍的所有这些正交多项式，都具有下列形式的微分表示：

$$Q_n(x) = \frac{c_n}{\rho(x)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big[\alpha^n(x)\rho(x)\Big], \tag{18.87}$$

其中 c_n 为常数. 不同正交多项式有不同的 c_n ，由历史的原因或习惯上的约定给出. (18.87) 式称为广义 Rodrigues 公式.

要直接普遍地找到 (18.87) 式满足的微分方程，还需要一定的计算. 比较简便的办法是证明 $Q_n(x)$ 是 n 次多项式，并且满足正交关系 (18.86) ，因而是此区间上具有权重函数 $\rho(x)$ 的唯一的一组正交多项式.

先证明 $Q_n(x)$ 是 n 次多项式. 为此，只需注意，对于任意的 l 次多项式 $\gamma_l(x)$ ，有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\alpha^k(x)\rho(x)\gamma_l(x)\right]\\
&\quad= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\alpha^{k-1}(x)\Big]\alpha(x)\rho(x)\gamma_l(x)\\
&\qquad+ \alpha^{k-1}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\alpha(x)\rho(x)\Big]\gamma_l(x) + \alpha^k(x)\rho(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[\gamma_l(x)\Big]\\
&\quad= \Big[(k-1)\alpha^{k-1}(x)\alpha'(x)\gamma_l(x) + \alpha^{k-1}(x)\beta(x)\gamma_l(x)\\
&\qquad+ \alpha^k(x)\gamma_l'(x)\Big]\rho(x)\\
&\quad= \alpha^{k-1}(x)\rho(x)\Big[(k-1)\alpha'(x)\gamma_l(x) + \beta(x)\gamma_l(x) + \alpha(x)\gamma_l'(x)\Big].
\end{aligned}$$

由于上式方括号内第二项一定是 $l+1$ 次多项式，如果 $\alpha(x)$ 为零次或一次多项式，则其余两项最高是 l 次多项式；如果 $\alpha(x)$ 为二次多项式，其余两项也是 $l+1$ 次多项式，这三项中的 x^{l+1} 项也不能互相抵消 (因为这时 $\alpha(x)$ 中的 a_1 和 $\beta(x)$ 中的 b_1 同号) ，所以，上面的结果可以总结成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\alpha^k(x)\rho(x)\gamma_l(x)\right] = \alpha^{k-1}(x)\rho(x) \times (l+1)\,\text{次多项式}. \tag{18.88}$$

把这个结果反复应用到 (18.87) 式上，就证明了 $Q_n(x)$ 是 n 次多项式.

然后再证明正交关系 (18.86) 式. 为此，不妨假设 $k < l$，

$$\begin{aligned}\int_a^b Q_k(x)Q_l(x)\rho(x)\mathrm{d}x &= c_l \int_a^b Q_k(x)\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left[\alpha^l(x)\rho(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= c_l Q_k(x)\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left[\alpha^l(x)\rho(x)\right]_a^b \\ &\quad - c_l \int_a^b \frac{\mathrm{d}Q_k(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^{l-1}}{\mathrm{d}x^{l-1}}\left[\alpha^l(x)\rho(x)\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

在前面所列举的各种情形下，分部积分出来的项都一定为 0. 这样，在分部积分 k 次后，就得到

$$\begin{aligned}\int_a^b Q_k(x)Q_l(x)\rho(x)\mathrm{d}x &= (-)^k c_l \int_a^b \frac{\mathrm{d}^k Q_k(x)}{\mathrm{d}x^k}\frac{\mathrm{d}^{l-k}}{\mathrm{d}x^{l-k}}\left[\alpha^l(x)\rho(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= (-)^k c_l \frac{\mathrm{d}^k Q_k(x)}{\mathrm{d}x^k}\int_a^b \frac{\mathrm{d}^{l-k}}{\mathrm{d}x^{l-k}}\left[\alpha^l(x)\rho(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= (-)^k c_l \frac{\mathrm{d}^k Q_k(x)}{\mathrm{d}x^k}\frac{\mathrm{d}^{l-k-1}}{\mathrm{d}x^{l-k-1}}\left[\alpha^l(x)\rho(x)\right]_a^b \\ &= 0.\end{aligned}$$

这样就完成了正交关系 (18.86) 式的证明. 这个证明方法，和证明 Legendre 多项式及连带 Legendre 函数的正交性时使用的方法 (见 16.4 节和 16.9 节) 非常相似. 在上面的证明过程中，对于边界条件的具体应用未作详细的讨论. 请读者自行补正.

第十九章　积分变换的应用

本章介绍求解偏微分方程定解问题的另一种做法，即将积分变换应用于在求解偏微分方程定解问题. 常用的积分变换有 Laplace 变换和 Fourier 变换两种.

19.1 Laplace 变换

Laplace 变换可用于求解含时间的偏微分方程定解问题. 经过变换后，自变量的个数比原来减少一个. 例如，原来是 x 和 t 两个自变量的偏微分方程定解问题，变换后就只需求解常微分方程 (自变量为 x) 的定解问题. 一般说来，后者总比较容易求解. 当然，这样求得的是原始的定解问题的解的象函数，还必须反演，才能得到原始问题的解.

下面先举一个无界杆的热传导问题的例子.

例 19.1　求无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\qquad -\infty<x<\infty,\quad t>0; \tag{19.1a}$$

$$u\Big|_{t=0}=0,\qquad\qquad -\infty<x<\infty \tag{19.1b}$$

的解.

解　正如 13.5 节中指出的，在这种无界区间的定解问题中，往往并不明确列出边界条件. 实际上，无界区间，只是一个物理上的抽象，它只是表明在所考察的限度 (时间，精度，$\cdots$) 内，两端的影响可以忽略. 因此，读者应当明确，如果要完整地列出定解问题的话，则还应当有边界条件

$$u\Big|_{x\to\pm\infty}\to 0. \tag{19.2}$$

现在，作 Laplace 变换．令

$$u(x,t) \risingdotseq U(x,p) \tag{19.3}$$

即

$$U(x,p) = \int_0^\infty u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \tag{19.4}$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial t} \risingdotseq pU(x,p), \tag{19.5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \risingdotseq \frac{\mathrm{d}^2 U(x,p)}{\mathrm{d}x^2}. \tag{19.6}$$

这里，在写出 (19.5) 时，已经利用了初始条件 (19.1b)，而在 (19.6) 中，把变换后的象函数只看成是 x 的函数，p 是参数，所以微商运算就是一元函数的微商．再进一步令

$$f(x,t) \risingdotseq F(x,p), \tag{19.7}$$

这样，在经过 Laplace 变换后，定解问题 (19.1) 就变成

$$pU(x,p) - \kappa\frac{\mathrm{d}^2 U(x,p)}{\mathrm{d}x^2} = F(x,p). \tag{19.8}$$

利用例 11.11 的结果，可以得到

$$U(x,p) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\kappa p}}\int_{-\infty}^{\infty} F(x',p)\exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}|x-x'|\right\}\mathrm{d}x'. \tag{19.9}$$

再根据 Laplace 变换的反演公式 (见例 10.7)

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}} \risingdotseq \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{4t}\right\} \tag{19.10}$$

以及卷积定理 (见 10.3 节)，就能够最后得到

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x'\int_0^t \exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa(t-\tau)}\right\}\frac{f(x',\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\mathrm{d}\tau. \tag{19.11}$$

从以上的求解过程可以看出，用 Laplace 变换求解偏微分方程定解问题，除了可以减少自变量的数目以外，某些已知函数的象函数 (例如方程的非齐次项，它的形式可能很复杂) 甚至都不必具体求出，在求反演时只需应用卷积定理即可．

再举一个无界弦的波动问题的例子.

例 19.2 用 Laplace 变换求解无界弦的波动问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad -\infty<x<\infty,\ t>0; \tag{19.12a}$$

$$u\Big|_{t=0}=\phi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), \quad -\infty<x<\infty. \tag{19.12b}$$

解 设在 Laplace 变换之下,

$$u(x,t)\risingdotseq U(x,p),$$

于是, 原来的定解问题就化为

$$p^2U(x,p)-a^2\frac{\mathrm{d}^2U(x,p}{\mathrm{d}x^2}=p\phi(x)+\psi(x). \tag{19.13}$$

根据例 11.11 的结果, 可以求得此方程的解 (实际上还考虑了 $U(x,p)$ 在 $\pm\infty$ 的行为)

$$\begin{aligned}U(x,p)&=\frac{1}{2ap}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[p\phi(x')+\psi(x')\Big]\exp\left\{-\frac{p}{a}\Big|x-x'\Big|\right\}\mathrm{d}x'\\&=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\phi(x')+\frac{\psi(x')}{p}\right]\exp\left\{-\frac{p}{a}\Big|x-x'\Big|\right\}\mathrm{d}x'.\end{aligned} \tag{19.14}$$

因为

$$\mathrm{e}^{-\alpha p}\risingdotseq\delta(t-\alpha), \qquad \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\alpha p}\risingdotseq\eta(t-\alpha),$$

所以

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x')\,\delta\left(t-\frac{|x-x'|}{a}\right)\mathrm{d}x'\\&\quad+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')\,\eta\left(t-\frac{|x-x'|}{a}\right)\mathrm{d}x'\\&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x')\,\delta(at-|x-x'|)\,\mathrm{d}x'\\&\quad+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x')\,\eta(at-|x-x'|)\,\mathrm{d}x',\end{aligned}$$

注意到

$$\delta(at-|x-x'|)=\begin{cases}0, & |x-x'|\neq at;\\ \infty, & |x-x'|=at\end{cases}$$

以及

$$\eta(at-|x-x'|)=\begin{cases}0, & |x-x'|>at;\\ 1, & |x-x'|<at,\end{cases}$$

就可以求出

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x')\delta\Big(t-\frac{|x-x'|}{a}\Big)\mathrm{d}x'+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(x')\mathrm{d}x'\\ &= \frac{1}{2}\Big[\phi(x-at)+\phi(x+at)\Big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(x')\mathrm{d}x'.\end{aligned}\tag{19.15}$$

这也正是第十三章中用行波法得到的结果.

Laplace 变换，也可以应用于求解有界区间内的偏微分方程定解问题.

例 19.3 设有一个长为 l 的均匀细杆，一端保持温度为 u_0，另一端绝热. 杆的初温为 0. 求杆中温度的分布和变化.

解 首先列出杆中温度 $u(x,t)$ 所满足的定解问题，

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\qquad 0<x<l,\quad t>0,\tag{19.16a}$$

$$u\Big|_{x=0}=u_0,\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0,\qquad t>0,\tag{19.16b}$$

$$u\Big|_{t=0}=0,\qquad 0<x<l.\tag{19.16c}$$

作 Laplace 变换

$$u(x,t)\risingdotseq U(x,p),\tag{19.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\risingdotseq pU(x,p),\tag{19.18}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\risingdotseq\frac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2},\tag{19.19}$$

$$u_0\risingdotseq\frac{u_0}{p}.\tag{19.20}$$

于是，定解问题 (19.16) 变成

$$\kappa\frac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2}-pU(x,p)=0, \tag{19.21a}$$

$$U(0,p)=\frac{u_0}{p},\quad \left.\frac{\mathrm{d}U(x,p)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l}=0. \tag{19.21b}$$

解得

$$U(x,p)=\frac{u_0}{p}\frac{\cosh\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}(l-x)}{\cosh\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}l}. \tag{19.22}$$

代入普遍反演公式

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L U(x,p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p, \tag{19.23}$$

就可以求出定解问题 (19.16) 的解．这里，考虑到 $U(x,p)$ 的具体形式，积分路径 L 应该取为在右半平面上的一条平行于虚轴的无穷直线， $\mathrm{Re}\,p>0$(这是为了保证在 L 之右象函数无奇点)．

现在我们用留数定理来计算这个积分．被积函数在左半平面内有无穷多个奇点，它们是 $p=0$ 和 $\cosh\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}l$ 的零点，即

$$\sqrt{\frac{p}{\kappa}}l=\frac{2n+1}{2}\pi\mathrm{i},\quad p=-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2\kappa,\quad n=0,1,2,\cdots,$$

而且全都是一阶极点．容易求出被积函数在奇点 $p=0$ 处的留数为 u_0，而在其余奇点处的留数为

$$\left.\frac{2u_0}{\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}l}\frac{\cosh\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}(l-x)}{\sinh\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}l}\mathrm{e}^{pt}\right|_{p=-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2\kappa}$$

$$=-\frac{4u_0}{\pi}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\exp\left[-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2\kappa t\right].$$

所以，最后就求得

$$\begin{aligned}u(x,t) &= u_0-\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\\ &\quad\times\exp\left[-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2\kappa t\right].\end{aligned} \tag{19.24}$$

不难验证，这个解的形式和用分离变量法得到的结果完全相同.

从以上的求解过程可以看出，用 Laplace 变换求解偏微分方程定解问题还有一个优点，这就是不必将非齐次的边界条件齐次化(尽管在这个例子中，边界条件的齐次化是十分容易的)，因为这时原有的偏微分方程定解问题的非齐次边界条件将转化为常微分方程的非齐次边界条件(当然，这是因为原来的问题只是两个自变量的问题)，这并不会带来原则的困难.

对于这个例子，也还可以用别的方法求反演. 为此，可将象函数展开为

$$\begin{aligned}\frac{\cosh\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(l-x)}{\cosh\sqrt{\frac{p}{\kappa}}l} &= \exp\left[-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}l\right]\left\{1+\exp\left[-2\sqrt{\frac{p}{\kappa}}l\right]\right\}^{-1} \\ &\quad\times\left\{\exp\left[\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(l-x)\right]+\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(l-x)\right]\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\exp\left[-2n\sqrt{\frac{p}{\kappa}}l\right]\left\{\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x\right]\right. \\ &\quad\left.+\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(2l-x)\right]\right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(2nl+x)\right] \\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(2nl+2l-x)\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(2nl+x)\right] \\ &\quad-\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\exp\left[-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(2nl-x)\right].\end{aligned}$$

利用 Laplace 变换的反演公式 (见例 10.8)

$$\frac{1}{p}e^{-\alpha\sqrt{p}} \risingdotseq \operatorname{erfc}\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}, \tag{19.25}$$

其中

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{19.26}$$

称为余误差函数，就可以得到定解问题 (19.16) 的另一种形式的解

$$u(x,t) = u_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \operatorname{erfc} \frac{2nl+x}{2\sqrt{\kappa t}} - u_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-)^n \operatorname{erfc} \frac{2nl-x}{2\sqrt{\kappa t}}. \tag{19.27}$$

当然，由于此定解问题的解存在唯一性，就保证了这两个不同形式的解实际上是相等的，由余误差函数的有关公式也可以将解式 (19.24) 化为 (19.27)．但是，从数值计算的角度看，这两个不同形式的解有各自的最佳适用范围．解式 (19.24) 主要适用于 t 大时，因为函数 $\exp\left\{-\left[(2n+1)\pi/2l\right]^2\kappa t\right\}$ 很快地趋于 0 ，在 (19.24) 的级数中只要取很少几项就可以达到足够的精度；解式 (19.27) 更适用于 t 小时，因为这时余误差函数 $\operatorname{erfc}(2nl+x)/2\sqrt{\kappa t}$ 和 $\operatorname{erfc}(2nl-x)/2\sqrt{\kappa t}$ 中的宗量很大，由余误差函数的定义 (19.26) 式就可以看出，它们也将很快地趋于 0．

19.2 Fourier 变换

Fourier 变换可对空间变量进行．根据空间变量的变化区间，可以选用 Fourier 变换 (包括正弦变换和余弦变换) 或有限正弦、余弦变换．例如，对于无界区间 $(-\infty,\infty)$ 上的函数 $f(x)$ ，如果在任意有限区间上只有有限个极大极小和有限个第一类间断点，且积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，则它的 Fourier 变换存在，

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \tag{19.28}$$

而逆变换 (反演) 是

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k. \tag{19.29}$$

这里的 Fourier 变换和逆变换的形式可能和读者熟悉的形式略有不

同. (19.28) 和 (19.20) 的形式更加对称，更多地为物理学所采用.

如果 $f(x)$ 是定义在半无界区间 $[0,\infty)$ 上，则可根据 $x=0$ 端边界条件的不同类型，选用正弦变换

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, \tag{19.30}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F(k)\sin kx\mathrm{d}k, \tag{19.31}$$

或余弦变换

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\cos kx\mathrm{d}x, \tag{19.32}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} F(k)\cos kx\mathrm{d}k. \tag{19.33}$$

如果 $f(x)$ 是定义在有界区间上，则应采用有限正弦或余弦变换.

这一节介绍无界空间上的 Fourier 变换. 为了将 Fourier 变换应用于求解偏微分方程定解问题，当然就要涉及函数的一、二阶导数的 Fourier 变换. 设 $f(x)$ 的 Fourier 变换存在，并且引进记号

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\mathscr{F}[f(x)], \tag{19.34}$$

于是，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\ &\qquad=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

由于积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，就一定有 $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$，所以

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\mathrm{i}k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{i}kF(k) = \mathrm{i}k\mathscr{F}[f(x)].\end{aligned} \tag{19.35}$$

更进一步，当然就有

$$\mathscr{F}[f''(x)] = -k^2\mathscr{F}[f(x)]. \tag{19.36}$$

下面就用 Fourier 变换来求解上一节的例 19.1 和例 19.2．对于例 19.1，即定解问题 (19.1)，可以假设 $u(x,t)$ 的 Fourier 变换存在，

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \tag{19.37}$$

并设

$$F(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \tag{19.38}$$

这样，在作 Fourier 变换后，定解问题 (19.1) 就变为

$$\frac{\mathrm{d}U(k,t)}{\mathrm{d}t} + \kappa k^2 U(k,t) = F(k,t), \tag{19.39a}$$

$$U(k,t)\Big|_{t=0} = 0, \tag{19.39b}$$

用常数变易法求解这个一阶常微分方程的初值问题，就得到

$$U(k,t) = \mathrm{e}^{-\kappa k^2 t}\int_0^t F(k,\tau)\mathrm{e}^{\kappa k^2\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{19.40}$$

再求反演，

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k \\ &= \int_0^t \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k,\tau)\mathrm{e}^{-\kappa k^2(t-\tau)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

利用 (4.29) 式的结果，可以算出

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\kappa k^2(t-\tau)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\kappa k^2(t-\tau)}\cos kx\mathrm{d}k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{x^2}{4\kappa(t-\tau)}\right], \end{aligned}$$

再利用

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k,t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k,$$

根据 Fourier 变换的卷积公式 (请读者自己证明)，

$$\mathscr{F}[f_1(x)]\mathscr{F}[f_2(x)]=\mathscr{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right], \tag{19.41}$$

就能最后得到

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\int_0^t\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{2\kappa(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi}}\int_0^t\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\tau)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\kappa(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\xi\right\}\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{t-\tau}}.\end{aligned} \tag{19.42}$$

这和上一节中得到的解式 (19.11) 的形式完全一样. 从解法上看，Fourier 变换的反演问题似乎要比 Laplace 变换简单一些，因为往往不需要用留数定理来计算反演中出现的定积分. 就这个例子而言，两种方法都要用到卷积公式.

再来解无界弦上的自由振动问题，定解问题见 (19.12) 式. 仍设 $u(x,t)$ 的 Fourier 变换存在，

$$U(k,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \tag{19.43}$$

并设

$$\Phi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \tag{19.44}$$

$$\Psi(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x, \tag{19.45}$$

于是，在作 Fourier 变换后，定解问题 (19.12) 就变为

$$\frac{\mathrm{d}^2U(k,t)}{\mathrm{d}t^2}+k^2a^2U(k,t)=0, \tag{19.46a}$$

$$U(k,t)\Big|_{t=0}=\Phi(k),\qquad U(k,t)\Big|_{t=0}=\Psi(k). \tag{19.46b}$$

这是一个二阶常微分方程的初值问题，解之即得

$$U(k,t)=\Phi(k)\cos kat+\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}. \tag{19.47}$$

根据 Fourier 变换的反演公式，就可以求出

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi(k)\cos kat+\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k.$$

注意

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k)\cos kat\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\&\qquad=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x+at)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-at)}\right]\mathrm{d}k\\&\qquad=\frac{1}{2}\big[\phi(x+at)+\phi(x-at)\big],\end{aligned}$$

类似地，还有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(k)\frac{\sin kat}{ka}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\&\qquad=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(k)\left[\int_0^t\cos ka\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\\&\qquad=\int_0^t\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(k)\cos ka\tau\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}\tau\\&\qquad=\frac{1}{2}\int_0^t\Big[\psi(x+a\tau)+\psi(x-a\tau)\Big]\mathrm{d}\tau\\&\qquad=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

代入上面的结果，最后就得到

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\Big[\phi(x+at)+\phi(x-at)\Big]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.\tag{19.48}$$

这当然和用 Laplace 变换得到的形式完全一样.

19.3 半无界空间的情形

对于半无界空间，可以考虑选用正弦变换或余弦变换.

设在正弦变换下，

$$F(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, \tag{19.49}$$

于是

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f'(x)\sin kx\mathrm{d}x\\
&\quad=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[f(x)\sin kx\Big|_0^{\infty}-k\int_0^{\infty} f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right]\\
&\quad=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\int_0^{\infty} f(x)\cos kx\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{19.50}$$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f''(x)\sin kx\mathrm{d}x\\
&\quad=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\int_0^{\infty} f'(x)\cos kx\mathrm{d}x\\
&\quad=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\left[f(x)\cos kx\Big|_0^{\infty}+k\int_0^{\infty} f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right]\\
&\quad=\sqrt{\frac{2}{\pi}}kf(0)-k^2F(k).
\end{aligned} \tag{19.51}$$

由此可见，对于二阶偏微分方程的定解问题，则只有当定解问题中仅出现未知函数及其二阶偏导数，且在半无界空间的 $x=0$ 端给出的是第一类边界条件时，才可以选用正弦变换.

同样，对于余弦变换

$$G(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g(x)\cos kx\mathrm{d}x, \tag{19.52}$$

也有

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g'(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}g(0)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\int_0^{\infty} g(x)\sin kx\mathrm{d}x, \tag{19.53}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} g''(x)\cos kx\,\mathrm{d}x=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}g'(0)-k^2G(k). \tag{19.54}$$

所以，如果还限于上面的约定，则只有当定解问题中仅出现未知函

数及其二阶偏导数，而且在 $x=0$ 端给出的是第二类边界条件时，才可以选用余弦变换.

在明确了正弦变换和余弦变换的选用原则之后，现在我们可以着手讨论下一个例题了.

例 19.4 求解半无界杆的热传导问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\qquad 0<x<\infty,\quad t>0;\tag{19.55a}$$

$$u\Big|_{x=0}=u_0,\qquad t>0;\tag{19.55b}$$

$$u\Big|_{t=0}=0,\qquad 0<x<\infty,\tag{19.55c}$$

其中 u_0 为常数.

解 显然，现在应该用正弦变换. 设

$$U(k,t)=\mathscr{F}[u(x,t)]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\sin kx\mathrm{d}x,\tag{19.56}$$

则有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right]&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\sin kx\mathrm{d}x\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}ku_0-k^2U(k,t).\end{aligned}\tag{19.57}$$

于是，在经过 Fourier 变换后，定解问题 (19.54) 就转化为一阶常微分方程的初值问题

$$\frac{\mathrm{d}U(k,t)}{\mathrm{d}t}+\kappa k^2U(k,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\kappa ku_0,\tag{19.58a}$$

$$U(k,t)\Big|_{t=0}=0,\tag{19.58b}$$

解得

$$U(k,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{u_0}{k}\left[1-\mathrm{e}^{-\kappa k^2t}\right].\tag{19.59}$$

所以

$$u(x,t)=\frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{k}\left[1-\mathrm{e}^{-\kappa k^2t}\right]\sin kx\,\mathrm{d}k.$$

代入 (10.29) 和 (10.41) 式的结果，

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx}{k}\mathrm{d}k = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx}{k}\mathrm{e}^{-\kappa k^2 t}\mathrm{d}k = \sqrt{\pi}\int_0^{x/2\sqrt{\kappa t}} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi,$$

就得到

$$u(x,t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{\kappa t}} \mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi = \mathrm{erfc}\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}. \tag{19.60}$$

这个定解问题显然相当于例 19.3 的 $l\to\infty$ 的情形. 将该定解问题的解 (19.27) 取极限 $l\to\infty$ ，因为级数中只有一项不为 0 ，立即就可以得到这个结果.

再讨论一个上半平面内的稳定问题. 由于定解问题与时间无关，所以，如果可能的话，一般应先考虑作 Fourier 变换.

例 19.5 求解半无界空间的稳定问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \quad y > 0; \tag{19.61a}$$

$$u\Big|_{y=0} = f(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{19.61b}$$

解 显然，本题仍应该用正弦变换. 设

$$U(x,k) \equiv \mathscr{F}[u(x,y)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,y)\sin ky\,\mathrm{d}y, \tag{19.62}$$

则有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\sin kx\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}kf(x) - k^2U(x,y).\end{aligned} \tag{19.63}$$

于是，在经过 Fourier 变换后，定解问题 (19.61) 就转化为求无界区间 $-\infty < x < \infty$ 上

$$\frac{\mathrm{d}^2U(x,k)}{\mathrm{d}x^2} - k^2U(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}kf(x) \tag{19.64}$$

的有界解. 再利用例 11.11 的结果，有

$$U(x,k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-k|x-x'|}f(x')\,\mathrm{d}x'. \tag{19.65}$$

最后，根据正弦变换的逆变换公式，就可以求得

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-k|x-x'|}f(x')\mathrm{d}x'\right]\sin ky\mathrm{d}k\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x')\left[\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-k|x-x'|}\sin ky\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}x'\\&=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')}{(x-x')^2+y^2}\mathrm{d}x'.\end{aligned} \tag{19.66}$$

这正是上半平面的 Poisson 公式 (见 (3.44b) 式)．

19.4 关于积分变换的一般讨论

以上介绍了两类积分变换 (Laplace 变换和 Fourier 变换，包括 Fourier 变换的另外两种特殊形式，正弦变换和余弦变换) 在求解偏微分方程定解问题中的应用．我们可以把这些变换统一写成

$$F(k)=\int_a^b K(k,x)f(x)\mathrm{d}x, \tag{19.67}$$

它把自变量 $x\in[a,b]$(这里的 x 也可以代表时间) 的函数 $f(x)$ 变换为复变量 k 的函数 $F(k)$ ，其中 $K(k,x)$ 是积分变换的核，

Laplace 变换 $K(k,x)=\mathrm{e}^{-kx},\qquad 0\le x<\infty;$ (19.68a)

Fourier 变换 $K(k,x)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx},\qquad -\infty<x<\infty;$ (19.68b)

正弦变换 $K(k,x)=\sin kx,\qquad 0\le x<\infty;$ (19.68c)

余弦变换 $K(k,x)=\cos kx,\qquad 0\le x<\infty,$ (19.68d)

其他还有

Hankel 变换 $K(k,x)=x\mathrm{J}_n(kx),\qquad 0\le x<\infty;$ (19.68e)

Mellin 变换 $K(k,x)=x^{k-1},\qquad 0\le x<\infty.$ (19.68f)

就一个具体的偏微分方程 (为了叙述的方便，不妨仍限于二阶偏微分方程) 定解问题而言，到底应当选用哪一种积分变换，不外乎要考虑以下几个原则：

原则 1 *所涉及的自变量的变化区间和该变换的要求是否一致*．具体说来，如果自变量的变化区间是 $(-\infty, \infty)$，那么，在上述这几种变换中，就只可能考虑选用 Fourier 变换；如果自变量的变化区间是 $[0, \infty)$，则其他几种积分变换都可以考虑．

原则 2 *根据对于未知函数性质的了解，特别是函数在 $x \to (\pm)\infty$ 的行为，判断该种积分变换是否存在*．这里需要提到，对于 Laplace 变换，变换的核是 e^{-kx}，因此对 $f(x)$ 的要求较低，甚至可以允许 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 是发散的； Hankel 变换的核是衰减振荡函数，对 $f(x)$ 的要求也不高； Fourier 变换、正弦变换和余弦变换的核是周期等幅振荡函数，因此要求 $x \to (\pm)\infty$ 时 $f(x) \to 0$； Mellin 变换对函数 $f(x)$ 的要求最高，因为它的变换核是幂函数 x^{k-1}．

原则 3 *要求函数 $f(x)$ 及其导数 $f^{(n)}(x)$ 在该变换下有简单的代数关系*．例如， Laplace 变换和 Fourier 变换都满足这个要求．对于正弦变换和余弦变换，只有函数的偶数阶导数 (例如 $f''(x)$) 的换式才能表示成 $F(k)$ 的线性函数 (见 (19.51) 和 (19.54) 式)，函数的奇数阶导数却不能如此 (见 (19.50) 和 (19.53) 式)．这样，只有定解问题只涉及未知函数及其对该自变量的偶数阶偏导数时，才可以选用正弦或余弦变换．更具体地说，对于热传导方程，尽管时间 t 的变化范围是 $[0, \infty)$，与正弦或余弦变换的要求一致，但由于方程中只出现未知函数对 t 的一阶偏导数，所以就无法应用这两种变换．对于波动方程，只要方程中不出现对 t 的一阶偏导数 (相当于在物理上要求无阻尼)，那么，在原则上，至少从这一条要求看，还是许可对时间变量 t 作正弦或余弦变换的．

原则 4 在满足原则 3 的基础上，函数及其导数在该变换下存在简单的代数关系，那么，在这种代数关系中，不可避免地会出现 *函数及其低阶导数的特殊值*．当然，要能成功地实现该变换，

必须要求这些特殊值已知，更明确地说，就要求这些特殊值 正好由定解问题中的定解条件给出．具体说来，对于 Laplace 变换，要求初始条件型的定解条件，即如果要求给出函数导数的特殊值的话，一定是函数及其导数在同一点的数值．而对于其他各种积分变换，要求的边界条件型的定解条件．

应该说，上面的原则 3 还只是适用于常系数的微分方程．如果我们讨论的变系数的偏微分方程定解问题，那么，这一条还需要修改．例如，对于偏微分方程

$$\big[L_1(x)+L_2(y)\big]u(x,y)=f(x,y),$$

其中 $L_1(x)$ 和 $L_2(y)$ 分别是 x 和 y 的（二阶）微分算符，假定算符 $L_1(x)$ 中的系数都是 x 的实函数，再设 $u(x,y)$ 也是实函数，则积分变换

$$\int_a^b K(k,x)u(x,y)\mathrm{d}x=U(k,y) \tag{19.69}$$

之下，方程变为

$$\begin{aligned}&\int_a^b K(k,x)f(x,y)\mathrm{d}x\\&\qquad=\int_a^b K(k,x)\big[L_1(x)u(x,y)\big]\mathrm{d}x+L_2(y)\int_a^b K(k,x)u(x,y)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

即

$$\int_a^b \big[M_1(x)K(k,x)\big]u(x,y)\mathrm{d}x+L_2(y)U(k,y)=F(k,y), \tag{19.70}$$

其中 $M_1(x)$ 是算符 $L_1(x)$ 的伴算符．为了保证方程 (19.70) 是关于 $U(k,y)$ 的微分方程， $M_1(x)K(k,x)$ 必须与 $K(k,x)$ 成正比，

$$M_1(x)K(k,x)=\lambda K(k,x). \tag{19.71}$$

这样，就限定了我们所能选择的变换核 $K(k,x)$．例如，在柱坐标系求解 Laplace 方程或 Poisson 方程时，对于径向变量 r，就只能选用 Hankel 变换．

下面就举一个应用 Hankel 变换的例子．

例 19.6 应用 Hankel 变换求解带电导体圆盘的静电势问题.

解 这个问题在 16.8 节中已经讨论过. 当时在旋转扁椭球坐标系下得到了这个问题的解. 对于这个坐标系，用的较少，读者不太熟悉. 比较通用的办法是采用大家都比较熟悉的柱坐标系. 这时，定解问题便是

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,\qquad 0<r<\infty,\ z>0; \tag{19.72a}$$

$$u\Big|_{r=0}\ \text{有界},\qquad u\Big|_{r\to\infty}\to 0; \tag{19.72b}$$

$$u\Big|_{z=0}=u_0,\qquad r<a; \tag{19.72c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=0,\qquad r>a; \tag{19.72d}$$

$$u\Big|_{z\to\infty}\to 0. \tag{19.72e}$$

所谓 Hankel 变换，即是令

$$U(p,\ z)=\int_0^\infty u(r,\ z)\mathrm{J}_0(pr)r\mathrm{d}r. \tag{19.73}$$

容易证明，在边界条件 (19.72b) 之下，

$$\int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\mathrm{J}_0(pr)r\mathrm{d}r=-p^2U(p,\ z). \tag{19.74}$$

所以，方程 (19.72a) 和边界条件 (19.72b) 就变换为

$$\frac{\mathrm{d}^2U(p,\ z)}{\mathrm{d}z^2}-p^2U(p,\ z)=0, \tag{19.75a}$$

同样，边界条件 (19.72e) 就变换为

$$U(p,\ z)\Big|_{z\to\infty}\to 0. \tag{19.75b}$$

解之即得

$$U(p,\ z)=A(p)\mathrm{e}^{-pz}.$$

现在的问题是，难以将平面 $z=0$ 上的边界条件 (19.72c) 和 (19.72d) 也代入变换 (19.73)，因为这一组边界条件给出的是 $0\le r<a$ 时 $u(r,\ z)\Big|_{z=0}$ 的数值和 $r>a$ 时 $\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}$ 的数值. 这样，就只得先求反

演，而得到了定解问题 (19.72) 的积分形式的解

$$u(r,\ z)=\int_0^\infty A(p)\mathrm{e}^{-pz}\mathrm{J}_0(pr)p\mathrm{d}p. \tag{19.76}$$

下面的问题便是要设法定出函数 $A(p)$. 为此，可以将 (19.76) 式代入边界条件 (19.72c) 和 (19.72d)，得到一对方程

$$\begin{aligned}\int_0^\infty A(p)\mathrm{J}_0(pr)p\mathrm{d}p &= u_0, \qquad 0<r<a;\\ \int_0^\infty A(p)\mathrm{J}_0(pr)p^2\mathrm{d}p &= 0, \qquad r>a.\end{aligned}$$

关于这种从一对 (含 Bessel 函数的积分) 方程中求函数 $A(p)$ 的问题，参考书目 [13] 中给出了某些特殊情形下的解 (见该书第二册，87～89 页)，例如，方程组

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^\alpha f(t)\mathrm{J}_\nu(xt)\mathrm{d}t &= g(x), \qquad 0<x<1,\\ \int_0^\infty f(t)\mathrm{J}_\nu(xt)\mathrm{d}t &= 0, \qquad x>1\end{aligned}$$

的解就是

$$\begin{aligned}f(t) =& \frac{(2t)^{1-\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)}\\ &\times\int_0^1 x^{1+\alpha/2}\mathrm{J}_{\nu+\alpha/2}(xt)\mathrm{d}x\int_0^1 g(xy)y^{\nu+1}\left(1-y^2\right)^{\alpha/2-1}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

所以，就能定出

$$A(p)=\frac{2u_0}{\pi}\frac{\sin ap}{p^2}.$$

所以，带电导体圆盘的静电势就是

$$U(r,\ z)=\frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pz}\mathrm{J}_0(pr)\frac{\sin ap}{p}\mathrm{d}p. \tag{19.77}$$

以上讨论的都是无界或半无界区间上的积分变换，它们的共同特点是复变量 k 的取值也是连续的，表现为逆变换 (反演公式) 也都是对 k 的积分. 在实用中还有有界区间上的积分变换，由于

这时的 k 只能取离散值，所以可以把变换核记为 $K_n(x)$. 例如，常见的有界区间上的积分变换有

有限正弦变换　$K_n(x)=\sin nx,\quad n=1,2,3,\cdots,\qquad 0\le x\le\pi;$

有限余弦变换　$K_n(x)=\cos nx,\quad n=0,1,2,\cdots,\qquad 0\le x\le\pi;$

Legendre 变换　$K_n(x)=\mathrm{P}_n(x),\quad n=0,1,2,\cdots,\qquad -1\le x\le 1.$

可以看出，这些积分变换的核恰好就是定义在各自区间上的本征函数. 所以，在应用这些变换求解偏微分方程的定解问题时，和分离变量法并没有什么原则的差别，得到的解的形式也会和分离变量法一样，因此，这里就不作讨论了.

*19.5　小波变换简介

“小波分析”，是近年来发展起来的一个比较新的理论课题和应用数学方法. 小波，作为表示函数的一种新的基，作为时间－频率分析的一种技术，也已经形成为一个新的数学学科，而且，还处在迅速发展的过程之中. 本节只能从积分变换的角度，对小波变换作一个入门性的介绍. 准确地说，小波分析目前包括两部分，即“积分小波变换”和“小波级数”.

先分析一下传统的 Fourier 变换. 大家知道，在 $(-\infty,\infty)$ 上定义了一个函数 $f(t)$，只要 $f(t)$ 满足一定条件，则它的 Fourier 变换

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t \tag{19.78a}$$

以及逆变换

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{19.78b}$$

都存在. 通常，变量 t 代表时间，ω 代表频率. $F(\omega)$ 就给出了信号 $f(t)$ 的频谱. 从 Fourier 变换的公式就可以看出，为了研究一个信号的频谱特性，必须检测出信号在 $(-\infty,\infty)$ 的整个时间范围内的

全部变化情况，甚至包括将来的变化. 除了纯理论的研究外，在实用上这是很难做到的. 另一方面，如果信号在某一时刻 (的小邻域内) 发生了变化，那么，整个频谱都会受到影响. 作为一个极端的情形，只出现在 t_0 时刻的脉冲信号 $\delta(t-t_0)$，其频谱是 $e^{-i\omega t_0}/\sqrt{2\pi}$，就覆盖了全部频率范围.

为了弥补 Fourier 变换的不足，早在半个世纪前，就有人提出过"加窗" Fourier 变换，通过引进时间局部化的"窗函数" $g_\alpha(t-b)$，使得我们可以选择任意一个时段 (以 $t=b$ 时刻为中心的一定宽度范围内) 的信号，而且，通过观测信号在某一频率附近的频谱就可以获得此信号的足够精确的信息. 而后平移窗函数，即改变 b，就可以覆盖整个时域. Gauss 型的函数就是一个这样的窗函数. 由于 Gauss 型函数

$$g_\alpha(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\exp\left\{-\frac{t^2}{4\alpha}\right\}$$

的 Fourier 变换

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\exp\left\{-\frac{t^2}{4\alpha}\right\}e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\alpha\omega^2}, \tag{19.79}$$

仍然是 Gauss 型的函数，所以，根据 Fourier 变换的卷积公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)f_2(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\xi)F_2(\omega-\xi)d\xi, \tag{19.80a}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_1(t)e^{-i\omega t}dt=F_1(\omega), \tag{19.80b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f_2(t)e^{-i\omega t}dt=F_2(\omega), \tag{19.80c}$$

对于任意函数 $f(t)$，就有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)g_\alpha(t-b)e^{-i\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)e^{-i(\omega-\xi)b}e^{-\alpha(\omega-\xi)^2}d\xi, \tag{19.81}$$

其中， $F(\omega)$ 是 $f(t)$ 的 Fourier 变换，

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \tag{19.82}$$

对于这个结果，可以把 (19.81) 式的左端理解为函数 $g_\alpha(t-b)e^{i\omega t}$ 和 $f(t)$ 的内积

$$\left(g_\alpha(t-b)e^{i\omega t},\, f(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[g_\alpha(t-b)e^{i\omega t}\right]^* f(t) dt,$$

而右端则是它们的变换的内积，

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\omega-\xi)b} e^{-\alpha(\omega-\xi)^2},\, F(\xi)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\omega-\xi)b} e^{-\alpha(\omega-\xi)^2}\right]^* F(\xi) d\xi.$$

这个结果不过是更普遍的 Parseval 方程 (见 18.1 与 18.2 节)

$$\left(f_1(t),\, f_2(t)\right) = \left(F_1(\xi),\, F_2(\xi)\right) \tag{19.83}$$

的一个特例．从物理上看，由于函数 $g_\alpha(t-b)$ 在 $t=b$ 处有一个尖锐的峰，

$$\lim_{\alpha\to 0} g_\alpha(t-b) = \delta(t-b),$$

所以，在 (19.81) 式中，对于左端积分的贡献主要来自 $t=b$ 附近，而对于右端积分的贡献则主要来自 $\xi=\omega$ 附近．换句话说，信号 $f(t)$ 在 $t=b$ 时刻的信息可以通过在频率 $\xi=\omega$ 附近观测这个信号的频谱而得到．可以把 (19.81) 式的右端改写为

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-i\omega b}\right) \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) g_{1/(4\alpha)}(\xi-\omega) e^{i\xi b} d\xi,$$

(19.81) 式说明，若当取 $g_\alpha(t)$ 为信号的时间窗函数，则 $g_{1/(4\alpha)}(\xi)$ 为相应的频谱的频率窗函数．不妨定义

$$\bar{t}_{g_\alpha} = \left(g_\alpha(t),\, t g_\alpha(t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} t \left|g_\alpha(t)\right|^2 dt \tag{19.84}$$

为 $g_\alpha(t)$ 的中心．由于 $g_\alpha(t)$ 为偶函数，所以 $\bar{t}_{g_\alpha}=0$．在此基础上，可以进一步定义 $g_\alpha(t)$ 的半宽度

$$\Delta_{g_\alpha} \doteq \sqrt{\frac{\left((t-\bar{t})g_\alpha(t),\, (t-\bar{t})g_\alpha(t)\right)}{\left(g_\alpha(t),\, g_\alpha(t)\right)}} \tag{19.85}$$

显然有

$$\Delta_{g_\alpha} = \sqrt{\alpha}. \tag{19.86}$$

同样，可以求出 $g_{1/(4\alpha)}$ 中心

$$\bar{\omega}_{g_{1/(4\alpha)}} = 0 \tag{19.87}$$

和半宽度

$$\Delta_{g_{1/(4\alpha)}} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}. \tag{19.88}$$

所以，时间窗的宽度 $2\Delta_{g_\alpha}$ 与频率窗的宽度 $2\Delta_{g_{1/(4\alpha)}}$ 的乘积为常数，

$$\left(2\Delta_{g_\alpha}\right) \times \left(2\Delta_{g_{1/(4\alpha)}}\right) = 2. \tag{19.89}$$

我们也可以在 $t-\xi$ 平面上以 (b,ω) 点为中心作矩形 $b-\Delta_{g_\alpha} \le t \le b+\Delta_{g_\alpha}, \omega-\Delta_{g_{1/(4\alpha)}} \le \xi \le \omega+\Delta_{g_{1/(4\alpha)}}$ 来形象化地表示时间－频率的局部化 (见图 19.1)．这个矩形

$$\left[b-\Delta_{g_\alpha}, b+\Delta_{g_\alpha}\right] \times \left[\omega-\Delta_{g_{1/(4\alpha)}}, \omega+\Delta_{g_{1/(4\alpha)}}\right]$$

就称为上述加窗 Fourier 变换的时间－频率窗．时间窗的宽度 $2\Delta_{g_\alpha}$ 称为时间－频率窗的宽度，频率窗的宽度 $2\Delta_{g_{1/(4\alpha)}}$ 称为时间－频率窗的高度．时间－频率窗的宽度、高度以及面积都是固定的．

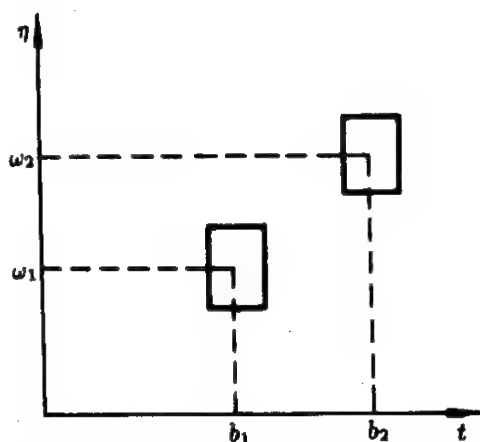


图 19.1　Gabor 变换的时间－频率窗

以上介绍的是一种特殊形式的加窗 Fourier 变换，即窗函数为 Gauss 型函数的加窗 Fourier 变换，称为 Gabor 变换．也还可以取别的形式的窗函数 $w(t)$，如要求 $w(t)$ 及 $tw(t)$ 均平方可积 (因此宽度 Δ_w 为有限值)，同样，它的 Fourier 变换 $W(\xi)$ 及 $\xi W(\xi)$ 也平方可积 (因而宽度 Δ_W 也为有限值)，这样得到的加窗 Fourier 变换就称为短时 Fourier 变换．Gabor 变换当然是短时 Fourier 变换的一种．

Gabor 变换或其他短时 Fourier 变换的缺点是：它们的时间－频率窗是固定的，并不能随频率的高低而适当地调整. 因为频率与单位时间内的周期数成正比，所以，理想的情况是：要精确研究高频现象，就应当取窄的时间窗；而要研究低频现象，则不妨取较宽的时间窗. 因此， Gabor 变换或其他短时 Fourier 变换不适合于处理频域宽、变化激烈的信号. 而积分小波变换则是针对这类问题发展起来的.

要介绍积分小波变换，首先先要建立基小波及小波的概念. 如果 $h(t)$ 及其 Fourier 变换 $H(\omega)$ 均为平方可积函数，宽度均为有限值，且满足相容性条件

$$C_h = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|H(\omega)|^2}{|\omega|} < \infty, \tag{19.90}$$

则称 $h(t)$ 为基小波. 条件 (19.90) 意味着 $H(0)=0$ ，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) = 0. \tag{19.91}$$

这正是称为小波的原因. 在建立积分小波变换的反演时，需要用到相容性条件.

给出了基小波 $h(t)$ 后，通过平移和伸缩，可以得到一族函数

$$h_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} h\left(\frac{t-b}{a}\right), \qquad a \neq 0, \tag{19.92}$$

称为小波. 而信号 $f(t)$ 的积分小波变换则定义为

$$(\mathscr{W}_h f)(b,a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h^*\left(\frac{t-b}{a}\right) \mathrm{d}t = \left(h_{b,a},\, f\right). \tag{19.93}$$

设函数 $h(t)$ 的中心和半宽度分别为 $\bar{t}$ 和 Δ_h ，则函数 $h_{a,b}(t)$ 是中心在 $b+a\bar{t}$ 且半宽度为 $|a|\Delta_h$ 的窗函数. 因此， (19.93) 式表示的积分小波变换给出了信号 $f(t)$ 在时间窗

$$\left[b+a\bar{t}-|a|\Delta_h,\, b+a\bar{t}+|a|\Delta_h\right]$$

内的局部信息. $|a|$ 变小时时间窗变窄； $|a|$ 变大时时间窗变宽.

容易求出 $h_{a,b}(t)$ 的变换为

$$H_{b,a}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\int_{-\infty}^{\infty}h\left(\frac{t-b}{a}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}b\xi}H(a\xi). \tag{19.94}$$

设 $H(\xi)$ 的中心和半宽度分别为 $\bar{\omega}$ 和 Δ_H ，令

$$\eta(\xi-\bar{\omega})\equiv H(\xi), \tag{19.95}$$

则 $\eta(\xi)$ 是中心和半宽度分别为 0 和 Δ_H 的窗函数. 根据 Parseval 方程，可以写出

$$(\mathscr{W}_h f)(b,a)=\sqrt{\frac{a}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^*(a\xi-\bar{\omega})F(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{19.96}$$

由于 $\eta(a\xi-\bar{\omega})$ 的半宽度为 $\Delta_H/|a|$ ，所以， (19.96) 式给出的又是 $H(\xi)$ 在频率窗

$$\left[\frac{\bar{\omega}}{a}-\frac{\Delta_H}{|a|},\frac{\bar{\omega}}{a}+\frac{\Delta_H}{|a|}\right]$$

内的局部信息. 这样的时间 - 频率窗就是

$$\left[b+a\bar{t}-|a|\Delta_h,\,b+a\bar{t}+|a|\Delta_h\right]\times\left[\frac{\bar{\omega}}{|a|}-\frac{1}{|a|}\Delta_H,\,\frac{\bar{\omega}}{|a|}+\frac{1}{|a|}\Delta_H\right],$$

宽度为 $2|a|\Delta_h$. 因此，积分小波变换具有“变焦”特性：在检测高频现象 (即 $|a|$ 小) 时，窗会自动变窄；而检测低频现象 (即 $|a|$ 大) 时，窗会自动变宽 (见图 19.2) . 而正是这种变焦特性，使得积分小波变换成为许多理论研究及工程技术应用的有力工具.

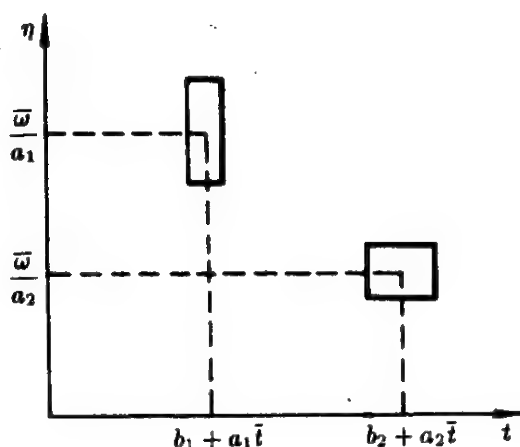


图 19.2　小波变换的时间 - 频率窗

再进一步，由信号 $f(t)$ 的积分小波变换$(\mathscr{W}_h f)(b,a)$ 值还可以重构 $f(t)$(即反演)，

$$f(t)=\frac{1}{C_h}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(\mathscr{W}_h f)(b,a)h_{b,a}(t)\mathrm{d}b\right]\frac{\mathrm{d}a}{a^2}. \tag{19.97}$$

证明从略. 从这个结果，就可以理解为什么对基小波要加上相容性条件的限制.

在实际应用中，还有积分小波变换的离散形式. 例如，通过 Haar 函数

$$h(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<1/2;\\ -1, & 1/2\le t<1;\\ 0, & t<0 \text{ 或 } t\ge 1\end{cases} \tag{19.98}$$

的二进制伸缩与平移，得到

$$h_{j,k}(t)=2^{-j/2}h\big(2^{-j}t-k\big),\qquad j, k\text{为任意整数}, \tag{19.99}$$

就构成一组正交归一基,

$$\big(h_{j,k},\, h_{l,m}\big)=\delta_{jl}\delta_{km}, \tag{19.100}$$

任意一个平方可积的函数 $f(t)$ 都可以 (在平均收敛意义下) 展开为小波级数,

$$f(t)=\sum_{j,k=-\infty}^{\infty}c_{j,k}h_{j,k}(t), \tag{19.101}$$

展开系数 $c_{j,k}$ 为

$$c_{j,k}=\big(h_{j,k},f\big)=(\mathscr{W}_h f)\Big(\frac{k}{2^j},\frac{1}{2^j}\Big). \tag{19.102}$$

小波分析及其应用是一门新兴的学科. 尽管它的早期思想可以追溯到本世纪的上半叶, 但是, 只是在近一二十年间才得到蓬勃的发展. 据报导，应用小波技术，对美国联邦调查局存贮的三亿个指纹进行了数据压缩，单是节约存贮光盘的费用就达到 3000 万美元，由此带来的指纹传输速度的提高而得到的效益更难以估计. 小波分析已经或将要广泛应用于信号处理、图象处理、地震勘探、语音识别与合成、雷达、CT 成象、机械故障诊断等等科技领域. 本节的介绍完全只能是关于小波分析的一点皮毛. 作者摘编这个阅读材料，目的只是希望有读者因此而萌发起了解与钻研小波分析的兴趣.

第二十章　Green 函数方法

在“ δ 函数”一章中，我们已经初步接触过 Green 函数，讨论了常微分方程 Green 函数的定义、对称性质及其求法．在此基础上，本章将继续这一话题，讨论偏微分方程定解问题 Green 函数的概念、对称性质以及常用的求法．不熟悉常微分方程 Green 函数的读者，应当先读“ δ 函数”那一章．

另外，在本章中，还经常要用到 Green 第二公式 (或简称 Green 公式)

$$\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r})\nabla^2 v(\boldsymbol{r}) - v(\boldsymbol{r})\nabla^2 u(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_\Sigma \left[u\nabla v - v\nabla u\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}, \quad (20.1)$$

其中 $f(\boldsymbol{r}) \equiv f(x,y,z)$, $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, Σ 是 V 的边界面，并且规定外法线方向为正．这个公式的成立条件及证明从略，读者可参阅高等数学教材中的有关章节．

20.1　Green 函数的概念

不妨先举一个静电场的例子．设在无界空间中有一定的电荷分布，电荷密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$ ．这样，在坐标为 $\boldsymbol{r}' = (x',y',z')$ 的体元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ 内的电量即为 $\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ ，它在空间 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ 点的电势是

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|},$$

现在，根据电势叠加原理，把空间中的全部电荷产生的电势叠加起来，就得到在 $\boldsymbol{r}$ 点的总电势为

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'. \quad (20.2)$$

这个结果说明，只要知道了单位点电荷在空间的电势分布，那么，通过电荷的分割与叠加，就可以得到任意电荷分布时的电势. 实际上，这种做法只不过是利用了偏微分方程的线性性质.

这个例子的简单之处是无界空间. 如果是有界空间，原则上仍然可以把空间内的电荷无限分割，但由于有边界条件的制约，在边界面上也会有一定的 (单层或偶极层的) 感生面电荷分布，也需要将这些面电荷无限分割. 当然，为了唯一地确定点电荷的电势，又需要指定适当的边界条件. 这样，在有界空间的情形下，我们面临的问题就是：如何通过 (适当边界条件下的) 点电荷电势的叠加，而给出任意电荷分布和任意边界条件时的电势. 这就是说，要用定解问题

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}' \in V \tag{20.3a}$$

$$\text{适当的边界条件} \tag{20.3b}$$

的解 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 叠加出

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r} \in V \tag{20.4a}$$

$$u\Big|_{\Sigma} = f(\Sigma) \tag{20.4b}$$

的解 $u(\boldsymbol{r})$，即把 $u(\boldsymbol{r})$ 用 $\rho(\boldsymbol{r})$, $f(\Sigma)$ 以及 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 表示出来.

为此，我们将方程 (20.3a) 和 (20.4a) 分别乘以 $u(\boldsymbol{r})$ 和 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$，相减，再在空间 V 内积分，即得

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r})\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2 u(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&\qquad = -\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_V \left[u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&\qquad = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[u(\boldsymbol{r}') - \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right].
\end{aligned}$$

根据 Green 公式，可以将上式左端的体积分化为面积分. 经过移项、整理，就有

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$
$$-\varepsilon_0 \iint\limits_\Sigma \left[u(\boldsymbol{r})\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla u(\boldsymbol{r})\right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}.$$

在上面的面积分中，第一项 $u(\boldsymbol{r})$ 在边界面 Σ 上的数值由边界条件 (20.4b) 给出，是已知的；$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 可由定解问题 (20.3) 求出，故而它的梯度 $\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 及其在边界面上的数值当然也可求；第二项中，$\nabla u(\boldsymbol{r})$ 在边界面上的数值未知，所以，为了要能够完成把 $u(\boldsymbol{r})$ 用 $\rho(\boldsymbol{r})$, $f(\Sigma)$ 以及 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 表示出来这一要求，就必须对 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 加上齐次边界条件

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_\Sigma = 0. \tag{20.3b}$$

于是，最后就得到

$$u(\boldsymbol{r}') = \iiint\limits_V G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} - \varepsilon_0 \iint\limits_\Sigma f(\Sigma)\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_\Sigma \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}, \tag{20.5}$$

或者把 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r}'$ 对换一下，

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} f(\Sigma')\nabla' G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\big|_{\Sigma'} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}' \tag{20.5$'$}$$

$$= \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} f(\Sigma')\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})}{\partial n'}\right|_{\Sigma'} \mathrm{d}\Sigma', \tag{20.5$''$}$$

其中的 ∇' 和 $\partial/\partial n'$ 表示对自变量 $\boldsymbol{r}'$ 微商，V' 和 Σ' 还是原来的空间区域和它的边界面，只不过是把它们的坐标变量改成了 $\boldsymbol{r}'$.

熟悉 Green 公式的读者会对上面的做法提出质疑：$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点肯定是不连续的，根本不能应用 Green 公式；上面得到的结果最多也只能是形式解. 为了弥补这一缺陷，可以将方程 (20.3a) 右端的电荷密度函数改为足够好的连续函数，它在一定尺度内明显不为 0，而总电量为 1 个单位 (这时当然就可以应用 Green 公式了)，在求出了 $u(\boldsymbol{r})$ 的表达式后再令这一尺度趋于 0. 这种做法正是重复了引进 δ 函数的极限过程，这种做法正是从 δ 函数倒退回去

的做法. 第十一章就曾经指出, 引入 δ 函数的好处恰恰就在于略去这种极限过程, 恰恰就在于可以把 δ 函数当成连续函数来处理. 因此, 在这个意义上说, 上面得到的结果是严格的, 是正确的. 另外一种严格的做法是把点电荷所在的 $\boldsymbol{r}'$ 点的附近挖去一个小体积, 在这个新的空间区域中应用 Green 公式 (必须注意, 现在的边界面除了原来的 Σ 之外, 还有在 $\boldsymbol{r}'$ 点处的界面), 然后再令这个小体积趋于 0. 毫无疑问, 这样得到的结果和 (20.5′) 式完全一致.

以上通过静电场的实例引入了 Poisson 方程在第一类边界条件下 (简称 Poisson 方程的第一边值问题) 的 Green 函数. 简言之, 所谓 Green 函数就是单位点电荷在齐次边界条件下的电势. 对于第二类或第三类边界条件, 原则上也可以类似地讨论. 从数学上说, 不含时间 (稳定问题) 的偏微分方程 (Laplace 方程, Poisson 方程, Helmholtz 方程 ⋯⋯) 在一定边界条件下的 Green 函数就可以定义为一个特殊的定解问题的解:

- *方程和原来定解问题的方程一样, 只是非齐次项改为 δ 函数 (点源)*;
- *同种类型的齐次边界条件.*

但是, 在某些特殊情形下, 这样定义的 Green 函数可能无解. 例如对于上面的 Poisson 方程定解问题 (20.4), 若边界条件 (20.4b) 改为

$$\left.\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right|_{\Sigma}=f(\Sigma), \tag{20.4b$'$}$$

则按照上面的讨论, Green 函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 在边界面上必须满足齐次的第二类边界条件

$$\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0.$$

在 Green 公式 (20.1) 中, 令 $u(\boldsymbol{r})=1$, $v(\boldsymbol{r})=G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$, 就应该有

$$\iiint\limits_V \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint\limits_{\Sigma}\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma,$$

可是, 将方程 (20.3a) 积分, 又得到

$$\iiint\limits_V \nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{1}{\varepsilon_0}.$$

这样， Green 函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 在边界面上的面积分必须满足

$$\iint\limits_\Sigma \frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial n}\mathrm{d}\Sigma = -\frac{1}{\varepsilon_0} \neq 0.$$

显然和边界条件 (20.4b′) 矛盾. 这说明，在齐次边界条件 (20.4b′) 下，方程 (20.4a) 一定无解，换句话说，这样的 Green 函数一定不存在. 在这种情形下，需要引进广义的 Green 函数. 有兴趣的读者请参阅参考书目 [1]，第 18.4 节. 这里从略.

20.2 稳定问题 Green 函数的一般性质

建立了稳定问题的 Green 函数概念之后，就需要讨论它的一般性质： Green 函数在点源附近的行为以及 Green 函数的对称性.

不妨仍然用静电场的语言来描述 Poisson方程第一边值问题的 Green 函数. 从上一节的分析可以看到，在空间 V 中的点电荷，必然要在边界面上产生一定的感生 (面) 电荷分布，从而使边界面成为等位面. 当边界接地时，又会得有一部分电荷流失或流入，使得边界面的电势与地相等 (取为 0) . 因此，决定 Green 函数的定解问题又可以等价 (在 V 内等价) 地写成无界空间中的 Poisson 方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \sigma(\Sigma)\right], \tag{20.6}$$

其中 $\sigma(\Sigma)$ 是边界面 Σ 上的感生面电荷密度. 相应地， (定义在 V 内的)Green 函数 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 就应该是这两部分电荷电势的叠加：单位点电荷 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ 的电势 $G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 和边界面上的感生电荷 $\sigma(\Sigma)$ 的电势 $g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$，

$$\nabla^2 G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \tag{20.7}$$

$$\nabla^2 g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(\Sigma). \tag{20.8}$$

显然，方程 (20.7) 的解为

$$G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \tag{20.9}$$

所以， $G_0(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点是不连续的．对于方程 (20.8)，因为感生电荷 $\sigma(\Sigma)$ 只分布在曲面 Σ 上，所以， $g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 及其一阶偏导数在曲面 Σ 之外 (特别是，在 V 内) 是处处连续的．把这两部分综合起来，就有

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} + g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'). \tag{20.10}$$

对于第三类边界条件，也有同样的结果．只不过 $g(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 的具体表达式会得有所不同．

对于其他类型的稳定问题，也可以模仿第十一章中的做法，证明它们的 Green 函数及其一阶偏导数具有和 Poisson 方程同样的连续性质．例如， Helmholtz 方程的 Green 函数，

$$\nabla^2\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V, \tag{20.11a}$$

$$\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{\Sigma} = 0. \tag{20.11b}$$

可以看出，除了 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点外， $\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 在 V 内是处处连续的．令

$$\hat{g}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'), \tag{20.12}$$

$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 是相应 Poisson 方程的 Green 函数．根据 (20.3) 和 (20.11)，可以得到

$$\nabla^2\hat{g}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') + k^2\hat{g}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = k^2G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V, \tag{20.13a}$$

$$\hat{g}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{\Sigma} = 0. \tag{20.13b}$$

由于方程 (20.13a) 右端的 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点是以 $1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 的形式发散的，所以， $\hat{g}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 在该点一定连续 (否则 $\nabla^2\hat{g}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 会出现 δ 函数)，这就说明 $\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 和 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 一样，在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点都是以 $1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 的形式发散的．更进一步， $\hat{g}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 的一阶偏导数在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点一定对数发散，但由于 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 的一阶偏导数在该点是二阶无穷

大，比对数发散更快，所以，仍然可以说， $\hat{G}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 和 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点的发散行为也还是一样的.

以上讨论的是三维空间中 Green 函数在点源处的行为. 值得注意，它和一维空间中 Green 函数的行为是不同的. 在第十一章中，我们曾经指出，一维空间中的 Green 函数是处处连续的，而它的一阶导数不连续. 这是容易理解的，因为“点源”的性质并不相同，一维空间中的点源实际上是三维空间中的面源. 在理解了一维空间和三维空间中 Green 函数的差异后，就不难预料，二维空间中的 Green 函数也应该表现出不同的行为.

对于二维空间中的 Poisson 方程第一边值问题，它的 Green 函数 $G(x,y;x',y')$ ，是定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]G(x,y;x',y')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(x-x')\delta(y-y'),\quad (x,y),(x',y')\in S, \tag{20.14a}$$

$$G(x,y;x',y')\big|_C=0 \tag{20.14b}$$

的解，其中 C 是平面区域 S 的边界. 模仿上面关于三维情形的讨论，可以得出，这时的 Green 函数 $G(x,y;x',y')$ 应当是

$$G(x,y;x',y')=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}+g(x,y;x',y'), \tag{20.15}$$

其中第一项是单位点电荷在无界空间中的电势 (还可以加上一个常数，取决于电势零点的选取)，在“点源” (实际上是三维空间中的线源) $\delta(x-x')\delta(y-y')$ 处是对数发散的；第二项 $g(x,y;x',y')$ 是边界上的感生电荷产生的电势，在 S 内处处连续.

现在再来讨论 Green 函数的对称性. 为此，先考察一下解式 (20.5′)，容易发现这个结果在物理上有费解之处：在右端的体积分中， $G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})$ 代表 $\boldsymbol{r}$ 处的单位点电荷在 $\boldsymbol{r}'$ 处的电势，它乘上在观测点 $\boldsymbol{r}'$ 处的电荷 $\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ ，并对观测点积分，却给出电荷分布密度函数为 $\rho(\boldsymbol{r})$ 时在 $\boldsymbol{r}$ 处的电势！对这个问题的回答就要涉及到 Green 函数的对称性. 因为，如果像无界空间的 Green 函数那样，关系式

$$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}) = G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') \tag{20.16}$$

成立的话，那么，(20.5′) 式就能改写成

$$u(\boldsymbol{r}) = \iiint\limits_{V'} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' - \varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma'} f(\Sigma')\nabla' G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{\Sigma'} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}', \tag{20.5‴}$$

体积分的物理意义就一清二楚了．第二项的面积分当然就是来自边界面上的感生面电荷的贡献．

下面就来证明 (20.16) 式．和第十一章中的做法一样，再引进 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')$，它满足的定解问题当然就是

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}''), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'' \in V, \tag{20.17a}$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\Big|_{\Sigma} = 0. \tag{20.17b}$$

将方程 (20.3a) 和 (20.17a) 分别乘以 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')$ 和 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$，相减，然后在区域 V 内积分，就得到

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{V} \left[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&\qquad = -\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\limits_{V}\left[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&\qquad = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left[G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r}'';\boldsymbol{r}')\right].
\end{aligned}$$

根据 Green 公式，将上式左端的体积分化为面积分，就有

$$\begin{aligned}
&G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}'') - G(\boldsymbol{r}'';\boldsymbol{r}') \\
&\qquad = -\varepsilon_0 \iint\limits_{\Sigma}\left[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') - G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}'')\right]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}.
\end{aligned}$$

代入边界条件 (20.3b) 和 (20.17b)，立即得出右端的面积分为 0．这样就证明了

$$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}'') = G(\boldsymbol{r}'';\boldsymbol{r}'),$$

将 $\boldsymbol{r}''$ 改写为 $\boldsymbol{r}$，这就是 (20.16) 式．

如果是第三类边界条件，上面的结论仍然正确. 请读者自己补上证明.

对于其他类型的稳定问题，它们的 Green 函数是否仍然有对称关系 (20.16)，需要具体讨论. 从原则上说，这涉及到 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 和 $G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})$ 是否都是方程 (20.3a) 的解.

20.3 三维无界空间 Helmholtz 方程的 Green 函数

在 20.1 节中，我们已经给出了三维无界空间 Poisson 方程的 Green 函数的具体形式，即 (20.9) 式. 现在，就再来求三维无界空间中 Helmholtz 方程的 Green 函数，即在三维无界空间中求解方程

$$\nabla^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')+k^2G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V. \tag{20.18}$$

关于无穷远处的边界条件，后面再讨论.

我们注意，方程 (20.18) 是一个非齐次方程，因此，可以按照求解非齐次方程的标准做法，或是先求出方程的一个特解，而将方程齐次化；或是将 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 按相应齐次问题的本征函数展开. 这两种做法，特别是第二种做法，原则上没有什么困难，这里不拟作具体的介绍. 现在，要强调的是，这又是一个特殊的非齐次方程：只在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'$ 点，非齐次项才不为 0 . 同时，更重要的是，由于这是在无界空间，可以适当地安置坐标架，以充分发挥 Laplace 算符的不变性，使问题得到充分的简化.

为此，首先作坐标平移，

$$\xi=x-x',\quad \eta=y-y',\quad \zeta=z-z', \tag{20.19}$$

即将点电荷所在点取为新坐标系的原点. 令 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=g(\xi,\eta,\zeta)$，于是， $g(\xi,\eta,\zeta)$ 满足方程

$$\nabla^2_{\xi,\eta,\zeta}g(\xi,\eta,\zeta)+k^2g(\xi,\eta,\zeta)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\xi)\delta(\eta)\delta(\zeta), \tag{20.20}$$

其中

$$\nabla^2_{\xi,\eta,\zeta}\equiv\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$$

是以直角坐标ξ,η,ζ为自变量的 Laplace 算符. 容易看出, 方程 (20.20) 是旋转不变的，$g(\xi,\eta,\zeta)$ 只是 $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ 的函数，$g(\xi,\eta,\zeta)=f(R)$. 因此，如果将直角坐标系 (ξ,η,ζ) 转换为球坐标系，则方程 (20.20) 将变为 $R\neq 0$ 点处的齐次方程

$$\frac{1}{R^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}\left[R^2\frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R}\right]+k^2f(R)=0 \tag{20.21}$$

(原因是在在 $R=0$ 点只存在单侧导数) 以及 $R=0$ 点处的边界条件 (在 $R=0$ 点处有一单位点电荷). 容易看出，方程 (20.21) 是零阶球 Bessel 方程，它的通解是 ①

$$f(R)=A(k)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}+B(k)\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}}{R}. \tag{20.22}$$

现在就根据 $R=0$ 和无穷远处的边界条件定出常数 $A(k)$ 和 $B(k)$. 先讨论无穷远处. 考虑到 Helmholtz 方程的实际背景，比如说，它是由波动方程经过分离变量 (分离去时间部分) 得到的. 这时，作为一个例子，假设要求得到的解在无穷远处为发散波. 取时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$，则 (20.22) 中的第一项为发散波，第二项为会聚波. 所以，应该有 $B(k)=0$. 剩下的常数 $A(k)$ 就应该由 $R=0$ 处的边界条件决定，更准确地说，由 $R=0$ 处点源的强度决定. 注意，这时并不能直接将 (20.22) 式代入 (20.20) 而定出 $A(k)$，原因是 $f(R)$ 或 $g(\xi,\eta,\zeta)$ 在 $R=0$ 处的导数并不存在. 另一方面，我们已经约定，凡是涉及 δ 函数的等式都应该从积分意义下去理解. 于是，很自然地，应当将方程 (20.20) 在 $R=0$ 附近的小体积内积分，

$$\iiint\nabla^2_{\xi,\eta,\zeta}f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta+k^2\iiint f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=-\frac{1}{\varepsilon_0}. \tag{20.23}$$

左端第一项的体积分应当化为面积分

---

① 如果作变换 $f(R)=w(R)/R$，则方程 (20.21) 化为

$$w''(R)+k^2w(R)=0.$$

也容易写出通解.

$$\iiint \nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = \iint \left[\nabla_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma},$$

因为这样就可以回避掉在 $R=0$ 点的求导问题. 取这个小体积为以 $R=0$ 点为球心, ρ 为半径的球体, 则

$$\begin{aligned}\iiint \nabla^2_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta &= \iint \left[\nabla_{\xi,\eta,\zeta} f(R)\right] \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma} \\ &= \iint \frac{\mathrm{d}f(R)}{\mathrm{d}R} R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\Big|_{R=\rho} \\ &= -4\pi A(k)(1-\mathrm{i}k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}.\end{aligned}$$

第二项的体积分可以直接算出,

$$\begin{aligned}\iiint f(R)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta &= 4\pi A(k)\int_0^\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}R\mathrm{d}R \\ &= 4\pi A(k)\left[(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}-1)-\mathrm{i}k\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\rho}\right].\end{aligned}$$

将这些结果代回到 (20.23) 式, 就有

$$-4\pi A(k) = -\frac{1}{\varepsilon_0},$$

所以, $A(k)=1/4\pi\varepsilon_0$, 与 k 无关. 这样, 最后就求出了三维无界空间 Helmholtz 方程的 Green 函数

$$g(\xi,\eta,\zeta) = f(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}, \tag{20.24}$$

或

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{20.25}$$

当 $k=0$ 时, 这个结果就回到 Poisson 方程的 Green 函数 (20.9) . 由于事先并不知道常数 A 与 k 无关, 否则在定出 $B(k)=0$ 后, 只要在 (20.22) 中取 $k=0$ 即可求出 A .

最后, 需要说明, 这个结果是在无穷远处为发散波, 并且取时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 的条件下得到的. 可以设想, 如果要求无穷远处为

会聚波，并且仍取时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ ，则 Green 函数应该是

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \tag{20.26}$$

如果是其他形式的无穷远条件，当然还会得到其他形式的解.

下面介绍另一种解法. 考虑到这是无界空间中的定解问题，可以采用 Fourier 变换. 现在要用的是三维 Fourier 变换. 令

$$g(\boldsymbol{K};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{20.27}$$

则方程 (20.18) 变为

$$\left[-K^2+k^2\right]g(\boldsymbol{K};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}, \tag{20.28}$$

所以，

$$g(\boldsymbol{K};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{1}{K^2-k^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}'}, \tag{20.29}$$

其中 $K^2=\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{K}=|\boldsymbol{K}|^2$. 再求反演，就有

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\frac{1}{K^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}\boldsymbol{K}. \tag{20.30}$$

可以看出， $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 只是 $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ 的函数. 不妨令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ ，然后改用 $\boldsymbol{K}$ 空间中的球坐标计算上面的三重积分，就得到

$$\begin{aligned}
G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\frac{1}{K^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{R}}\mathrm{d}\boldsymbol{K}\\
&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint\frac{1}{K^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR\cos\theta}K^2\sin\theta\mathrm{d}K\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{K^2}{K^2-k^2}\mathrm{d}K\int_0^\pi\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR\cos\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{K^2}{K^2-k^2}\left.\frac{(-1)}{\mathrm{i}KR}\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR\cos\theta}\right|_0^\pi\mathrm{d}K\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}R\varepsilon_0}\int_0^\infty\frac{K}{K^2-k^2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}KR}\right]\mathrm{d}K\\
&=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}R\varepsilon_0}\int_{-\infty}^\infty\frac{K}{K^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR}\mathrm{d}K.
\end{aligned}$$

应用留数定理容易计算出这个定积分. 考虑到在实轴上有两个奇点，$K=\pm k$，可以采用图 20.1 中的围道. 这样，当半径趋于 0 时，沿奇点 $K=\pm k$ 处半圆弧的积分值为

$$-\pi \mathrm{i} \lim_{K\to\pm k}(K\mp k)\frac{K}{K^2-k^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR}=-\frac{\pi \mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}kR},$$

所以，现在求得的三维无界空间 Helmholtz 方程的 Green 函数是

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}R\varepsilon_0}\times\frac{\pi \mathrm{i}}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos(kR)}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}. \end{aligned} \tag{20.31}$$

和前面用第一种方法得到的结果 (20.25) 式相比较，大家立刻发现：两种方法得出的结果竟然不同！造成这一矛盾的原因是，两种方法实际上是使用了不同的无穷远条件. 在第一种方法中，明确地限定了无穷远处为发散波. 在第二种方法中，乍一看来，似乎并没有使用无穷远条件. 但仔细分析一下，就会发现，将方程 (20.18) 变换为 (20.28) 时，实际上用到了 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 在无穷远处趋于 0 的要求，这只要回忆一下 19.2 节中公式 (19.35) 和 (19.36) 的成立条件即可. 既然两种方法使用了不同的无穷远条件，那么，得到不同的结果，也就是毫不奇怪的了.

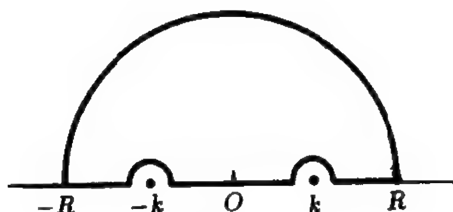


图 20.1

但是，我们绝不会只满足于对上述的矛盾得到一个正确的解释. 读者肯定会问：如果仍然限定无穷远处为发散波，能否还应用 Fourier 变换求解呢？回答是肯定的，但要采用特殊的技巧. 这个技巧就是要将方程 (20.18) 中的常数 k 添上一个虚部，变成 $k+\mathrm{i}\eta$ 或 $k-\mathrm{i}\eta$(约定 $\eta>0$)，在求出了 Green 函数后再令 $\eta\to 0$.

按照这种办法，例如，将方程 (20.18) 中的 k 改为 $k+\mathrm{i}\eta$，重复上面的步骤，就可以得到

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}R\varepsilon_0}\lim_{\eta\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K}{K^2-(k+\mathrm{i}\eta)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}KR}\mathrm{d}K. \tag{20.32}$$

再应用留数定理计算这个定积分. 因为现在在实轴上没有奇点，所以，采用图 20.2 中的围道，就能得到

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\mathrm{i}R\varepsilon_0}\lim_{\eta\to+0}\left[2\pi\mathrm{i}\times\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+\mathrm{i}\eta)R}\right]\\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}}{R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.\end{aligned} \tag{20.33}$$

显然，这样得到的 Green 函数和 (20.25) 式完全相同. 这就是说，只要把方程 (20.18) 中的 k 改为 $k+\mathrm{i}\eta$，并且在求出解式后再取极限 $\eta\to+0$，得到的 Green 函数就满足无穷远处为发散波 (规定时间因子为 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$) 的要求. 这种做法的根据是，在无穷远处为发散波的要求下，解的渐近形式必然具有相位因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kR}$，这样，如果将 k 改为 $k+\mathrm{i}\eta$，则上面的相位因子就变为 $\mathrm{e}^{-\eta R+\mathrm{i}kR}$，当 $R\to\infty$ 时趋于 0；而具有相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kR}$ 的会聚波，相应地变成 $\mathrm{e}^{\eta R-\mathrm{i}kR}$，不满足 $R\to\infty$ 时的有界要求，因而在作 Fourier 变换时将被自动剔除.

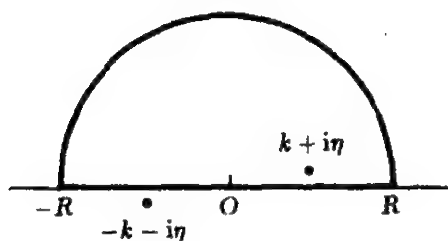


图 20.2

作为练习，读者可以把方程 (20.18) 中的 k 改为 $k-\mathrm{i}\eta$，重复上面的求解步骤，就可以发现，得到的 Green 函数就对应于无穷远处为会聚波.

20.4 圆内 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数

这一节讨论二维稳定问题的 Green 函数. 目的是通过对于圆内 Poisson 方程第一边值问题 Green 函数的讨论，再介绍一些求 Green 函数的常用方法.

圆内 Poisson 方程第一边值问题 Green 函数的定义是

$$\nabla_2^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \quad |\boldsymbol{r}|<a, |\boldsymbol{r}'|<a, \tag{20.34a}$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\big|_{r=a} = 0, \tag{20.34b}$$

其中

$$r^2 = x^2+y^2, \quad \nabla_2^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

首先介绍一种标准的做法，即考虑到方程 (20.34a) 是一个非齐次方程，所以应该将 Green 函数按相应齐次问题的本征函数展开，为此，采用平面极坐标系，坐标原点放在圆心，

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = R_0(r) + \sum_{m=1}^{\infty}\left[R_{m1}(r)\cos m\phi + R_{m2}(r)\sin m\phi\right]. \tag{20.35}$$

同样，将 δ 函数也按该组本征函数展开，

$$\begin{aligned}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') &= \delta(x-x')\delta(y-y') = \frac{1}{r'}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi') \\ &= \frac{1}{r'}\delta(r-r')\times\left\{\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\cos m\phi\cos m\phi'\right.\right. \\ &\qquad \left.\left. +\sin m\phi\sin\phi'\right]\right\}.\end{aligned} \tag{20.36}$$

于是，定解问题 (20.34) 就转化为求解 $R_0(r)$, $R_{m1}(r)$ 和 $R_{m2}(r)$．决定 $R_0(r)$ 的定解问题是

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}R_0(r)}{\mathrm{d}r}\right] = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'}\delta(r-r'), \tag{20.37a}$$

$$R_0(r)\text{有界}, \qquad R_0(a)=0. \tag{20.37b}$$

当 $r\neq r'$ 时，方程 (20.37a) 是齐次的，所以，在考虑到边界条件 (20.37b) 后，就有

$$R_0(r) = \begin{cases} A_0, & r<r', \\ B_0\ln\dfrac{r}{a}, & r>r'. \end{cases}$$

再根据 $R_0(r)$ 在 $r=r'$ 点的连续性，即 $R_0(r)$ 在 $r=r'$ 点连续，而 $R_0'(r)$ 不连续 (它可以由方程 (20.37a) 在点两侧积分得到)，

$$\left.\frac{\mathrm{d}R_0(r)}{\mathrm{d}r}\right|_{r'-0}^{r'+0}=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'},$$

就可以定出 A_0 和 B_0，

$$A_0=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r'}{a},\qquad B_0=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}.$$

于是

$$R_0(r)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r'}{a}, & r<r',\\[2mm] -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{a}, & r>r'.\end{cases}\tag{20.38}$$

完全模仿上面的做法，可以由

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m1}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\cos m\phi',\tag{20.39a}$$

$$R_{m1}(r)\text{有界},\qquad R_{m1}(a)=0\tag{20.39b}$$

求出 $R_{m1}(r)$，

$$R_{m1}(r)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{m}\left[\left(\dfrac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\dfrac{r}{r'}\right)^m\right]\cos m\phi', & r<r',\\[2mm] -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{m}\left[\left(\dfrac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\dfrac{r'}{r}\right)^m\right]\cos m\phi', & r>r'.\end{cases}\tag{20.40}$$

同样，由

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{m^2}{r^2}\right]R_{m2}(r)=-\frac{\delta(r-r')}{\pi\varepsilon_0 r'}\sin m\phi',\tag{20.41a}$$

$$R_{m2}(r)\text{有界},\qquad R_{m2}(a)=0\tag{20.41b}$$

求出 $R_{m2}(r)$，

$$R_{m2}(r)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{m}\left[\left(\dfrac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\dfrac{r}{r'}\right)^m\right]\sin m\phi', & r<r',\\[2mm] -\dfrac{1}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{m}\left[\left(\dfrac{rr'}{a^2}\right)^m-\left(\dfrac{r'}{r}\right)^m\right]\sin m\phi', & r>r'.\end{cases}\tag{20.42}$$

这样，就求得了圆内 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数，当

$r < r'$ 时，

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\frac{r'}{a} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^m - \left(\frac{r}{r'}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi')\right\}, \tag{20.43}$$

当 $r > r'$ 时，

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\frac{r}{a} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{rr'}{a^2}\right)^m - \left(\frac{r'}{r}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi')\right\}, \tag{20.44}$$

上面这种方法，将 Green 函数按相应齐次问题的本征函数展开，一般说来，得到的解式会是无穷级数. 当然，不排除在某些特殊情形下可以将级数求和. 例如，现在得到的解式 (20.43) 和 (20.44) 就是如此. 不过，这需要比较熟悉级数求和的技巧. 下面再介绍一种方法，如果能够成功的话，它将直接给出解的有限形式.

大家知道，一旦在接地圆中放上点电荷后，在圆周上必然出现感生电荷. 圆内任意一点的电势，就是点电荷的电势和感生电荷的电势的叠加. 前者在点电荷所在点是对数发散的，而后者在圆内是处处连续的. 如果我们能够方便地求出感生电荷在圆内所产生的电势，当然也就求出了整个圆内 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数. 现在要介绍的这种方法 (称为电象法)，其基本思想是企图将边界上的感生电荷用一个等价的点电荷代替. 换句话说，就把接地圆内的点电荷的问题等价地转化为无界空间中的两个点电荷 (一个是真实的点电荷，另一个是等价的“虚”电荷) 的问题. 这个“虚”电荷的等价性，就表现在它和圆内的真实的点电荷一起，在圆内能给出和原来问题同样的解. 而由于边值问题解的存在唯一性，我们知道，只要这两个点电荷也能产生出圆周 $r = a$ 接地 (电势为 0) 的效果，只要圆内的电荷分布不变，就能保证这样得到的解和原来问题的解在圆内一定是一致的. 这里，可以明确

地预见到，这个等价电荷如果存在的话，它一定位于圆外，否则圆内的电荷分布就和原来的问题不同，就不能保证等价性．或者换一种说法，由于感生电荷的电势在圆内是处处连续的，在圆内的任何等价电荷都不可能产生同样的效果．这样，应用电象法成败的关键，就在于这个等价电荷是否存在(体现为能否成功地求出这个等价电荷的电量和它所在的空间位置)．

根据对称性的考虑，我们还可以进一步断定，如果这个等价电荷存在的话，它还一定位于真实电荷所处的半径的延长线上．如图 20.3 所示，设这个等价电荷的位置为 $\boldsymbol{r}_1=(x_1,y_1)$，电量为 e，于是，它和真实点电荷一起，在圆内的电势就是

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+C\Big], \tag{20.45}$$

其中常数 C 与电势零点的选择有关．现在的问题就是要从要求圆周 $r=a$ 上的电势为 0，

$$-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|+e\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|+C\Big]_{r=a}=0, \tag{20.46}$$

求出 $\boldsymbol{r}_1, e$ 和 C．注意方程 (20.46) 应该对圆周上的一切点均成立．如果采用平面极坐标来写出方程 (20.45) 及 (20.46) 中各项的具体形式，即令

$$\begin{aligned}
x&=r\cos\phi,\\
y&=r\sin\phi,\\
x'&=r'\cos\phi',\\
y'&=r'\sin\phi',\\
x_1&=r_1\cos\phi',\\
y_1&=r_1\sin\phi',
\end{aligned}$$

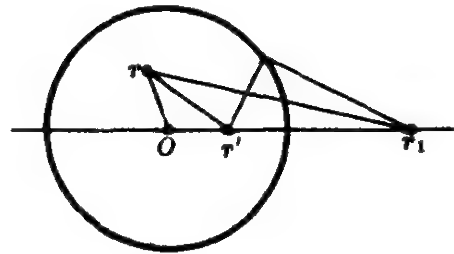


图 20.3　电象法

则方程 (20.46) 化为

$$\begin{aligned}
&\ln\left[a^2+r'^2-2ar'\cos(\phi-\phi')\right]\\
&\qquad+e\ln\left[a^2+r_1^2-2ar_1\cos(\phi-\phi')\right]+2C=0,
\end{aligned}\tag{20.47}$$

它应该对一切 ϕ 均成立. 利用展开式

$$\begin{aligned}\ln\left[1+t^2-2t\cos\phi\right] &= \ln\left[1-te^{i\phi}\right]+\ln\left[1-te^{-i\phi}\right]\\ &= -2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}t^m\cos m\phi,\quad |t|<1,\end{aligned}\tag{20.48}$$

就可以将 (20.47) 式化为

$$\begin{aligned}&2\ln a+\ln\left[1+\left(\frac{r'}{a}\right)^2-2\frac{r'}{a}\cos(\phi-\phi')\right]\\ &\qquad+2e\ln r_1+e\ln\left[1+\left(\frac{a}{r_1}\right)^2-2\frac{a}{r_1}\cos(\phi-\phi')\right]+2C\\ &=2\ln a+2e\ln r_1\\ &\qquad-2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\left[\left(\frac{r'}{a}\right)^m+e\left(\frac{a}{r_1}\right)^m\right]\cos m(\phi-\phi')+2C\\ &=0,\end{aligned}$$

于是，就得到

$$\ln a+e\ln r_1+2C=0\tag{20.49}$$

和

$$\left(\frac{r'}{a}\right)^m+e\left(\frac{a}{r_1}\right)^m=0,\quad m=1,2,3,\cdots,\tag{20.50}$$

将 (20.50) 式化成

$$e=-\left(\frac{r_1r'}{a^2}\right)^m,\quad m=1,2,3,\cdots,$$

所以，就可以得到

$$e=-1$$

和

$$r_1=\frac{a^2}{r'}\quad 或\quad \boldsymbol{r}_1=\left(\frac{a}{r'}\right)^2\boldsymbol{r}'.$$

这样，我们的确求出了这个等价电荷，它位于真实电荷所在半径的延长线上，并且满足

$$r'r_1=a^2.$$

凡是满足这个关系的两个点，均称为关于圆 $r=a$ 的反演点对. 上面的结果说明，等价电荷和真实电荷构成对于圆 $r=a$ 的反演点对，它们的电量相等，而极性相反. 将 e 和 r_1 的结果代入 (20.49) 式，又可以求得

$$C=-\ln a+\ln r_1=\ln\frac{a}{r'}.$$

再将 e, r_1 和 C 的结果代回 (20.45) 式，最后就求得圆内 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-\ln\left|\boldsymbol{r}-\left(\frac{a}{r'}\right)^2\boldsymbol{r}'\right|+\ln\frac{a}{r'}\right], \qquad (20.51)$$

或者在极坐标系中的表达式，

$$\begin{aligned}G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=&-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\ln\left[r^2+r'^2-2rr'\cos(\phi-\phi')\right]\right.\\&\left.-\ln\left[r^2+\left(\frac{a^2}{r'}\right)^2-2r\frac{a^2}{r'}\cos(\phi-\phi')\right]+2\ln\frac{a}{r'}\right\}.\end{aligned} \qquad (20.52)$$

利用展开式 (20.48)，求出 (20.43) 和 (20.44) 中的级数和，就可以看出，结果正是 (20.52) 式.

在求出了圆内 Poisson 方程第一边值问题的 Green 函数后，当然就可以导出一般的定解问题

$$\nabla_2^2 u(\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}), \qquad |\boldsymbol{r}|<a, \qquad (20.53a)$$

$$u(\boldsymbol{r})\Big|_{r=a}=f(\phi) \qquad (20.53b)$$

的解. 为此，将方程 (20.53) 的自变量改写成 $\boldsymbol{r}'$，

$$\nabla_2'^2 u(\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\boldsymbol{r}'), \qquad |\boldsymbol{r}'|<a, \qquad (20.54a)$$

$$u(\boldsymbol{r}')\Big|_{r'=a}=f(\phi'), \qquad (20.54b)$$

另一方面，还可以写出 $G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})$ 所应该满足的定解问题，

$$\nabla_2'^2 G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'), \qquad |\boldsymbol{r}|<a,\ |\boldsymbol{r}'|<a,$$

$$G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r})\Big|_{r'=a}=0,$$

再利用 Green 函数的对称性 (它可以看成是 (20.16) 的特殊情形，也能从上面求出的 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 的具体表达式直接看出)，

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=G(\boldsymbol{r}';\boldsymbol{r}),$$

进一步改写成

$$\nabla_2'^2 G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')=-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'),\qquad |\boldsymbol{r}|<a,\ |\boldsymbol{r}'|<a,\tag{20.55a}$$

$$G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{r'=a}=0.\tag{20.55b}$$

将方程 (20.54a) 和 (20.55a) 分别乘以 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 和 $u(\boldsymbol{r}')$，相减，再在圆内积分，就得到

$$\begin{aligned}&\iint\limits_{r'<a}\rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'-u(\boldsymbol{r})\\&\qquad=-\varepsilon_0\iint\limits_{r'<a}\left[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla_2'^2u(\boldsymbol{r}')-u(\boldsymbol{r}')\nabla_2'^2G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}'.\end{aligned}$$

把上面的面积分化为沿圆周 $r=a$ 的线积分，并且代入边界条件 (20.54b) 和 (20.55b)，就有

$$\begin{aligned}u(\boldsymbol{r})=&\iint\limits_{r'<a}\rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\\&+\varepsilon_0\int_0^{2\pi}\left[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\nabla'u(\boldsymbol{r}')-u(\boldsymbol{r}')\nabla'G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\right]_{r'=a}a\mathrm{d}\phi'\\=&\iint\limits_{r'<a}\rho(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'-\varepsilon_0\int_0^{2\pi}f(\phi')\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial r'}\bigg|_{r'=a}a\mathrm{d}\phi'.\end{aligned}\tag{20.56}$$

显然，右端的第一项表示圆内电荷分布的贡献；第二项则是来自圆周上的感生电荷产生的电势，感生电荷的分布当然与给定的边界条件 (圆周上电势值的分布) 有关．为了更清楚地看出圆周上的电荷分布，可以将第二项中的线积分再改写成

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}f(\phi')\frac{\partial G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\partial r'}\bigg|_{r'=a}a\mathrm{d}\phi'\\&\qquad=\int_0^{2\pi}f(\phi')\lim_{\Delta r\to0}\frac{1}{\Delta r}\left[G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{r'=a+\Delta r}-G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\Big|_{r'=a}\right]a\mathrm{d}\phi'\end{aligned}$$

$$= \iint\limits_{r'<a} f(\phi') \lim_{\Delta r\to 0} \frac{G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')}{\Delta r} \Big[\delta(r'-a-\Delta r) - \delta(r'-a)\Big] r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi'$$

$$= \iint\limits_{r'<a} f(\phi') G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\delta'(r'-a) r'\mathrm{d}r'\mathrm{d}\phi',$$

这样，就可以把 (20.56) 式写成

$$u(\boldsymbol{r}) = \iint\limits_{r'<a} \Big[\rho(\boldsymbol{r}') - \varepsilon_0 f(\phi')\delta'(r'-a)\Big] G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'. \tag{20.57}$$

由此可见，圆周上的感生电荷密度就是 $-\varepsilon_0 f(\phi')\delta'(r'-a)$. 函数 $\delta'(r'-a)$ 的出现，说明在圆周上的感生电荷为偶极层.

这里还可以引伸出一个重要结论. 设想有另外一个定解问题

$$\nabla_2^2 u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\Big[\rho(\boldsymbol{r}) - \varepsilon_0 f(\phi)\delta'(r-a)\Big], \quad |\boldsymbol{r}|<a, \tag{20.53a$'$}$$

$$u(\boldsymbol{r})\Big|_{r=a} = 0, \tag{20.53b$'$}$$

显然，它也将会有同样的解 (20.57) . 这说明，在引进 δ 函数及其导数的前提下，非齐次边界条件的定解问题，也可以改写为齐次的边界条件，只不过在方程中要相应地增加一项特殊的非齐次项，在区域内部处处为 0，而只在边界上不为 0 (实际数值为无穷) 的非齐次项. 上面的分析就提供了这种非齐次项的写法. 当然，非齐次边界条件可以转化为方程的特殊形式的非齐次项，丝毫并不意味着可以混淆非齐次边界条件 (描写边界面上的源的分布) 与方程非齐次项 (区域内部的源的分布) 的区别. 即使把非齐次边界条件改写成方程的非齐次项，它描写的仍然是存在于边界面的源.

现在再回到 (20.56) 式，代入 $G(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}')$ 的表达式，就得到

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r}) \;=\; & -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{r'<a} \rho(\boldsymbol{r}')\Big[\ln|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| - \ln\Big|\boldsymbol{r} - \Big(\frac{a}{r'}\Big)^2\boldsymbol{r}'\Big| + \ln\frac{a}{r'}\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\ & + \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\phi')}{a^2+r^2-2ar\cos(\phi-\phi')}\mathrm{d}\phi'. \end{aligned} \tag{20.58}$$

当 $\rho(\boldsymbol{r})=0$ ，就有圆内 Laplace 方程第一边值问题的 Poisson 公式

$$u(\boldsymbol{r}) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\phi')}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\phi - \phi')}\mathrm{d}\phi'. \tag{20.59}$$

用复变函数方法也能得到这个结果，见 (3.51) 式.

以上介绍了 Green 函数的两种解法. 第一种解法是按相应齐次问题的本征函数展开. 这种解法适用范围广，缺点是得到的解往往是无穷级数. 第二种解法是电象法，其中心思想是把边界上的感生电荷用一个等价的点电荷 (称为象电荷) 代替. 这只有在某些非常特殊的几何形状 (例如球形，半无界空间，等等) 下才能实现. 即使放宽到同时使用几个 (而不是一个) 象电荷来等效地代替边界上的感生电荷，对空间的几何形状仍然有相当严格的限制. 所以说，电象法的优点是可以给出有限形式的解，缺点是适用范围有限.

*20.5 三维调和函数的均值定理与极值原理

在 14.8 节中，曾经介绍了三维调和函数的概念. 如果在区域 V 内函数的二阶偏导数存在，且满足三维 Laplace 方程，则称该函数为 V 内的调和函数. 这一节就借用 Green 函数方法讨论一下三维调和函数的均值定理与极值原理.

设 $u(\boldsymbol{r})$ 为区域 V 内的调和函数，它满足定解问题

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{r}\in V; \tag{20.60a}$$

$$u(\boldsymbol{r})\big|_{\Sigma} = f(\Sigma), \tag{20.60b}$$

其中 Σ 是 V 的边界面. 另一方面，我们知道，函数 $v(\boldsymbol{r}) = 1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 是方程

$$\nabla^2 v(\boldsymbol{r}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') \tag{20.61}$$

的解 ①，即 $v(\boldsymbol{r})$ 是三维无界空间 Laplace 算符的 Green 函数. 不妨设 $\boldsymbol{r}'\in V$. 将方程 (20.60a) 和 (20.61) 分别乘以 $v(\boldsymbol{r})$ 和 $u(\boldsymbol{r})$，相

① 在例 11.1 中就证明过这个结果. 把 20.3 节 Helmholtz 方程中的 k 取为 0，也能得到这个结果.

减，在体积 V 内积分，就有

$$\iiint\limits_V \left[v(\boldsymbol{r})\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\nabla^2 v(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 4\pi \iiint\limits_V u(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

即

$$u(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \left[v(\boldsymbol{r})\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) - u(\boldsymbol{r})\nabla^2 v(\boldsymbol{r})\right]\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

在利用 Green 公式，即可得到

$$u(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_\Sigma \left[v(\boldsymbol{r})\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n} - u(\boldsymbol{r})\frac{\partial v(\boldsymbol{r})}{\partial n}\right]_\Sigma \mathrm{d}\Sigma. \tag{20.62}$$

现在讨论一个特殊情形，即区域 V 是以 $\boldsymbol{r}'$ 点为球心的球. 设球的半径为 ρ，则

$$v(\boldsymbol{r})\Big|_\Sigma = \frac{1}{\rho}, \quad \mathrm{d}\Sigma = \rho^2\mathrm{d}\Omega,$$

其中 $\mathrm{d}\Omega$ 为边界面上的面积元对于球心 $\boldsymbol{r}'$ 的立体角元. 这时，外法线 $\boldsymbol{n}$ 方向即为半径方向，所以，

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{r})}{\partial n}\Big|_\Sigma = \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Big|_\Sigma = -\frac{1}{\rho^2}.$$

把这些结果代入 (20.62) 式，就有

$$u(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi\rho}\iint\limits_\Sigma \frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\Big|_\Sigma \mathrm{d}\Sigma + \frac{1}{4\pi}\iint\limits_\Sigma u(\boldsymbol{r})\Big|_\Sigma \mathrm{d}\Sigma.$$

因为将方程 (20.60a) 积分，并应用 Green 公式，就可以推出

$$\iiint\limits_V \nabla^2 u(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_\Sigma \frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial n}\Big|_\Sigma \mathrm{d}\Sigma = 0,$$

所以

$$u(\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_\Sigma u(\boldsymbol{r})\Big|_\Sigma \mathrm{d}\Sigma. \tag{20.63}$$

这个结果显然适用于体积 V 内的任意一个以 $\boldsymbol{r}'$ 为球心的球. 由于 $\boldsymbol{r}'$ 点的任意性，它说明，调和函数在任意一点的数值，等于它在以该点为球心的任意一个球面 (当然必须在调和函数成立的区域内) 上的数值的平均值. 这就是三维调和函数的均值定理.

在此基础上，就可以导出极值原理.

极值原理　设 $u(\boldsymbol{r})$ 是区域 V 内的调和函数，则 $u(\boldsymbol{r})$ 必在 V 的边界面上取最大值与最小值，除非 $u(\boldsymbol{r})$ 为常数.

请读者自己用反证法证明这个结果. 只是要注意，这里的 V 是任意形状的区域 (当然它的边界面必须是分片光滑的)，并不限于球面. 另外，约定 $u(\boldsymbol{r})$ 是实函数.

练习 20.1　如果 $u(\boldsymbol{r})$ 和 $v(\boldsymbol{r})$ 都是区域 V 内的调和函数，若在 V 的边界面上有 $u \leq v$，试证明：在 V 内恒有 $u \leq v$.

练习 20.2　如果 $u(\boldsymbol{r})$ 和 $v(\boldsymbol{r})$ 都是区域 V 内的调和函数，若在 V 的边界面上有 $|u| \leq v$，试证明：在 V 内恒有 $|u| \leq v$.

20.6　波动方程的 Green 函数

现在再用 Green 函数方法研究与时间有关的定解问题. 为了确定起见，以有界弦的波动问题为例. 最一般的定解问题就是

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{20.64a}$$

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = \mu(t), \quad u(x,t)\Big|_{x=l} = \nu(t), \qquad t > 0, \tag{20.64b}$$

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \phi(x), \quad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < l. \tag{20.64c}$$

可以预料，相应的 Green 函数 $G(x,t;x',t')$ 应该是瞬时 (仅存在于某一时刻) 点 (仅存在于空间某点) 源问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] G(x,t;\, x',t') \\ = \delta(x-x')\delta(t-t'), \quad 0 < x,x' < l,\ t,t' > 0 \tag{20.65a}$$

在齐次定解条件

$$G(x,t;x',t')\Big|_{x=0} = 0, \quad G(x,t;x',t')\Big|_{x=l} = 0, \qquad t,t' > 0, \tag{20.65b}$$

$$G(x,t;x',t')\Big|_{t<t'} = 0, \quad \frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t}\Big|_{t<t'} = 0, \quad 0 < x,x' < l \tag{20.65c}$$

下的解. 这里初始条件的物理意义是很清楚的：因为强迫力是在 $t=t'$ 时刻出现的，所以，在此以前，弦当然一定保持静止.

和一般的问题一样，现在需要讨论三个问题：一、Green 函数 $G(x,t;x',t')$ 的对称性，二、如何用 Green 函数及已知条件 $f(x,t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ 和 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 将定解问题 (20.64) 的解 $u(x,t)$ 表示出来，三、如何求出 Green 函数.

首先，关于 Green 函数的对称性，更确切地说，Green 函数在空间上的对称性与时间上的倒易性. 为此，再列出关于 Green 函数 $G(x,-t;x'',-t'')$ 的定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G(x,-t;x'',-t'')$$
$$=\delta(x-x'')\delta(t-t''),\qquad 0<x,x''<l,\ t,t''>0, \tag{20.66a}$$

$$\left.G(x,-t;x'',-t'')\right|_{x=0}=0,\qquad \left.G(x,-t;x'',-t'')\right|_{x=l}=0,\qquad t,t''>0, \tag{20.66b}$$

$$\left.G(x,-t;x'',-t'')\right|_{-t<-t''}=0,\qquad \left.\frac{\partial G(x,-t;x'',-t'')}{\partial t}\right|_{-t<-t''}=0,\qquad 0<x,x''<l. \tag{20.66c}$$

将方程 (20.65a) 和 (20.66a) 分别乘以 Green 函数 $G(x,-t;x'',-t'')$ 和 $G(x,t;x',t')$，相减，再在区间 $[0,l]$ 和 $[0,\infty)$ 上对 x 和 t 积分，即得

$$\begin{aligned}
&G(x',-t';x'',-t'')-G(x'',t'';x',t')\\
&\quad=\int_0^l\mathrm{d}x\int_0^\infty\left[G(x,-t;x'',-t'')\frac{\partial^2G(x,t;x',t')}{\partial t^2}\right.\\
&\qquad\left.-G(x,t;x',t')\frac{\partial^2G(x,-t;x'',-t'')}{\partial t^2}\right]\mathrm{d}t\\
&\qquad-\int_0^\infty\mathrm{d}t\int_0^l\left[G(x,-t;x'',-t'')\frac{\partial^2G(x,t;x',t')}{\partial x^2}\right.\\
&\qquad\left.-G(x,t;x',t')\frac{\partial^2G(x,-t;x'',-t'')}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \int_0^l \left[G(x,-t;x'',-t'')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t} - G(x,t;x',t')\frac{\partial G(x,-t;x'',-t'')}{\partial t} \right]_0^\infty \mathrm{d}x - \int_0^\infty \left[G(x,-t;x'',-t'')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x} - G(x,t;x',t')\frac{\partial G(x,-t;x'',-t'')}{\partial x} \right]_0^l \mathrm{d}t,$$

代入边界条件 (20.65b)(20.66b) 和初始条件 (20.65c)(20.66c)，可以看出，右端的积分为 0，所以，这样就导出了 Green 函数在空间上的对称性与时间上的倒易性，

$$G(x'',t'';x',t') = G(x',-t';x'',-t''),$$

或者将 x'' 和 t'' 改写成 x 和 t，

$$G(x,t;x',t') = G(x',-t';x,-t). \tag{20.67}$$

在这个关系式中，将 t 和 t' 对换位置时出现的负号，正好保证了时间的先后次序不变，否则就会有悖于因果律的要求.

在建立了 Green 函数关于空间的对称性与时间的倒易性后，就可以着手解决第二个问题，即用 Green 函数及已知条件 $f(x,t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ 和 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 将定解问题 (20.64) 的解 $u(x,t)$ 表示出来. 为此，将定解问题 (20.64) 的自变量改写成 x' 和 t'，

$$\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2} - a^2\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2} = f(x',t'), \quad 0 < x' < l, \quad t' > 0, \tag{20.64a$'$}$$

$$u(x',t')\big|_{x'=0} = \mu(t'), \quad u(x',t')\big|_{x'=l} = \nu(t'), \qquad t' > 0, \tag{20.64b$'$}$$

$$u(x',t')\big|_{t'=0} = \phi(x'), \quad \left.\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}\right|_{t'=0} = \psi(x'), \quad 0 < x' < l. \tag{20.64c$'$}$$

再写出 Green 函数的定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial(-t')^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right] G(x',-t';x,-t) = \delta(x-x')\delta(t-t'),$$

$$0 < x,x' < l, \quad t,t' > 0,$$

$$\begin{aligned}
&G(x',-t';x,-t)\big|_{x'=0}=0, \\
&G(x',-t';x,-t)\big|_{x'=l}=0,
\end{aligned}\qquad t,t'>0,$$

$$\begin{aligned}
&G(x',-t';x,-t)\big|_{-t'<-t}=0, \\
&\frac{\partial G(x',-t';x,-t)}{\partial t}\bigg|_{-t'<-t}=0,
\end{aligned}\qquad 0<x,x'<l.$$

利用 Green 函数的对称性与倒易性关系 (20.67)，也可以改写成

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t'^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right]G(x,t;x',t')$$

$$=\delta(x-x')\delta(t-t'),\qquad 0<x,x'<l,\ t,t'>0, \tag{20.65a$'$}$$

$$\begin{aligned}
&G(x,t;x',t')\big|_{x'=0}=0, \\
&G(x,t;x',t')\big|_{x'=l}=0,
\end{aligned}\qquad t,t'>0, \tag{20.65b$'$}$$

$$\begin{aligned}
&G(x,t;x',t')\big|_{t'>t}=0, \\
&\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t}\bigg|_{t'>t}=0,
\end{aligned}\qquad 0<x,x'<l. \tag{20.65c$'$}$$

将方程 (20.64a$'$) 和 (20.65a$'$) 分别乘以 $G(x,t;x',t')$ 和 $u(x',t')$，相减，再积分，

$$\int_0^l \mathrm{d}x'\int_0^\infty G(x,t;x',t')f(x',t')\mathrm{d}t'-u(x,t)$$

$$=\int_0^l \mathrm{d}x'\int_0^\infty \left[G(x,t;x',t')\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial t'^2}-u(x',t')\frac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial t'^2}\right]\mathrm{d}t'$$

$$-a^2\int_0^\infty \mathrm{d}t'\int_0^l \left[G(x,t;x',t')\frac{\partial^2 u(x',t')}{\partial x'^2}-u(x',t')\frac{\partial^2 G(x,t;x',t')}{\partial x'^2}\right]\mathrm{d}x'.$$

代入边界条件 (20.64b$'$)(20.65b$'$) 和初始条件 (20.64c$'$) (20.65c$'$)，就可以将上面的结果化简为

$$u(x,t)=\int_0^l \mathrm{d}x'\int_0^\infty G(x,t;x',t')f(x',t')\mathrm{d}t'$$

$$-\int_0^l \left[G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial t'}-u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'}\right]_0^\infty \mathrm{d}x'$$

$$
\begin{aligned}
&+a^2\int_0^\infty\left[G(x,t;x',t')\frac{\partial u(x',t')}{\partial x'}-u(x',t')\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'}\right]_0^l \mathrm{d}t'\\
=&\int_0^l \mathrm{d}x'\int_0^t G(x,t;x',t')f(x',t')\mathrm{d}t'\\
&-\int_0^l\left[G(x,t;x',0)\psi(x')-\phi(x')\left.\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial t'}\right|_{t'=0}\right]\mathrm{d}x'\\
&-a^2\int_0^t\left[\nu(t')\left.\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'}\right|_{x'=l}\right.\\
&\qquad\left.-\mu(t')\left.\frac{\partial G(x,t;x',t')}{\partial x'}\right|_{x'=0}\right]\mathrm{d}t'.
\end{aligned}\tag{20.68}
$$

练习 20.3 如果直接从 (20.64) 和 (20.67) 式出发，而不将这些方程的自变量换成 x' 和 t'，是否能够用 Green 函数以及已知条件 $f(x,t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$ 和 $\phi(x)$, $\psi(x)$ 将定解问题 (20.64) 的解 $u(x,t)$ 表示出来？

下面再来讨论第三个问题：由定解问题 (20.65) 求出 Green 函数的具体形式.

第一种方法仍然是按相应齐次问题的本征函数展开，

$$G(x,t;x',t')=\sum_{n=1}^\infty T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x,\tag{20.69}$$

同时，将 δ 函数也按该组本征函数展开，

$$\delta(x-x')=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^\infty \sin\frac{n\pi}{l}x'\sin\frac{n\pi}{l}x,\tag{20.70}$$

于是，$T_n(t)$ 就满足常微分方程的初值问题

$$T''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2T_n(t)=\frac{2}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x'\,\delta(t-t'),\tag{20.71a}$$

$$T_n(t<t')=0,\qquad T_n'(t<t')=0.\tag{20.71b}$$

解之即得

$$T_n(t)=\frac{2}{n\pi a}\sin\frac{n\pi}{l}x'\,\sin\frac{n\pi}{l}a(t-t')\,\eta(t-t').\tag{20.72}$$

所以， Green 函数 $G(x,t;x',t')$ 就是

$$G(x,t;x',t')=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x'\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}a(t-t')\,\eta(t-t'). \tag{20.73}$$

第二种方法是将定解问题 (20.65) 作 Laplace 变换. 令

$$g(x,p;x',t')=\int_0^{\infty}G(x,t;x',t')\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t, \tag{20.74}$$

则 $g(x,p;x',t')$ 满足常微分方程的边值问题

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-\left(\frac{p}{a}\right)^2\right]g(x,p;x',t')=-\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-pt'}\,\delta(x-x'), \tag{20.75a}$$

$$g(x,p;x',t')\Big|_{x=0}=0,\qquad g(x,p;x',t')\Big|_{x=l}=0. \tag{20.75b}$$

当 $x\neq x'$ ，

$$\frac{\mathrm{d}^2g(x,p;x',t')}{\mathrm{d}x^2}-\left(\frac{p}{a}\right)^2g(x,p;x',t')=0.$$

考虑到 (20.75b) ，故有

$$g(x,p;x',t')=\begin{cases}A\sinh\dfrac{p}{a}x, & 0\le x<x',\\[2mm] B\sinh\dfrac{p}{a}(l-x), & x'<x\le l.\end{cases}$$

现在， $x=x'$ 处的非齐次项则体现为连接条件

$$g(x,p;x',t')\Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=0,\qquad \frac{\mathrm{d}g(x,p;x',t')}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=-\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-pt'}.$$

于是

$$B\sinh\frac{p}{a}(l-x')-A\sinh\frac{p}{a}x'=0,$$

$$B\cosh\frac{p}{a}(l-x')+A\cos\frac{p}{a}x'=\frac{1}{pa}\mathrm{e}^{-pt'}.$$

解之得

$$A=\frac{\sinh\dfrac{p}{a}(l-x')}{pa\sinh\dfrac{p}{a}l}\mathrm{e}^{-pt'},\quad B=\frac{\sinh\dfrac{p}{a}x'}{pa\sinh\dfrac{p}{a}l}\mathrm{e}^{-pt'},$$

这样，就求出了当 $0 \le x < x'$ 时，

$$g(x,p;x',t') = \frac{\sinh\dfrac{p}{a}(l-x')\,\sinh\dfrac{p}{a}x}{pa\,\sinh\dfrac{p}{a}l}\mathrm{e}^{-pt'}, \tag{20.76a}$$

当 $x' < x \le l$ 时，

$$g(x,p;x',t') = \frac{\sinh\dfrac{p}{a}x'\,\sinh\dfrac{p}{a}(l-x)}{pa\,\sinh\dfrac{p}{a}l}\mathrm{e}^{-pt'}. \tag{20.76b}$$

最后，求反演，

$$G(x,t;x',t') = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L g(x,p;x',t')\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p,$$

应用留数定理计算出上面的积分，也可以得到和 (20.73) 相同形式的结果.

再讨论一个三维空间的例子. 这时的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$ 满足定解问题

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\nabla^2\right]G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(t-t'),\quad t,t'>0, \tag{20.77a}$$

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\Big|_{t<t'} = 0,\qquad \frac{\partial G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')}{\partial t}\bigg|_{t<t'} = 0. \tag{20.77b}$$

作 Fourier 变换

$$g(\boldsymbol{k},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\exp\{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{20.78}$$

于是就将定解问题 (20.77) 化为

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + (ka)^2\right]g(\boldsymbol{k},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{\exp\{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\}}{(2\pi)^{3/2}}\delta(t-t'), \tag{20.79a}$$

$$g(\boldsymbol{k},t;\boldsymbol{r}',t')\Big|_{t<t'} = 0,\qquad \frac{\mathrm{d}g(\boldsymbol{k},t;\boldsymbol{r}',t')}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t<t'} = 0. \tag{20.79b}$$

根据例 11.6 的结果，可以得到

$$g(\boldsymbol{k},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{\exp\{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\}}{(2\pi)^{3/2}}\frac{\sin ka(t-t')}{ka}\,\eta(t-t'). \tag{20.80}$$

作逆变换，就有

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{\eta(t-t')}{(2\pi)^3}\iiint \frac{\exp\{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'\}}{ka}\sin ka(t-t')\,\mathrm{d}\boldsymbol{k}.$$

完全模仿第 20.3 节中的做法，在 $\boldsymbol{k}$ 空间的球坐标系中计算上面的积分，就得到

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{2\pi^2 a}\frac{\eta(t-t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty \sin ka(t-t')\sin k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\mathrm{d}k. \quad (20.81)$$

这个积分在通常的意义下是不存在的．出现这种积分的原因，从根本上说，当然是由于现在定解问题 (20.77) 中的非齐次项也不是通常意义下的函数．为了算出这个积分，可以将上一章中的 (19.30) 式代入 (19.31) 式，

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x')\sin kx'\mathrm{d}x'\right]\sin kx\mathrm{d}k \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x')\left[\int_0^\infty \sin kx'\sin kx\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}x', \end{aligned}$$

这说明

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin kx'\sin kx\mathrm{d}k = \delta(x-x'), \qquad x,x'>0.$$

把这个结果代入到 (20.81) 式中，就求出了 Green 函数

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = \frac{1}{4\pi a}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\delta(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-a(t-t')). \quad (20.82)$$

这里去掉了函数 $\eta(t-t')$，因为 δ 函数已经保证了 $t-t'<0$ 时 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=0$．这个解式的物理意义很明确： t' 时刻在 $\boldsymbol{r}'$ 处发射的信号， t 时刻一定到达距 $\boldsymbol{r}'$ 点为 $a(t-t')$ 的球面上．

利用这个 Green 函数，当然就可以得到三维无界空间中波动方程的初值问题

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t) = f(\boldsymbol{r},t), \qquad t>0, \quad (20.83\text{a})$$

$$u(\boldsymbol{r},t)\Big|_{t=0} = \phi(\boldsymbol{r}), \qquad \frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(\boldsymbol{r}) \quad (20.83\text{b})$$

的解，

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{r},t) =& \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|<at} \frac{f(\boldsymbol{r}',t-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|/a)}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\
&+ \frac{1}{4\pi a}\left[\iint\limits_{\Sigma'} \frac{\psi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\mathrm{d}\Sigma' + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Sigma'} \frac{\phi(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}\mathrm{d}\Sigma'\right],
\end{aligned}
\tag{20.84}
$$

其中 Σ' 是以 $\boldsymbol{r}$ 点为球心、 at 为半径的球面 $|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|=at$. 这个结果的证明留给读者完成.

20.7 热传导方程的 Green 函数

对于热传导问题的 Green 函数，可以完全仿照波动问题的做法. 例如，对于三维有界空间中的热传导问题，

$$
\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} - \kappa\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t) = f(\boldsymbol{r},t), \qquad \boldsymbol{r}\in V,\ t>0, \tag{20.85a}
$$

$$
u(\boldsymbol{r},t)\big|_{\Sigma} = \mu(\Sigma,t), \qquad t>0, \tag{20.85b}
$$

$$
u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0} = \phi(\boldsymbol{r}), \qquad \boldsymbol{r}\in V, \tag{20.85c}
$$

相应的 Green 函数 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$ 就可以定义为 t' 时刻在 $\boldsymbol{r}'$ 处有一个 (单位强度的) 瞬时点热源所产生的温度分布，换句话说，就是定解问题

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial}{\partial t} - \kappa\nabla^2\right] G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') \\
&\qquad = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\delta(t-t'), \quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V,\ \ t,t'>0,
\end{aligned}
\tag{20.86a}
$$

$$
G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\big|_{\Sigma} = 0, \qquad t,t'>0, \tag{20.86b}
$$

$$
G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\big|_{t=0} = 0, \qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V \tag{20.86c}
$$

的解. 容易理解，初始条件也可以写成 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\big|_{t<t'}=0$.

仿照波动问题的做法，也可以证明这个 Green 函数也具有对于空间的对称性和时间的倒易性，

$$
G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t') = G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t). \tag{20.87}
$$

请读者完成这个证明.

为了用 Green 函数方法解定解问题 (20.85)，也必须完全模仿上一节中的标准做法：首先将定解问题 (20.85) 的自变量改写成 $\boldsymbol{r}'$ 和 t'，

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'}-\kappa\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}',t')=f(\boldsymbol{r}',t'),\quad \boldsymbol{r}'\in V,\ t'>0,\tag{20.88a}$$

$$u(\boldsymbol{r}',t')\big|_{\Sigma'}=\mu(\Sigma',t'),\qquad t'>0,\tag{20.88b}$$

$$u(\boldsymbol{r}',t')\big|_{t'=0}=\phi(\boldsymbol{r}'),\qquad \boldsymbol{r}'\in V.\tag{20.88c}$$

然后写出 Green 函数 $G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t)$ 满足的定解问题，

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial(-t')}-\kappa\nabla'^2\right]G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t)\\&\qquad=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\delta(t-t'),\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V,\ \ t,t'>0,\\&G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t)\big|_{\Sigma'}=0,\qquad t,t'>0,\\&G(\boldsymbol{r}',-t';\boldsymbol{r},-t)\big|_{-t'<-t}=0,\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V,\end{aligned}$$

进一步再利用 Green 函数对于空间的对称性和时间的倒易性关系 (20.87)，改写成

$$\begin{aligned}&\left[-\frac{\partial}{\partial t'}-\kappa\nabla'^2\right]G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\\&\qquad=\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\delta(t-t'),\quad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V,\ \ t,t'>0,\end{aligned}\tag{20.89a}$$

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\big|_{\Sigma'}=0,\qquad t,t'>0,\tag{20.89b}$$

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\big|_{t'>t}=0,\qquad \boldsymbol{r},\boldsymbol{r}'\in V.\tag{20.89c}$$

将方程 (20.88a) 和 (20.89a) 分别乘以 $G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')$ 和 $u(\boldsymbol{r}',t')$，相减，并积分，就得到

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \mathrm{d}t'\iiint\limits_V f(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'-u(\boldsymbol{r},t)\\&\quad=\iiint\limits_V \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\int_0^\infty\left[G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\frac{\partial u(\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'}\right.\\&\qquad\left.+u(\boldsymbol{r}',t')\frac{\partial G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')}{\partial t'}\right]\mathrm{d}t'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\kappa\int_0^\infty \mathrm{d}t' \iiint\limits_V \Big[G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\nabla'^2 u(\boldsymbol{r}',t') \\
&\qquad - u(\boldsymbol{r}',t')\nabla'^2 G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\
=&\iiint\limits_V G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')u(\boldsymbol{r}',t')\Big|_{t'=0}^{t'=\infty}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\
&-\kappa\int_0^\infty \mathrm{d}t' \iint\limits_{\Sigma'} \big[G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\nabla' u(\boldsymbol{r}',t') \\
&\qquad - u(\boldsymbol{r}',t')\nabla' G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\big]\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}',
\end{aligned}
$$

代入边界条件 (20.88b)(20.89b) 和初始条件 (20.88c)(20.89c)，最后就得到

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{r},t) =& \int_0^t \mathrm{d}t' \iiint\limits_V f(\boldsymbol{r}',t')G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\
&+\iiint\limits_V \phi(\boldsymbol{r}')G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',0)\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \\
&-\kappa\int_0^t \mathrm{d}t' \iint\limits_{\Sigma'} \mu(\Sigma',t')\left.\frac{\partial G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')}{\partial n'}\right|_{\Sigma'}\mathrm{d}\Sigma'. \qquad (20.90)
\end{aligned}
$$

练习 20.4 如果直接从 (20.85) 和 (20.86) 式出发，而不将这些方程的自变量换成 $\boldsymbol{r}'$ 和 t'，是否能够用 Green 函数以及已知条件 $f(\boldsymbol{r},t)$, $\mu(\Sigma,t)$ 和 $\phi(\boldsymbol{r})$ 将定解问题 (20.85) 的解 $u(\boldsymbol{r},t)$ 表示出来？

现在来求解第十三章中还遗留下的一个定解问题，即关于一维无界空间热传导方程的 Green 函数问题，

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]G(x,t;x',t')=\delta(x-x')\,\delta(t-t'),\quad t'>0, \qquad (20.91\text{a})$$

$$G(x,t;x',t')\big|_{x\to\pm\infty}\text{有界}, \qquad (20.91\text{b})$$

$$G(x,t;x',t')\big|_{t=0}=0. \qquad (20.91\text{c})$$

作 Laplace 变换，即令

$$g(p;x,x')=\int_0^{\infty}G(x,t;x',t')\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \tag{20.92}$$

于是，定解问题化为

$$pg(p;x,x')-\kappa\frac{\mathrm{d}^2g(p;x,x')}{\mathrm{d}x^2}=\delta(x-x')\,\mathrm{e}^{-pt'}, \tag{20.93a}$$

$$g(p;x,x')\Big|_{x\to\pm\infty}\text{有界}. \tag{20.93b}$$

当 $x\neq x'$ 时，方程 (20.93a) 是齐次的．考虑到边界条件 (20.93b)，可以写出它的解

$$g(p;x,x')=\begin{cases}A\exp\left\{\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}(x-x')\right\}, & x<x';\\[2ex] B\exp\left\{-\sqrt{\dfrac{p}{\kappa}}(x-x')\right\}, & x>x'.\end{cases} \tag{20.94}$$

再根据方程 (20.93a) 的非齐次项，可以写出连接条件

$$g(p;x,x')\Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=0,\qquad -\kappa\,\frac{\mathrm{d}g(p;x,x')}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x'-0}^{x=x'+0}=\mathrm{e}^{-pt'},$$

即

$$B-A=0,\quad -\kappa\left[-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}B-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}A\right]=\mathrm{e}^{-pt'},$$

由此即可定出

$$A=B=\frac{1}{2\sqrt{\kappa p}}\mathrm{e}^{-pt'}.$$

于是

$$G(p;x,x')=\frac{1}{2\sqrt{\kappa p}}\mathrm{e}^{-pt'}\exp\left\{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}|x-x'|\right\}. \tag{20.95}$$

再利用 (10.39) 式的结果，就可以求出反演

$$G(x,t;x',t')=\frac{1}{2\sqrt{\kappa\pi(t-t')}}\exp\left\{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa(t-t')}\right\}\eta(t-t'). \tag{20.96}$$

这正是 (13.60) 式．

练习 20.5　求解定解问题 (13.62)．

第二十一章 变分法初步

21.1 泛函的概念

泛函，简单地说，就是以整个函数为自变量的函数．这个概念，可以看成是函数概念的推广．

所谓函数，是指给定自变量 x(定义在某区间内) 的任一数值，就有一个 y 与之对应． y 称为 x 的函数，记为 $y=f(x)$．

设在 x,y 平面上有一簇曲线 $y(x)$，其长度

$$L=\int_C \mathrm{d}s=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x.$$

显然，$y(x)$ 不同，L 也不同，即 L 的数值依赖于整个函数 $y(x)$ 而改变．我们把 L 和函数 $y(x)$ 之间的这种依赖关系，称为泛函关系．类似的例子还可以举出许多．例如，闭合曲线围成的面积，平面曲线绕固定轴而生成的旋转体体积或表面积，等等．它们也都定了各自的泛函关系．

设对于 (某一函数集合内的) 任意一个函数 $y(x)$，有另一个数 $J[y]$ 与之对应，则称 $J[y]$ 为 $y(x)$ 的泛函．这里的函数集合，即泛函的定义域，通常包含要求 $y(x)$ 满足一定的边界条件，并且具有连续的二阶导数．这样的 $y(x)$ 称为可取函数．

这里要特别强调，泛函不同于复合函数，例如 $g=g(f(x))$．对于后者，给定一个 x 值，仍然是有一个 g 值与之对应；对于前者，则必须给出某一区间上的函数 $y(x)$，才能得到一个泛函值 $J[y]$．(定义在同一区间上的) 函数不同，泛函值当然不同．为了强调泛函值 $J[y]$ 与函数 $y(x)$ 之间的依赖关系，常常又把函数 $y(x)$ 称为变量函数．

泛函的形式可以是多种多样的，但是，在本书中我们只限于用积分

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,\mathrm{d}x \tag{21.1}$$

定义的泛函，其中的 F 是它的宗量的已知函数，具有连续的二阶偏导数. 如果变量函数是二元函数 $u(x,y)$，则泛函为

$$J[u]=\iint_S F(x,y,u,u_x,u_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{21.2}$$

其中 $u_x\equiv\partial u/\partial x$, $u_y\equiv\partial u/\partial y$. 对于更多个自变量的多元函数，也可以有类似的定义.

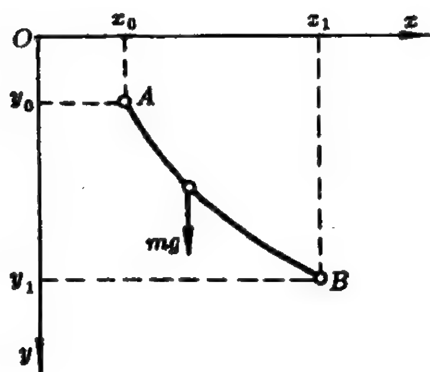


图 21.1

例 21.1 如图 21.1 所示，在重力作用下，一个质点从 (x_0,y_0) 点沿平面曲线 $y(x)$ 无摩擦地自由下滑到 (x_1,y_1) 点，则所需要的时间

$$T=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g(y_0-y)}}=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_0-y)}}\mathrm{d}x \tag{21.3}$$

就是 $y(x)$ 的泛函. 这里，自然要求变量函数 $y(x)$ 一定通过端点 (x_0,y_0) 和 (x_1,y_1).

例 21.2 弦的横振动问题. 设在弦上隔离出足够短的一段弦，则该段弦的

$$动能=\frac{1}{2}\rho\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2,\qquad 势能=\frac{1}{2}T\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,$$

其中 $u(x,t)$ 是弦的横向位移，ρ 是弦的线密度，T 是张力. 这样，弦的 Hamilton 作用量

$$S=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x \tag{21.4}$$

也是位移 $u(x,t)$ 的泛函. 这里的

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

称为 Lagrange 量 (Lagrangian)，而被积函数

$$\frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$$

称为 Lagrange 量密度.

21.2 泛 函 的 极 值

首先研究一个自变量的情形.

先回忆一下有关函数极值的概念. 所谓函数 $f(x)$ 在 x_0 点取极小值，是指当 x 在 x_0 点及其附近 $|x - x_0| < \varepsilon$ 时，恒有

$$f(x) \geq f(x_0); \tag{21.5}$$

而如果恒有

$$f(x) \leq f(x_0), \tag{21.6}$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点取极大值. 函数 $f(x)$ 在 x_0 点取极值 (极小或极大) 的必要条件是在该点的导数为 0，

$$f'(x_0) = 0. \tag{21.7}$$

我们可以用同样的方法定义泛函的极值，例如，“当变量函数为 $y(x)$ 时，泛函 $J[y]$ 取极小值”的含义就是：对于极值函数 $y(x)$ 及其“附近”的变量函数 $y(x) + \delta y(x)$，恒有

$$J[y + \delta y] \geq J[y]. \tag{21.8}$$

所谓函数 $y(x) + \delta y(x)$ 在另一个函数 $y(x)$ 的“附近”，指的是：

1. $|\delta y(x)| < \varepsilon$；
2. 有时还要求 $|(\delta y)'(x)| < \varepsilon$.

这里的 $\delta y(x)$ 称为函数 $y(x)$ 的变分.

可以仿照函数极值必要条件的导出办法，导出泛函取极值的必要条件. 为此，不妨不失普遍性地假定，所考虑的变量函数均通

过固定的两个端点

$$y(x_0)=a, \qquad y(x_1)=b,$$

即

$$\delta y(x_0)=0, \qquad \delta y(x_1)=0. \tag{21.9}$$

现在，考虑泛函的差值

$$J[y+\delta y]-J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\Big[F\left(x,\, y+\delta y,\, y'+(\delta y)'\right)-F(x,\, y,\, y')\Big]\mathrm{d}x,$$

当函数的变分 $\delta y(x)$ 足够小时，可以将被积函数在极值函数附近作 Taylor 展开，于是，有

$$\begin{aligned} J[y+\delta y]-J[y] &= \int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]F\right. \\ &\qquad \left.+\frac{1}{2!}\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]^2F+\cdots\right\}\mathrm{d}x \\ &= \delta J[y]+\frac{1}{2!}\delta^2 J[y]+\cdots, \end{aligned}$$

其中

$$\delta J[y]\equiv\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right]\mathrm{d}x, \tag{21.10}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 J[y] &\equiv \int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial}{\partial y'}\right]^2F\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\delta y)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y(\delta y)'+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(\delta y)'^2\right]\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{21.11}$$

分别是泛函 $J[y]$ 的一级变分和二级变分．这样就得到：泛函 $J[y]$ 取极小值的必要条件是泛函的一级变分为 0，

$$\delta J[y]\equiv\int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\frac{\partial F}{\partial y}+(\delta y)'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x=0. \tag{21.12}$$

对于泛函 $J[y]$ 取极大值的情形，也可以类似地讨论，并且也会得到同样形式的必要条件．

将 (21.12) 式的积分中的第二项分部积分，同时考虑到边界条

件 (21.9)，就有

$$\begin{aligned}\delta J[y] &= \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left[\delta y\,\frac{\partial F}{\partial y} - \delta y\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\delta y\,\mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

由于 δy 的任意性，我们又可以得到

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{21.13}$$

这个方程称为 Euler–Lagrange 方程，它是泛函 $J[y]$ 取极小值的必要条件的微分形式．一般说来，这是一个二阶常微分方程．

在导出方程 (21.13) 时，我们实际上用到了变分法的一个重要的基本引理：设 $\phi(x)$ 是 x 的连续函数，$\eta(x)$ 具有连续的二阶导数，且 $\eta(x)\big|_{x=x_0} = \eta(x)\big|_{x=x_1} = 0$，若对于任意 $\eta(x)$，

$$\int_{x_0}^{x_1}\phi(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

均成立，则必有 $\phi(x) \equiv 0$．证明从略．

例 21.3 设质点在有势力场中沿路径 $q = q(t)$ 由 $t_0, q(t_0)$ 点运动到 $t_1, q(t_1)$ 点，它的 Hamilton 作用量是

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})\,\mathrm{d}t \tag{21.14}$$

其中 q 和 $\dot{q}$ 是描写质点运动的广义坐标和广义动量，$L = T - V$ 是动能 T 和势能 V 之差，称为 Lagrange 量．Hamilton 原理告诉我们，在一切 (运动学上允许的) 可能路径中，真实运动的 (即由力学规律决定的) 路径使作用量 S 取极值．根据上面的讨论可知，作用量 S 取极值的必要条件的积分形式和微分形式分别是

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta\dot{q}\right]\mathrm{d}t = 0 \tag{21.15}$$

和

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{21.16}$$

在给定的有势力场中，写出 Lagrange 量 L 的具体形式，代入 (21.16) 式，就会发现，它和 Newton 力学的动力学方程完全一样.

现在讨论两种常见的特殊情形. 一种是泛函 (21.1) 中的 $F=F(x,y')$ 不显含 y，这时的 Euler-Lagrange 方程就是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0,$$

所以，立即就可以得到它的首次积分

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\text{常量}C. \tag{21.17}$$

另一种是泛函 (21.1) 中的 $F=F(y,y')$ 不显含 x，容易证明，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F\right]=&y''\frac{\partial F}{\partial y'}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}y'-\frac{\partial F}{\partial y'}y''\\=&-y'\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right],\end{aligned}$$

所以，这时的 Euler-Lagrange 方程也可以有首次积分

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=\text{常量}C. \tag{21.18}$$

把这个结果应用到例 21.3 中，如果 Lagrange 量 L 不显含 t，则有

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}-L=\text{常量}C, \tag{21.19}$$

这就是能量守恒.

下面研究二元函数的情形. 设有二元函数 $u(x,y),\ (x,y)\in S$，在此基础上可以定义泛函

$$J[u]=\iint\limits_S F(x,y,u,u_x,u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{21.20}$$

仍然约定，$u(x,y)$ 在 S 的边界 Γ 上的数值给定，即

$$u\big|_\Gamma\ \text{固定}. \tag{21.21}$$

首先，当然要计算

$$\begin{aligned}&J[u+\delta u]-J[u]\\&\quad=\iint\limits_S F\left(x,y,u+\delta u,(u+\delta u)_x,(u+\delta u)_y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \iint_S F(x, y, u, u_x, u_y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
= &\iint_S \left[\delta u \frac{\partial}{\partial u} + (\delta u)_x \frac{\partial}{\partial u_x} + (\delta u)_y \frac{\partial}{\partial u_y}\right] F \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&+ \frac{1}{2!} \iint_S \left[\delta u \frac{\partial}{\partial u} + (\delta u)_x \frac{\partial}{\partial u_x} + (\delta u)_y \frac{\partial}{\partial u_y}\right]^2 F \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&+ \cdots,
\end{aligned}
$$

于是，泛函 $J[u]$ 取极值的必要条件就是泛函的一级变分为 0，

$$
\begin{aligned}
\delta J[u] &= \iint_S \left[\delta u \frac{\partial F}{\partial u} + (\delta u)_x \frac{\partial F}{\partial u_x} + (\delta u)_y \frac{\partial F}{\partial u_y}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_S \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\right] \delta u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\right)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 0.
\end{aligned}
\tag{21.22}
$$

利用公式

$$
\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Gamma \left(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right),
$$

取

$$
Q = \frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u, \qquad P = -\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u,
$$

就能将上面的结果化为

$$
\begin{aligned}
\delta J[u] &= \iint_S \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right] \delta u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_\Gamma \left[-\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}y\right] \delta u.
\end{aligned}
$$

根据 (21.21) 式，$\delta u\big|_\Gamma = 0$，可知上式右端第二项的线积分为 0，所以

$$\begin{aligned}\delta J[u] &= \iint\limits_S \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right]\delta u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 0.\end{aligned}$$

再利用 δu 的任意性，就可以导出上面的被积函数一定为 0，

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y} = 0, \tag{21.23}$$

这就是二元函数情形下，泛函

$$J[u] = \iint\limits_S F(x, y, u, u_x, u_y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

取极值的必要条件的微分形式 (Euler-Lagrange 方程)．

把这个结果应用到例 21.2 中弦的横振动问题上，就得到使作用量

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2}\left[\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

取极值的必要条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{21.24}$$

这正是我们在第十二章导出的弦的横振动方程．

练习 21.1 在 n 个自变量的情形下，导出泛函

$$\int \cdots \int F(x_1, x_2, \cdots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \cdots, u_{x_n})\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

取极值的必要条件，包括它的积分形式和微分形式．上述泛函表达式中的积分是在 n 空间中的一定区域内进行的．

以上在一元函数和多元函数的泛函极值问题中，都限定了变量函数在端点或边界上取定值，因而变量函数的变分在端点或边界上一定为 0．我们把这种泛函极值问题称为固定端点或固定边界的泛函极值问题．这类问题在数学上当然是最简单的，然而却又是物理上最常用的．

下面以一元函数为例，总结一下变分的几条简单运算法则．

1. 首先，由于变分是对函数 y 进行的，独立于自变量 x，所

以，变分运算和微分或微商运算可交换次序，

$$\delta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}\quad \text{即}\quad \delta y'=(\delta y)'. \tag{21.25}$$

2. 变分运算也是一个线性运算，

$$\delta(\alpha F+\beta G)=\alpha\,\delta F+\beta\,\delta G, \tag{21.26}$$

其中 α 和 β 是常数.

3. 直接计算，就可以得到函数乘积的变分法则：

$$\delta(FG)=(\delta F)\,G+F\,(\delta G). \tag{21.27}$$

4. 变分运算和积分 (微分的逆运算) 也可以交换次序，

$$\delta\int_a^b F\,\mathrm{d}x=\int_a^b(\delta F)\,\mathrm{d}x. \tag{21.28}$$

这只要把等式两端的定积分写成级数和即可看出.

5. 复合函数的变分运算，其法则和微分运算完全相同，只要简单地将微分法则中的“ d ”换成“ δ ”即可. 例如，

$$\delta F(x,y,y')=\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y'. \tag{21.29}$$

这里注意，引起 F 变化的原因，是函数 y 的变分，而自变量 x 是不变化的. 所以，绝对不会出现“ $(\partial F/\partial x)\delta x$ ”项.

这些运算法则，当然完全可以毫不困难地推广到多元函数的情形.

作为完整的泛函极值问题，在列出泛函取极值的必要条件、即 Euler–Lagrange 方程后，还需要在给定的定解条件下求解微分方程，才有可能求得极值函数. 这里需要注意， Euler–Lagrange 方程只是泛函取极值的必要条件，并不是充分必要条件. 在给定的定解条件下， Euler–Lagrange 方程的解可能不止一个，它们只是极值函数的候选者. 到底哪一 (几) 个解是要求的极值函数，还需要进一步加以甄别. 和求函数极值的情形一样，现在也可以有两种方法. 一种是直接比较所求得的解及其“附近”的函数的泛函值，根据泛函极值的定义加以判断. 这种方法不太实用，至少会涉及较多的计

算. 另一种方法是计算泛函的二级变分 $\delta^2 J$，如果对于所求得的解，泛函的二级变分取正 (负) 值，则该解即为极值函数，泛函取极小 (大). 这种方法当然比较简便，但如果二级变分为 0，则需要继续讨论高级变分.

可是，实际问题往往又特别简单：这就是在给定的边界条件下，Euler-Lagrange 方程只有一个解，同时，从物理或数学内容上又能判断，该泛函的极值一定存在，那么，这时求得的唯一解当然就是所要求的极值函数了.

21.3 泛函的条件极值

先回忆一下多元函数的极值问题. 设有二元函数 $f(x, y)$，它取极值的必要条件是

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 0. \tag{21.30}$$

因为 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ 任意，所以二元函数 $f(x, y)$ 取极值的必要条件又可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{21.31}$$

还有另一类二元函数的极值问题，二元函数的条件极值问题，即在约束条件

$$g(x, y) = C \tag{21.32}$$

下求 $f(x, y)$ 的极值. 这时，在原则上，可以由约束条件解出 $y = h(x)$，然后消去 $f(x, y)$ 中的 y. 这样，上述条件极值问题就转化为一元函数 $f(x, h(x))$ 的普通极值问题，它取极值的必要条件就是

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}h'(x) = 0. \tag{21.33}$$

对于这个结果还有另一种理解. 因为在 (21.32) 中并不需要真正知道 $y = h(x)$ 的表达式，而只需要知道

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \equiv h'(x).$$

这样，我们甚至不必 (在大多数情形下也不可能) 求出 $y = h(x)$，就可以直接对约束条件 (21.32) 微分

$$\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y = 0,$$

从而求出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y},$$

代回到 (21.30) 式中，即可将上述二元函数取极值的必要条件写成

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y} = 0. \tag{21.34}$$

上面的讨论，当然很容易推广到更多个自变量的多元函数的情形. 但是，随着自变量数目的增多，公式也就越来越麻烦.

在实用中，更常用 Lagrange 乘子法来处理多元函数的条件极值问题. 例如，对于上面的在约束条件 (21.32) 下求函数 $f(x, y)$ 的极值问题，就可以引进 Lagrange 乘子 λ，而定义一个新的二元函数 ①

$$h(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y). \tag{21.35}$$

仍将 x 和 y 看成是两个独立变量，这样，这个二元函数取极值的必要条件就是

$$\frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(f - \lambda g)}{\partial y} = 0. \tag{21.36}$$

由此可以求出

$$x = x(\lambda), \qquad y = y(\lambda), \tag{21.37}$$

代回到约束条件 (21.32) 中，定出 Lagrange 乘子 λ，再代入 (21.37)，就可以求出可能的极值点 (x, y). 容易看出，将 (21.36) 式中的 λ 消去，就能化为 (21.34) 式.

如果是更多个自变量的多元函数，也可以同样地处理. 而且，如果涉及多个约束条件，也就只需引入多个 Lagrange 乘子即可.

---

① 为了以后的方便，这里的 Lagrange 乘子前面多了一个负号.

现在回到泛函的条件极值问题．如果要求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} F(x,\,y,\,y')\,\mathrm{d}x \tag{21.38}$$

在边界条件

$$y(x_0)=a,\qquad y(x_1)=b \tag{21.39}$$

以及约束条件

$$\mathrm{J}_1[y]\equiv\int_{x_0}^{x_1} G(x,\,y,\,y')\,\mathrm{d}x=C \tag{21.40}$$

下的极值，则可定义

$$\mathrm{J}_0[y]=J[y]-\lambda \mathrm{J}_1[y], \tag{21.41}$$

仍将 δy 看成是独立的，则泛函 $\mathrm{J}_0[y]$ 在边界条件 (21.39) 下取极值的必要条件就是

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}\right)(F-\lambda G)=0. \tag{21.42}$$

由方程 (21.42) 及边界条件 (21.39) 解出 $y=y(x,\,\lambda)$ ；再代入约束条件 (21.40) ，定出 $\lambda=\lambda_0$ ；如果需要，再经过甄别；于是，极值函数就是 $y=y(x,\,\lambda_0)$ ，从而就最终求出泛函 $\mathrm{J}_0[y]$ 的条件极值．

例 21.4　求泛函

$$I[y]=\int_0^1 x\,y'^2\,\mathrm{d}x \tag{21.43}$$

在边界条件

$$y(0)\,\text{有界},\qquad y(a)=0 \tag{21.44}$$

和约束条件

$$\int_0^1 x\,y^2\,\mathrm{d}x=1 \tag{21.45}$$

下的极值曲线．

解　采用上面描述的 Lagrange 乘子法，可以得到必要条件

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'}\right)\left(x\,y'^2-\lambda\,x\,y^2\right)=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda\,x\,y=0. \tag{21.46}$$

此方程及齐次的边界条件 (21.44) 即构成一个本征值问题，它的本征值

$$\lambda_i = \left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2, \qquad \mu_i\text{是零阶贝塞耳函数}\mathrm{J}_0(x)\text{的第}i\text{个正零点，}i=1,2,3,\cdots \tag{21.47}$$

正好就是 Lagrange 乘子，而极值函数就是相应的本征函数 $y(x)$，

$$y_i(x) = C\,\mathrm{J}_0\left(\mu_i \frac{x}{a}\right).$$

常量 C 可以由约束条件定出．因为

$$C^2\int_0^a x\,\mathrm{J}_0^2\left(\mu_i\frac{x}{a}\right)\,\mathrm{d}x = C^2\,\frac{a^2}{2}\mathrm{J}_1^2(\mu_i) = 1,$$

所以

$$C = \frac{\sqrt{2}}{a\,\mathrm{J}_1(\mu_i)}.$$

这样，就求出了极值函数

$$y_i(x) = \frac{\sqrt{2}}{a\,\mathrm{J}_1(\mu_i)}\mathrm{J}_0(\mu_i x). \tag{21.48}$$

值得注意，这里由于 Lagrange 乘子的引进，在 Euler–Lagrange 方程出现了待定参量，和齐次边界条件组合在一起，就构成本征值问题．而作为本征值问题，它的解，本征值和本征函数，有无穷多个．这里有两个问题需要讨论．第一个问题，这无穷多个本征函数都是极值函数．这可以从下面的变分计算看出．由边界条件 (21.44) 以及由此推得的

$$\delta y\Big|_{x=0}\text{有界，}\qquad \delta y\Big|_{x=1} = 0.$$

可以求出 $I[y]$ 的一级变分

$$\begin{aligned}\delta I[y] &= 2\int_0^1 x\,y'\,(\delta y)'\,\mathrm{d}x\\ &= 2\left[\delta y\cdot xy'\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(x\,y'\right)'\,\delta y\,\mathrm{d}x\right]\\ &= -2\int_0^1\left(x\,y''+y'\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

进而可以求出 $I[y]$ 的二级变分

$$\begin{aligned}\delta^2 I[y] &= -2\int_0^1 \left(x\,\delta y'' + y'\right)\delta y\,\delta x\\ &= -2\left[\delta y'\cdot x\delta y\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(x\,\delta y\right)'\delta y'\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \delta y\,\delta y'\,\mathrm{d}x\right]\\ &= 2\int_0^1 x\left(\delta y'\right)^2\mathrm{d}x > 0.\end{aligned}$$

因为泛函 $I[y]$ 的二级变分恒取正值，所以这些极值函数均使泛函取极小. 第二个问题是，这无穷个本征值正好也就是泛函的极值. 这是因为，将方程 (21.46) 乘以极值函数 $y(x)$，再积分，就有

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^1 x\,y^2\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 y\left(x\,y'\right)'\mathrm{d}x\\ &= -y\cdot x\,y'\Big|_0^1 + \int_0^1 x\,y'^2\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 x\,y'^2\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

根据约束条件 (21.45)，就能得到

$$\lambda = \int_0^1 x\,y'^2\,\mathrm{d}x. \tag{21.49}$$

最后，还要提到，这一类泛函的条件极值问题的原型，可以追溯到“闭合曲线周长一定而面积取极大”的原始几何问题. 因此，泛函的条件极值问题，常称为等周问题 (Isoperimetric problem).

21.4 微分方程定解问题和本征值问题的变分形式

在前两节中，读者看到，泛函取极值的必要条件的微分形式 (Euler–Lagrange 方程) 是常微分方程或偏微分方程，它和变量函数的定解条件结合起来，就构成常微分方程或偏微分方程的定解问题；对于泛函的条件极值问题，其必要条件中出现待定参量 (Lagrange 乘子)，它和齐次边界条件结合起来，就构成微分方程本征值问题. 这一节将研究它的反问题：如何将微分方程的定解问题或本征值

问题转化为泛函的极值或条件极值问题，或者说，如何将微分方程的定解问题或本征值问题用变分语言表述. 通过下面几个实例，可以看出这类问题的一般处理方法.

例 21.5 写出常微分方程边值问题

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y(x)=f(x),\qquad x_0<x<x_1,\tag{21.50a}$$

$$y(x_0)=y_0,\qquad y(x_1)=y_1\tag{21.50b}$$

的泛函形式，即找出相应的泛函，它在边界条件 (21.50b) 下取极值的必要条件即为 (21.50a) .

解 既然泛函极值必要条件的微分形式就是方程 (21.50a) ，那么，这个方程一定来自

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y(x)-f(x)\right\}\delta y(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

现在的问题就是要把上式左端化成某一积分的变分，这对于该积分被积函数的第二、三项是很容易实现的，

$$\int_{x_0}^{x_1}q(x)y(x)\delta y(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\delta\int_{x_0}^{x_1}q(x)y^2(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\delta y(x)\mathrm{d}x=\delta\int_{x_0}^{x_1}f(x)y(x)\mathrm{d}x.$$

这里只要注意，已知函数 $q(x)$ 和 $f(x)$ 是与 $y(x)$ 的变分无关的，因此，在变分计算中，它们都是常量. 对于被积函数中的第一项，可以分部积分，

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]\delta y(x)\,\mathrm{d}x&=p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta y(x)\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}(\delta y)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\\&=-\int_{x_0}^{x_1}p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\delta\int_{x_0}^{x_1}p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中当然用到了 $\delta y(x)\big|_{x_0}=\delta y(x)\big|_{x_1}=0$. 把上面的结果综合起来，就得到

$$\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)y(x)-f(x)\right\}\delta y(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=-\delta\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{1}{2}\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-q(x)y^2(x)\right]+f(x)y(x)\right\}\mathrm{d}x$$

$$=0. \tag{21.51}$$

这就说明，方程 (21.50a) 一定就是泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{1}{2}\left[p(x)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-q(x)y^2(x)\right]+f(x)y(x)\right\}\mathrm{d}x \tag{21.52}$$

取极值的必要条件. 读者也可以直接验算.

例 21.6 写出偏微分方程定解问题

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})+k^2 u(\boldsymbol{r})=-\rho(\boldsymbol{r}),\qquad \boldsymbol{r}\in V, \tag{21.53a}$$

$$u(\boldsymbol{r})\big|_{\Sigma}=f(\Sigma) \tag{21.53b}$$

的变分形式.

解 可以完全仿照例 21.5 的做法，考虑积分

$$\iiint\limits_V\left[\nabla^2 u+k^2u+\rho(\boldsymbol{r})\right]\delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

对于被积函数中的后两项，有

$$\iiint\limits_V k^2u\delta u\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\frac{1}{2}\delta\iiint\limits_V k^2u^2\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

$$\iiint\limits_V \rho(\boldsymbol{r})\delta u\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\delta\iiint\limits_V \rho(\boldsymbol{r})u\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

对于被积函数中的第一项，则需要应用 Green 第一公式以及边界条件 $\delta u(\boldsymbol{r})\big|_{\Sigma}=0$,

$$\iiint\limits_V\nabla^2u\,\delta u\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint\limits_{\Sigma}\delta u\,\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{\Sigma}-\iiint\limits_V\nabla u\cdot\nabla\left(\delta u\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

$$=-\frac{1}{2}\delta\iiint\limits_V\left(\nabla u\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

因此，原方程就转化为

$$\delta \iiint_V \left\{\frac{1}{2}\left[(\nabla u)^2 - u^2\right] - \rho u\right\} \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0.$$

这说明，定解问题 (21.53) 就等价于在边界条件 (21.53b) 下求泛函

$$\iiint_V \left\{\frac{1}{2}\left[(\nabla u)^2 - k^2u^2\right] - \rho u\right\} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{21.54}$$

的极值问题.

例 21.7 写出偏微分方程的本征值问题

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) + \lambda u(\boldsymbol{r}) = 0, \qquad \boldsymbol{r} \in V \tag{21.55a}$$

$$u(\boldsymbol{r})\big|_{\Sigma} = 0 \tag{21.55b}$$

的变分形式.

解 首先，可以将本问题看成是例 21.6 的特殊情形. 因此，本征值问题 (21.55) 就等价于泛函

$$J[u] = \iiint_V \left\{\left[\nabla u(\boldsymbol{r})\right]^2 - \lambda\left[u(\boldsymbol{r})\right]^2\right\} \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{21.56}$$

在边界条件 (21.55b) 下的极值问题. 更进一步，把本征值 λ 看成是 Lagrange 乘子，那么，这个泛函极值问题又等价于泛函

$$J[u] = \iiint_V \left[\nabla u(\boldsymbol{r})\right]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{21.57}$$

在边界条件 (21.55b) 和约束条件 (本征函数的归一化条件)

$$\mathrm{J}_1[u] \equiv \iiint_V \left[u(\boldsymbol{r})\right]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 1 \tag{21.58}$$

下的条件极值问题.

请读者证明，这样得到的泛函的条件极值问题的确和本征值问题 (21.55) 同解. 不难理解，这些本征函数正好就是泛函的极值函数，而本征值正好是泛函的极值. 由于泛函 $J[u]$ 的二级变分

$$\delta^2 J[u] = 2\iiint_V \left[\nabla\left(\delta u(\boldsymbol{r})\right)\right]^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{21.59}$$

恒为正，所以，泛函的极值是极小值．这些极小值中的最小者，当然就是本征值问题 (21.55) 的最小本征值．

*21.5　变边值问题

在实际问题中还会遇到另一类泛函的极值问题，即极值函数在一端或两端的数值并未指定．可以看下面这两个例子．

例 21.8　找出连接一固定点 A 到一铅直线 L 的路径 (见图 21.2)，使质点在重力作用下以最少的时间由 A 到 L．在这个问题中，起点 A 的位置是给定的，

$$y_A = y(x_A).$$

但是，终点 B 的位置并不是完全确定的，它只是限定在 L 上变化，因此，只是 x_B 给定，而 y_B 不定．

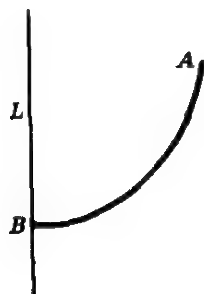


图　21.2

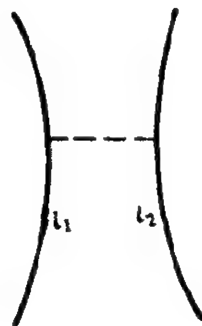


图　21.3

例 21.9　如图 21.3 所示，求两条不相交曲线之间的最短路径．这里，两个端点的位置都是不完全确定的．需要决定端点的坐标，以及连结这两点的最短路径．从数学上看，这类问题仍然可以归结为求泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,\mathrm{d}x \tag{21.60}$$

的极值问题，只不过边界条件需要修改．仿照前面的讨论，我们知道，这个泛函取极值的必要条件是

$$\begin{aligned}\delta J[y] &= \int_{x_0}^{x_1} \delta F(x, y, y')\, \mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y\, \mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

设起点的位置 (x_0, y_0) 给定，因而 $\delta y\big|_{x_0} = 0$；但终点的位置 (x_1, y_1) 仅 x_1 给定，而 y_1 不定，所以 $\delta y\big|_{x_1}$ 也不定. 这样，乍一看来，似乎并不能立即得到必要条件的微分形式，即 Euler–Lagrange 方程. 可是，只要一旦求出这个极值函数，它的终点位置 (x_1, y_1) 当然也就完全确定. 这样，这个极值函数一定也是同一个泛函在两端固定的边界条件

$$y(x_0) = y_0, \qquad y(x_1) = y_1$$

下的极值函数，所以一定也还是方程

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{21.61}$$

的解. 换句话说，这个 Euler–Lagrange 方程也还是泛函在变边值条件下取极值的必要条件. 但是，只有这个条件还不够，还必须有

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x=x_1} = 0, \tag{21.62}$$

才能保证泛函的一级变分 $\delta J[y] = 0$.

结论：泛函 (21.60) 在一端完全固定 ($y(x_0) = y_0$)，另一端 x_1 给定，而 $y(x_1)$ 不定的条件下取极值的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \tag{21.63a}$$

$$y(x_0) = y_0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}\bigg|_{x=x_1} = 0. \tag{21.63b}$$

练习 21.2 在两端均为变边值的条件下，求泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, \mathrm{d}x$$

取极值的必要条件.

现在再推广到二元函数的情形．在自由边值条件 (边界 Γ 上的 $u(x,y)$ 值自由) 下，泛函

$$J[u]=\iint\limits_S F\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{21.64}$$

取极值的必要条件，仍然是此泛函的一级变分为 0，

$$\begin{aligned}\delta J[u] &= \iint\limits_S \left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \iint\limits_S \left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad+\iint\limits_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\delta u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \iint\limits_S \left(\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)\delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_\Gamma\left[-\frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}y\right]\delta u\\
&=0.\end{aligned}$$

所以，必要条件的微分形式是

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y}=0, \tag{21.65a}$$

$$\int_\Gamma\left[-\frac{\partial F}{\partial u_y}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial u_x}\mathrm{d}y\right]\delta u=0. \tag{21.65b}$$

或者把沿边界的第二型线积分改写成第一型线积分的形式，于是，边界条件 (21.65b) 又可以写成

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u_x}\cos(n,x)+\frac{\partial F}{\partial u_y}\cos(n,y)\right]_\Gamma=0. \tag{21.65b'}$$

21.6 Rayleigh–Ritz 方法

到现在为止，读者应该已经了解了变分法应用于物理问题的大概轮廓．变分法在物理学中的应用，可以分为两个主要的方面．

一种应用是作为基本物理规律的表述语言. 可以用 Hamilton 原理或其他类似的语言描述力学系统 (质点、质点组 $\cdots\cdots$) 的运动，可以用 Fermat 原理描述光线在介质中的传播，包括在界面上的反射和折射，也可以用变分的语言描述电磁场乃至微观粒子的运动，等等. 在物理学的这些分支中，支配物质运动的各种特定形式的基本规律，无一例外地都可以表述为各自的泛函极值问题. 变分法的这种应用，具有重要的理论意义. 它可以使我们更统一地了解物质世界的运动，可以使我们更方便地从已知的物理领域向新的领域扩展. 变分法的第二种应用则是体现出它的实用价值：它为求解具体的物理问题提供了一种新的灵活手段. 尽管我们平时仍然是习惯于使用微分方程去描写这些物理问题，但毕竟只有少数的问题才能精确求解，在多数的实际问题中往往只能得到近似解. 在变分法的基础上，就建立了很实用的近似解法. 本节就介绍求解常微分方程本征值问题的一种近似方法.

假设有一个一般的本征值问题

$$LX = \lambda\rho X, \tag{21.66a}$$

$$\alpha_1 X(a) + \beta_1 X'(a) = 0, \tag{21.66b}$$

$$\alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0. \tag{21.66c}$$

这时存在两种可能：一种是常微分方程 (21.66a) 的解已知，很容易求得；另一种可能是还需要用常微分方程级数解法，才能求出常微分方程的解. 但是，无论那种情况，都还要代入边界条件，定出本征值和本征函数. 一般说来，除了少数已经熟悉的函数外，很难指望能得到本征值的准确表达式. 即使像

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

这样最简单的方程，有熟知的两个线性无关解 $\sin\sqrt{\lambda}x$ 和 $\cos\sqrt{\lambda}x$，在一般的第三类边界条件下，也无法写出本征值的显明表达式. 那么，对于一般的本征值问题，这里的困难就可想而知了. 变分法就为我们提供了求解本征值的近似方法.

用 Rayleigh-Ritz 方法近似求解本征值问题的基本思路是：首先把本征值问题转化为泛函的条件极值问题，然后在一定的函数空间中求解，因而把问题又转化函数的条件极值问题. 只要选择的函数空间 (对于此本征值问题) 是完备的，原则上总可以足够精确地逼近本征值的精确值. 而从实用的角度看，就是要选择一个“好”的函数空间 (实际上是一个函数序列)，一方面便于计算，一方面又能够足够快地、足够精确地求得本征值的近似值. 这就要求函数序列具有本征函数所要求的主要基本特征，要求我们事先从物理上和数学上对于本征函数的性质作出准确的判断.

为了便于比较，不妨举一个已知精确解的例子.

例 21.10 求本征值问题

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda y(x)=0, \tag{21.67a}$$

$$y(0)\text{ 有界}, \qquad y(a)=0 \tag{21.67b}$$

的最小本征值.

解 这个本征值问题在 21.3 节的例 21.4 中已经讨论过. 当时讨论的是泛函

$$I[y]=\int_0^a x\,y'^2\,\mathrm{d}x \tag{21.68}$$

在边界条件 (21.67b) 和约束条件

$$I_1[y]\equiv\int_0^a x\,y^2\,\mathrm{d}x=1 \tag{21.69}$$

下的条件极值问题，它的 Euler-Lagrange 方程就是 (21.67a) 式.

现在就用 Rayleigh-Ritz 方法来近似求解这个泛函的条件极值问题. 事先，我们对于本征函数的了解是，它除了必须满足边界条件 (21.67b) 之外，还应该具有奇偶性 (为什么？请读者证明)．因此，可用多项式序列

$$\begin{aligned}y_n(x)=&\alpha_1\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]+\alpha_2\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2+\alpha_3\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^3\\&+\cdots+\alpha_n\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^n, \qquad n=1,2,3,\cdots\end{aligned} \tag{21.70}$$

去逼近本征函数. 首先取近似的本征函数 $y_2(x)$，即在 (21.70) 中取前两项，代入泛函 (21.68) 及约束条件 (21.69)，得

$$\begin{aligned} I[y_2] &= \int_0^a x\, y_2'^{\,2}\, \mathrm{d}x \\ &= \alpha_1^2 + \frac{4}{3}\alpha_1\alpha_2 + \frac{2}{3}\alpha_2^2, \end{aligned} \tag{21.71}$$

$$\begin{aligned} I_1[y_2] &= \int_0^a x\, y_2^2\, \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{6}\alpha_1^2 + \frac{1}{4}\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{10}\alpha_2^2\right)a^2 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{21.72}$$

这可以看成是 α_1 和 α_2 的二元函数的条件极值问题，必要条件是

$$\frac{\partial(I-\lambda I_1)}{\partial\alpha_1} = 2\alpha_1 + \frac{4}{3}\alpha_2 - \lambda a^2\left(\frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2\right) = 0, \tag{21.73}$$

$$\frac{\partial(I-\lambda I_1)}{\partial\alpha_2} = \frac{4}{3}\alpha_2 + \frac{4}{3}\alpha_1 - \lambda a^2\left(\frac{1}{5}\alpha_2 + \frac{1}{4}\alpha_1\right) = 0. \tag{21.74}$$

这又是关于 α_1 和 α_2 的代数方程组，有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} 2 - \dfrac{1}{3}\lambda a^2 & \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{4}\lambda a^2 \\ \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{4}\lambda a^2 & \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{5}\lambda a^2 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$3\left(\lambda a^2\right)^2 - 128\left(\lambda a^2\right) + 640 = 0. \tag{21.75}$$

解之得

$$\lambda a^2 = \frac{64}{3} \pm \frac{8}{3}\sqrt{34}. \tag{21.76}$$

这两个给出的都是 λ 的极小值. 在 21.3 和 21.4 节中已经论证过，最小的极小值就对应于最小的本征值. 这里得到的当然只是本征值问题 (21.67) 的最小本征值的近似值

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{5.7841\cdots}{a^2}, \tag{21.77}$$

它和精确值

$$\lambda_1 = \left(\frac{2.4048\cdots}{a}\right)^2 = \frac{5.7831\cdots}{a^2}$$

的相对误差不到 2×10^{-4}．相应地，本征函数的近似解是

$$\bar{y}_1(x) = \alpha_1\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] + \alpha_2\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2, \tag{21.78a}$$

$$\alpha_1 a = 2\sqrt{12-33\sqrt{2/17}} = 1.6505676\cdots, \tag{21.78b}$$

$$\alpha_2 a = \sqrt{80-230\sqrt{2/17}} = 1.0538742\cdots. \tag{21.78c}$$

为了与精确解

$$y_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{a\,\mathrm{J}_1(\mu_1)}\mathrm{J}_0\left(\mu_1\frac{x}{a}\right)$$

作比较，不妨计算

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_0^a \left[y_1(x)-\bar{y}_1(x)\right]^2 x\mathrm{d}x \\ &= 2-2\int_0^a y_1(x)\bar{y}_1(x)x\mathrm{d}x \\ &= 2\left\{1-\left[\alpha_1 a\frac{4\sqrt{2}}{\mu_1^3}+\alpha_2 a\frac{8\sqrt{2}}{\mu_1^3}\left(\frac{8}{\mu_1^2}-1\right)\right]\right\} \\ &= 1.66\times10^{-5}.\end{aligned}$$

由于在多项式逼近 (21.70) 中才只取了两项，本征值和本征函数就能达到这个精度，这是的确令人惊异的．从这里可以看出，Rayleigh Ritz 方法的确不失为一种好的近似方法．可以想像，如果取的项数更多，得到的精度会更高．

作为例题，我们可以到此结束．但是，继续分析一下这个例题，进而对 Rayleigh Ritz 方法有更进一步的了解是有好处的．从上面的计算可以看出，在应用 Rayleigh-Ritz 方法时，只能求得最低的几个本征值的近似值，本征值的个数和使用的逼近函数中的参数数目相同．这是应用 Rayleigh-Ritz 方法求解本征值问题的一个特点．在实际应用中，并不会因为 Rayleigh Ritz 方法只能求得有限个本征值而降低它的实用价值，因为有不少问题只需要求出最小的若干个本征值．

再看一下上面得到的第二个本征值

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{36.883\cdots}{a^2}, \tag{21.79}$$

它和精确值

$$\lambda_2 = \frac{30.471\cdots}{a^2},$$

之间的误差竟超过 20%！为了要求得足够精确的第二个本征值，当然必须增加逼近函数中的参数，这当然必须以完成急剧增长的计算量为代价. 在实用中，更好的办法是求解一个新的泛函条件极值问题，它和原来的泛函条件极值问题的差别只在于排除掉第一个本征值. 这只要在原来的泛函条件极值问题中再附加上一个正交条件

$$\int_0^a y(x)\,\bar{y}_1(x)\,x\,\mathrm{d}x = 0 \tag{21.80}$$

即可. 这样，在这个新的泛函条件极值问题中，最小的本征值当然就是原来的第二个本征值了. 读者不难想到，如果要求更高的本征值，应该如何处理.

第二十二章　数学物理方程综述

22.1　二阶线性偏微分方程的分类

在本课程的数学物理方程部分中，我们总共讨论了三种类型偏微分方程

- 波动方程
- 热传导方程
- 稳定问题，如 Laplace 方程，Poisson 方程，Helmholtz 方程等

定解问题的解．这三类方程，描写了不同的物理过程，它们的解也都表现出各自不同的特点 (例如，见 13.6 ~ 13.8 各节的讨论)．在数学上，这三类方程也分属双曲型、抛物型和椭圆型三类 (见 12.4 节)．现在的问题是：二阶线性偏微分方程，是否就只有这三种类型？回答是：对于两个自变量的情形，一定如此．对于更多个自变量的情形，问题要复杂一些，但讨论的基本方法是一样的．下面，就以两个自变量的二阶线性偏微分方程为例，作一个典型讨论．

两个自变量 (x, y) 的二阶线性偏微分方程的普遍形式是：

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu+g=0, \tag{22.1}$$

其中 a, b, c, d, e, f 和 g 是 x, y 的已知函数．通常假设它们是连续可微的．显然，函数 a, b, c 中，至少有一个不恒为 0，否则，就不成其为二阶偏微分方程．

首先考虑 a 和 (或)c 不恒为 0 的情形．不妨设 $a\neq 0$．这时可作变换

$$\xi=\phi(x, y), \qquad \eta=\psi(x, y). \tag{22.2}$$

为了保证 ξ 和 η 仍然是独立变量，这一组变换必须满足

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\neq 0. \tag{22.3}$$

在这一组变换下，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$+\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial y}\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

所以，方程 (22.1) 变为

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+D\frac{\partial u}{\partial \xi}+E\frac{\partial u}{\partial \eta}+Fu+G=0, \tag{22.4}$$

其中，

$$A=a\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2,$$

$$B=a\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x}+b\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+c\frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$C=a\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2,$$

$$D=a\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+d\frac{\partial \phi}{\partial x}+e\frac{\partial \phi}{\partial y},$$

$$E=a\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}+d\frac{\partial \psi}{\partial x}+e\frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$F=f,$$

$$G=g.$$

容易证明

$$B^2 - AC = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\left(b^2 - ac\right) \tag{22.5}$$

$$= \left|\frac{\partial(\xi,\ \eta)}{\partial(x,\ y)}\right|^2\left(b^2 - ac\right). \tag{22.5'}$$

为了书写简便起见，令

$$\Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \equiv D\frac{\partial u}{\partial \xi} + E\frac{\partial u}{\partial \eta} + Fu + G, \tag{22.6}$$

则方程 (22.4) 变为

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta} + C\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \Phi\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \tag{22.4'}$$

这样，我们就希望，通过适当选择变换 (22.2)，使得 A, B, C 中有一个或几个为 0，达到使方程简化的目的.

为此，要介绍一个定理.

定理 如果 $\phi(x,\ y) = C$ 是方程

$$a\left(\mathrm{d}y\right)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c\left(\mathrm{d}x\right)^2 = 0 \tag{22.7}$$

的一般积分，则 $\xi = \phi(x,\ y)$ 是方程

$$a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{22.8}$$

的一个特解.

证 因为 $\phi(x,\ y) = C$，故有

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y = 0 \quad 即 \quad \mathrm{d}y = -\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y}\mathrm{d}x.$$

这里，不妨设 $\partial\phi/\partial y \neq 0$. 代入方程 (22.7)，就有

$$\begin{aligned}
&a\left(\mathrm{d}y\right)^2 - 2b\mathrm{d}y\mathrm{d}x + c\left(\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left[a\left(-\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y}\right)^2 - 2b\left(-\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y}\right) + c\right]\left(\mathrm{d}x\right)^2 \\
&= \left[a\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\mathrm{d}x}{\partial\phi/\partial y}\right)^2 = 0,
\end{aligned}$$

所以 (22.8) 成立. 定理得证. □

这个定理告诉我们，如果想要选择变换 $\xi=\phi(x,y)$ 使 $A=0$，或是选择变换 $\eta=\psi(x,y)$ 使 $C=0$，就可以通过求解常微分方程

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+c=0 \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b}{a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{b^2-ac} \tag{22.9}$$

的解来得到. 在一般情况下，这样能得到两个无关解，称为偏微分方程 (22.1) 的特征线.

在具体求解方程 (22.9) 时，又需要区别下列三种情形：

1. $b^2-ac>0$. 这时，从方程 (22.9) 可以求得两个实函数解

$$\phi(x,y)=C_1 \qquad 及 \qquad \psi(x,y)=C_2,$$

也就是说，偏微分方程 (22.1) 有两条实的特征线. 于是，令

$$\xi=\phi(x,y), \qquad \eta=\psi(x,y),$$

就可以使得 $A=C=0$. 同时，根据 (22.5) 式，就可以断定 B 一定不为 0. 所以，方程 (22.4′) 就变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0. \tag{22.10}$$

或者进一步作变换

$$\rho=\xi+\eta, \qquad \sigma=\xi-\eta,$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\partial}{\partial\sigma}, \qquad \frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\partial}{\partial\sigma}.$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2},$$

方程 (22.10) 又可以进一步化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}+\Phi_1\left(\rho,\sigma,u,\frac{\partial u}{\partial\rho},\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)=0. \tag{22.11}$$

这种类型的方程称为双曲型方程. 波动方程就属于这种类型.

2. $b^2-ac<0$. 这时，可以重复上面的讨论，只不过得到的 $\phi(x,y)$ 和 $\psi(x,y)$ 是一对共轭的复函数，或者说，偏微分方程 (22.1)

的两条特征线都不是实的．于是

$$\xi=\phi(x,\,y),\qquad \eta=\psi(x,\,y)$$

是一对共轭的复变量．这样也能够得到以复变量 ξ 和 η 为自变量的方程 (22.10)．进一步引进两个新的实变量

$$\rho=\xi+\eta,\qquad \sigma=\mathrm{i}(\xi-\eta),$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\rho}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\sigma},\qquad \frac{\partial}{\partial\eta}=\frac{\partial}{\partial\rho}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\sigma}.$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2},$$

方程 (22.10) 又可以进一步化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}+\Phi_2\left(\rho,\sigma,u,\frac{\partial u}{\partial\rho},\frac{\partial u}{\partial\sigma}\right)=0. \tag{22.12}$$

这种类型的方程称为椭圆型方程．显然， Laplace 方程、 Poisson 方程和 Helmholtz 方程都属于这种类型．

3. $b^2-ac=0$．　这时，方程 (22.9) 一定有重根

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{b}{a},$$

因而只能求得一个解，例如， $\phi(x,\,y)=C$．作变换 $\xi=\phi(x,\,y)$ 就可以使 $A=0$．但是，由 (22.5) 式可以断定，一定有 $B^2-AC=0$，这意味着 B 也一定为 0．所以，我们完全可以任意选取另一个变换， $\eta=\psi(x,\,y)$，只要它和 $\xi=\phi(x,\,y)$ 彼此独立、即

$$\frac{\partial(\xi,\,\eta)}{\partial(x,\,y)}\neq 0$$

即可．这样，方程 (22.4′) 就化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0. \tag{22.13}$$

这种类型的方程称为抛物型方程．热传导方程就属于这种类型．

以上的讨论是在 a 和 c 不恒为 0 的前提下进行的．在适当选择变换 (22.2) 后，总可以使得 A, B, C 中有一个 (B) 或两个 (B 以及 A 或 C) 为 0．而且，事实上，如果再作进一步的变换，还可以把不为 0 的系数变为 1 或 -1．当 $A = C = 1, B = 0$ 时，方程是椭圆型；$A = -C = \pm 1, B = 0$ 时，方程为双曲型；$A = B = 0, C = 1$ 或 $A = 1, B = C = 0$ 是，方程为抛物型．

如果 a 和 c 恒为 0．那么，一定有 $b \neq 0$．这正是属于双曲型方程的情形，所以也不必具体讨论了．

综合以上的讨论，可以得出结论：要判断二阶线性偏微分方程属于何种类型，只要讨论判别式 $b^2 - ac$ 即可．如果方程的系数 a, b, c 为常数，当然偏微分方程一定属于上述三种类型之一．如果 a, b, c 是 x, y 的函数，那么，在 xy 平面上的一定区域内，一般说来，$b^2 - ac$ 并不会得保持为恒正、恒负、或恒为 0，因此，方程并不能简单地归结为固定的一种类型．换句话说，方程可能在区域的不同部分属于不同的类型．这时，不妨先求出 $b^2 - ac = 0$ 即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b}{a}$$

的解．这条曲线，称为抛物型曲线，因在此曲线上，方程属于抛物型．整个区域就被这条曲线分割为两部分，方程分属于椭圆型和双曲型．例如，对于方程

$$\left(1 - x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(1 + y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

容易求出

$$b^2 - ac = 1 - x^2 + y^2.$$

因此，此方程的抛物型曲线就是一对双曲线 $x^2 - y^2 = 1$．在双曲线上，方程属于抛物型．整个 xy 平面被这两条曲线分割开．在 $1 - x^2 + y^2 > 0$ 的部分，方程属于双曲型；在 $1 - x^2 + y^2 < 0$ 的部分，方程属于椭圆型．

对于多个自变量的偏微分方程，原则上也可以选择适当的自变量变换，把方程中混合二阶偏导数项的系数变为 0．如果其余的

(二阶偏导数项的) 系数 (事实上，可以化为 1 或 −1) 全部同号，则方程为椭圆型；如果其中一个与其余的异号，则方程为双曲型；如果有多个与其余的异号，则方程为超双曲型；如果有一个或多个为 0，则方程为抛物型．当然，除非方程的系数为常数，否则，自变量变换的具体选择，总还需要具体讨论．

22.2　线性偏微分方程解法述评

在本书中，介绍了二阶线性偏微分方程定解问题的几种主要解法，关于这些解法的解题思想、应用条件以及理论根据，以前也都分别作过讨论、这里再集中地对它们作一点综合性的评述，以便于读者有一个横向的比较．

1. 分离变数法．这是求解线性偏微分方程定解问题的最主要方法．从理论上说，分离变量法的依据是 Sturm–Liouville 型方程的本征值问题．这在第十八章中已作了较系统的阐述，不再重复．从解题步骤上看，除了留待确定叠加系数的部分定解条件外，要求方程和其余的解条件都必须是齐次的 (因此，如果它们是非齐次的，则首先必须齐次化)．这样，对于定解问题中微分方程的具体形式就有一定的限制，对于所讨论问题的空间区域形状更有明显的限制．这又涉及正交曲面坐标系的选取 (空间区域的边界面必须是正交曲面坐标系的坐标面)．关于这些问题，在 P. M. Morse 和 H. Feshbach 的 Methods of Theoretical Physics (McGraw-Hill, New York, 1941) 一书中有详细的讨论，见该书的 5.1 节．

在具体求解时，当然还必须求解相应的常微分方程的本征值问题．除了本书中介绍过的几个本征值问题外，也还可能会出现其他的特殊函数．读者可以查阅参考书目 [12, 13]．此外，值得查阅的还有 E. Kamke 的 Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Band 1, Gewöhnliche Differentialgleichungen．在该书中，相当完全地收录了各种常微分方程的解．

2. 积分变换方法. 这种方法的优点是减少方程的自变量的数目. 从原则上说，无论是对于时间变量，或是空间变量，无论是无界空间，或是有界空间，都可以采用积分变换的方法求解线性偏微分方程的定解问题. 但从实际计算看，就需要根据方程和定解条件的类型，选择最合适的积分变换. 反演问题，也是关系所拟采用的积分变换是否实际可行的关键问题. 反演时涉及的积分很简单，甚至有现成的结果 (包括工具书) 可供引用，采用积分变换的确可以带来极大的便利. 但反过来说，如果涉及的积分比较复杂，也没有现成的结果 (包括工具书) 可供引用，那么，反演问题也可以成为积分变换的难点.

积分变换方法和分离变量法存在密切的联系. 例如，当本征值过渡到连续谱时，分离变量法就变为相应的积分变换方法.

另外，从实用的角度说，如果是有界空间，一般说来，积分变换和分离变量法没有什么差别，故仍不妨采用分离变量法.

积分变换方法也具有分离变量法所没有的优点：它还可以应用于求解非线性偏微分方程.

3. Green 函数方法. 应该说，这种方法具有极大的理论意义. 它给出了定解问题的解和方程的非齐次项以及定解条件之间的关系，因而便于讨论方程的非齐次项或定解条件发生变化时，解如何相应地变化. 而且，不止如此，在讨论本征值问题的普遍性质时，也离不开 Green 函数. 只不过在本书中未作具体介绍而已. Green 函数方法，已经成为理论物理研究中的常用方法之一.

应用 Green 函数方法，最重要的是，要能够求出 Green 函数的具体形式. 尽管 Green 函数所满足的是一种特别简单的定解问题：方程的非齐次项为 δ 函数，定解问题均为齐次，因此，在少数情形下，能够求得 Green 函数的简单表达式. 但是，一般说来，要能够求出 Green 函数，仍只限于若干种空间区域形状，和分离变量法没有什么差别.

Green 函数方法的另一个优点是便于进行近似计算. 例如，对

于某一类偏微分方程的定解问题，由于区域形状的限制，不能求出它的 Green 函数的解析表达式．但是，如果必要的话，总还可以求出 Green 函数的足够精确的近似解 (例如数值解)．这样，也就可以进一步求出这一类偏微分方程定解问题的近似解．这在工程上还是具有实际意义的．

4. 变分法．这个方法具有理论价值和实用价值．在理论上，它可以把不同类型的偏微分方程定解问题用相同的泛函语言表达出来 (当然不同问题中出现的泛函是不同的)，或者说，把不同的物理问题用相同的泛函语言表达出来．正是由于这个原因，变分或泛函语言已经成为表述物理规律的常用工具之一．在实用上，变分法，又提供了一种近似计算的好办法．有效地利用物理知识，灵活巧妙地选取试探函数，可以使计算大为简化．在第二十一章中，我们已经看到过这样的例子．在物理学中，过去或现在，变分法都是常用的一种近似计算方法．例如，在原子和分子光谱的计算中，就广泛地采用了变分法．

5. 对于二维和三维 Laplace 方程的边值问题，也还可以将解表示为特殊的积分公式．对于二维 Laplace 方程，它的解一定是解析函数的实部或虚部，因此，可以采用复变函数的方法求解．例如．圆内或上半平面的第一类边值问题， Laplace 方程的解就可以表示为 Poisson 积分 (见 3.7 节，也可以从 Green 函数方法得到，见 20.4 节)．三维 Laplace 方程第一类边值问题的解，也可以表示为沿边界面的积分 (见 20.5 节)．

除了上面提到的这几种方法外，还有：

6. 保角变换．这种方法的理论基础，是解析函数所代表的变换的保角性．本书复变函数部分的 2.5 节已作过非常初步的介绍．这种解法，主要用于二维 Laplace 方程或 Poisson 方程的边值问题，因为在保角变换下，前者的形式不变，后者也只是非齐次项作相应的改变．粗略地说，运用保角变换，可以把“不规则”的边界形状化为规则的边界形状 (因为难以在“不规则”和“规则”之间划定

一个界限)，例如，可以把多边形化为上半平面或单位圆内．再结合上半平面或圆内的 Poisson 公式，就能直接求出二维 Laplace 方程的解．运用保角变换，的确可以解决一些有意义的物理问题或工程问题，例如，有限大小尺寸的平行板电容器的边缘效应问题，空气动力学中的机翼问题，以及其他一些流体力学问题．又如，应用保角变换方法，可以把偏心圆化为同心圆．有兴趣的读者，可参阅参考书目 [1, 2]．此外，在 H. Kober 所编的 Dictionary of Conformal Representations 一书中，收录了各种最主要的保角变换，包括初等函数和椭圆函数所代表的保角变换，也可供参考．

7. 对于双曲型方程的定解问题，也存在一些特殊的解法，例如平均值法，降维法，等等．在理论上说，双曲型方程的解的存在唯一性，可以通过所谓 Cauchy 型边界条件 (即要求解在边界上同时满足给定的函数值与法向微商值) 得到保证①．相应地，双曲型方程，就可以采用特征线法 (或称 Riemann 方法) 求解．由于篇幅限制，这些方法都不作介绍了．读者也可参阅参考书目 [1]．

22.3 非线性偏微分方程问题

本书中讨论的偏微分方程定解问题，全部都是由线性方程和线性定解条件构成的．这一类问题的解法特别简单，因为可以援用叠加原理．从实际问题看，这是和物理学的发展状况密切相关的．迄今为止，线性近似仍然是物理学中经常采用的最基本的近似．例如，在 Newton 力学中，质点的加速度与外力成正比，比例系数 (质点的质量) 是常数，与质点运动的速度大小无关．在弹性力学中，我们首先注意的是所谓弹性限度内的规律，即 Hooke 定律，应力与应变成正比，比例系数 (弹性系数) 是物质常数，与应变的大小无

① 椭圆型方程就不同．对于椭圆型方程，只要指定未知函数在边界上的函数值或法向微商值，就足以唯一地确定解．同时指定未知函数在边界上的函数值和法向微商值，反而是过分了，反而会得造成问题无解．

关. 又如，在涉及输运过程的分子动理论中，也是着重讨论相对于平衡状态的线性偏离：由温度的分布不均匀而产生热传导现象，热流密度与温度梯度成正比，比例系数 (导热率) 是物质常数，与温度高低无关；由物质密度的分布不均匀而产生扩散现象，物质流密度 (单位时间通过单位面积的质量) 与密度梯度成正比，比例系数 (扩散系数) 是常数，与物质密度的高低无关. 在电磁学中，Ohm 定律说的也是电流密度与电场强度成正比，比例系数 (电导率) 是物质常数，与电场强度的高低无关. 这类例子，在物理学中，可以说俯拾皆是. 相应地，在描写连续介质或场的运动的数学物理方程中，就出现了波动方程、热传导方程和 Laplace 方程、Poisson 方程、Helmholtz 方程等线性偏微分方程，以及各种类型的线性定解条件. 正是由于采用了线性近似，所以，得到的方程形式具有普适性. 无论是弹性体中发生的纵振动或横振动，也无论是电磁场随时间、空间的变化与分布，都遵从同样形式的波动方程，介质的性质只体现在波的传播速度上. 无论是热传导过程，或是扩散过程，也都遵从同样的热传导方程，不同的过程，以及有关的介质性质，同样也只表现在方程中的常数 (扩散率) 上.

上面所有各种现象的线性描述，当然都只是在一定限度内的近似. 随着科学技术的发展，随着人们对于自然规律认识的深化，不可避免地会超出线性近似的限制. 研究各种极端条件 (例如，高温、高压、高密度 ……) 下的物理过程，研究物理过程随时间的长期演变，或是在空间上的大尺度范围内的变化，都使得非线性效应变得不可忽略. 其实，在传统的物理学中就可以找到这样的例子. 如果介质表面的温度和环境温度相差不大时，单位时间内通过单位表面积散出的热量与温差成正比 (Newton 散热定律)，但如果介质表面的温度 T 足够高，热辐射的效应不可忽略，以辐射方式散出的热量便与 T^4 成正比 (Stefan-Boltzmann 定律).

下面再讨论一下无穷直线上的波动问题. 正如第十三章中指出的，波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{22.14}$$

的解

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at) \tag{22.15}$$

表示的是在两个方向上独立传播的行波．当我们只关注于在一个方向上的行波，例如， $u(x,t) = f(x - at)$ ，便有一阶偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{22.16}$$

这个方程还可以改写成连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \tag{22.17}$$

其中的 $j = au$ 表示“流”（粒子流、能量流 $\cdots\cdots$）的强度．如果要考虑非线性的影响，下一级的近似便会有 u^2 项，

$$j = au + \frac{\alpha}{2}u^2, \tag{22.18}$$

于是，波动方程就变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{22.19}$$

方程中就出现了非线性项．如果同时还存在色散（见 13.6 节），流的强度变为

$$j = au + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{2}u^2, \tag{22.20}$$

于是，波动方程又变为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{22.21}$$

为了将方程 (22.21) 的形式化简，可以进一步作变换

$$\tau = At, \qquad \xi = A(x - at), \qquad v = Bu,$$

取

$$A^2 = \frac{1}{\beta}, \qquad B = -\frac{6}{\alpha},$$

就可以得到标准的 KdV 方程 (Korteweg-de Vries， 1895 年)，

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}+\frac{\partial^3 v}{\partial \xi^3}-6v\frac{\partial v}{\partial \xi}=0. \tag{22.22}$$

这是典型的非线性偏微分方程之一. 它可以描写浅水波的传播.

在非线性偏微分方程中，经常提到的典型方程还有 sin-Gordon 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\sin u \qquad \text{或} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sin u \tag{22.23}$$

和非线性 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha|u|^2u. \tag{22.24}$$

前者最早出现在 19 世纪的几何问题中.

非线性方程的最大特点，就是解不再具有线性叠加性质. 例如，即使对于齐次的非线性方程，如果 u 是方程的解，它的常数倍 Au 也不一定是方程的解；如果 u_1 和 u_2 是方程的解，它们的和 u_1+u_2，一般说来，却并不是方程的解. 因此，求解非线性方程，需要特殊的技巧. 而且，通常只能根据问题的背景，求得所需要的特解. 下面就简单介绍方程 (22.22) 的几个特解.

为了叙述的方便，我们不妨撇开 KdV 方程的上述背景，而是简单地把 ξ 和 τ 分别理解为空间和时间变量. 最容易求的是

$$v(\xi,\tau)=f(\xi-c\tau) \tag{22.25}$$

形式的行波解，因为这样可以转化为常微分方程的求解问题. 令 $\eta=\xi-c\tau$，于是

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=-c\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \xi}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta},$$

所以

$$-c\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}+\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}\eta^3}-6f(\eta)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}=0.$$

积分一次，有

$$-cf(\eta)+\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}-3\big[f(\eta)\big]^2=A, \tag{22.26}$$

A 为积分常数．两端乘以 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}$，再积分，就得到

$$-\frac{c}{2}\big[f(\eta)\big]^2+\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right]^2-\big[f(\eta)\big]^3=Af(\eta)+B, \tag{22.27}$$

B 是第二个积分常数．如果我们加上边界条件

$$\eta\to\pm\infty\text{时}，\qquad f(\eta),\ \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta},\ \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\eta^2}\ \text{均}\to 0,$$

则可定出 $A=B=0$．于是

$$\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\eta}\right]^2=\big[f(\eta)\big]^2\big[2f(\eta)+c\big], \tag{22.28}$$

即

$$\pm\frac{\mathrm{d}f}{f\sqrt{2f+c}}=\mathrm{d}\eta.$$

这里，一定有 $2f(\eta)+c\geq 0$．作变换 $\sqrt{2f+c}=\sqrt{c}w$，方程就化为

$$\mp\frac{2}{\sqrt{c}}\frac{\mathrm{d}w}{1-w^2}=\mathrm{d}\eta. \tag{22.29}$$

先考虑上式中取负号的情形．解之即得

$$\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\frac{1+w}{1-w}=\eta-\eta_0\quad\text{即}\quad\frac{\sqrt{c}+\sqrt{2f+c}}{\sqrt{c}-\sqrt{2f+c}}=\mathrm{e}^{\sqrt{c}(\eta-\eta_0)}.$$

进一步化简，就得到解

$$f(\xi-c\tau)=-\frac{c}{2}\mathrm{sech}^2\left\{\frac{\sqrt{c}}{2}\Big[(\xi-\xi_0)-c(\tau-\tau_0)\Big]\right\}. \tag{22.30}$$

这是一个行波解，在 $\tau>\tau_0$ 时的任意一个时刻，仍然保持 $\tau=\tau_0$ 时刻的波形，只不过向右平移了 $c(\tau-\tau_0)$．在非线性方程中，常把这种不受干扰地传播的波称为孤波，或孤 [立] 子．(22.30) 式的波形只有一个极值，所以称为单孤波或单孤子．图 22.1 中给出了 $f(\xi-c\tau)$ 的图形．

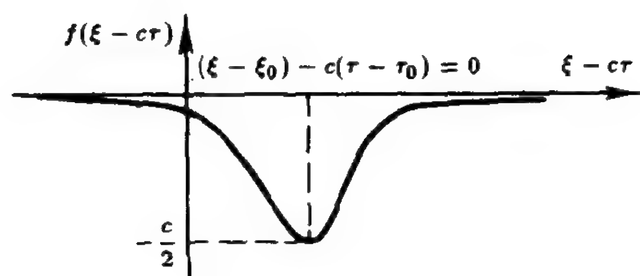


图 22.1　单孤波

值得注意，与线性波动方程不同， KdV 方程的孤波解的传播速度 c 并不是一个确定的常数，而是任意常数，只要大于 0 即可. 对于任意一个 c， KdV 方程有一个单孤波解. 所以， KdV 方程有无穷多个单孤波解.

现在再讨论 (22.29) 式中取正号的情形. 重复上面的步骤，又可以求得

$$f(\xi-c\tau)=\frac{c}{2}\mathrm{csch}^2\left\{\frac{\sqrt{c}}{2}\Big[\big(\xi-\xi_0\big)-c\big(\tau-\tau_0\big)\Big]\right\}. \tag{22.31}$$

应该说，这只是一个形式解，它在 $(\xi-\xi_0)-c(\tau-\tau_0)=0$ 具有奇异性.

KdV 方程还可以有双孤波解，

$$v(\xi,\tau)=-2\frac{k_1^2E_1+k_2^2E_2+2\big(k_2-k_1\big)^2E_1E_2+A\big(k_2^2E_1+k_1^2E_2\big)E_1E_2}{\big(1+E_1+E_2+AE_1E_2\big)^2}, \tag{22.32}$$

其中

$$E_1=\exp\left\{k_1\xi-k_1^3\tau+\alpha_1\right\},$$

$$E_2=\exp\left\{k_2\xi-k_2^3\tau+\alpha_2\right\},$$

$$A=\left(\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}\right)^2.$$

求出这种解的方法和步骤，就不在这里介绍了. 对于非线性偏微分方程的求解问题，有兴趣的读者，可以阅读陆振球所著的《经典和

现代数学物理方程》(上海科学技术出版社，1991 年) 一书. 这在国内现有的数学物理方程教材中，是比较详细地专门介绍了非线性偏微分方程的解法的.

22.4 结 束 语

在结束本书的时候，需要再次指出，本书关于数学物理方程的介绍，实际上只限于线性偏微分方程的部分内容，因此，远远不是完整的. 大的说来，数学物理方程，既包括偏微分方程，还包括积分方程. 后者在本书中完全没有触及. 就偏微分方程来说，既有线性偏微分方程，又有非线性偏微分方程. 也只是在上一节中，对后者作了一点序言式的介绍. 而且，就线性偏微分方程来说，也不单有定解问题的求解问题，即由“源”求“场”的问题，还有它的逆问题，即由“场”求“源”的问题. 后者同样具有理论和实用上的重要性. 遥感、地质勘探、机器故障诊断、人体的 CT 成象等等这些问题，无一不是由场求源的逆问题. 这类问题，在本书中也丝毫未能涉及. 有兴趣的读者，可以参阅上节末提到的《经典和现代数学物理方程》一书.

参 考 书 目

基 本 参 考 书

[1] 郭敦仁，《数学物理方法》(第二版)，高等教育出版社， 1991 年.

[2] 梁昆淼，《数学物理方法》(第三版)，高等教育出版社， 1998 年.

[3] 普里瓦洛夫，《复变函数引论》，北京大学数学力学系数学分析教研组译，商务印书馆， 1953 年.

[4] 拉甫伦捷夫，沙巴特，《复变函数论方法》，施祥林，夏定中译，人民教育出版社， 1956 年.

[5] 吉洪诺夫，萨马尔斯基，《数学物理方程》，黄克欧等译，人民教育出版社， 1961 年.

[6] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927.

[7] T. J. I'A. Bromwich, An Introduction to the Theory of Infnite Series, Macmillan, London, 1931.

[8] T. M. Macrobert, Functions of a Complex Variable, Macmillan, London, 1954.

[9] J. E. Marsden, Basic Complex Analysis, Freeman, San Fransisco, 1973.

[10] F. B. Hildebrand, Advanced Calculus for Applications (2nd ed.), Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

[11] C. J. Tranter, Integral Transforms in Mathematical Physics (3rd ed.), Wiley, New York, 1966.
特兰台尔，《数学物理中的积分变换》，潘德惠译，高等教育出版社， 1959 年.

专著和工具书

[12] 王竹溪，郭敦仁，《特殊函数概论》，科学出版社， 1965 年.

[13] A. Erdélyi *et al.*, Higher Transcendental Functions, McGraw-Hill, New York, 1953.

爱尔台里主编，《高级超越函数》，张致中译，科学技术出版社，1957 年.

[14] E. W. Hobson, The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1931.

[15] G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1944.

[16] M. Abramowitz and I. A. Ategun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, U. S. National Bureau of Standards, Washington, D. C., 1965.

[17] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products (corrected and enlarged edition), Academic, New York, 1980.

外国人名译名对照表

Abel	阿贝耳
Airy	艾里（又译爱里）
Anger	安格尔
Bernoulli	伯努利
Bessel	贝塞耳
Boltzmann	玻尔兹曼
Bolzano	波尔查诺
Bose	玻色
Cauchy	柯西
Coulomb	库仑
Croxton	克罗克斯顿
d'Alembert	达朗贝尔（又译达朗伯）
Dirac	狄喇克
Einstein	爱因斯坦
Euclid	欧几里德
Euler	欧拉
Fermat	费马
Fermi	费密
Fourier	傅里叶
Fresnel	费涅耳
Gabor	伽柏
Gauss	高斯
Gegenbauer	盖根鲍尔
Gordon	戈登
Green	格林
Haar	哈尔
Hamilton	哈密顿
Hankel	汉克尔
Helmholtz	亥姆霍兹

Hermite	厄米 (又译埃尔米特)
Hilbert	希尔伯特
Hooke	胡克
Jacobi	雅可比
Jordan	约当 (又译若尔当)
Kelvin	开尔文
Kirchhoff	基尔霍夫
Kronecker	克罗内克
Lagrange	拉格朗日
Laguerre	拉盖尔
Laplace	拉普拉斯
Laurent	洛朗
Lebesque	勒贝格
Legendre	勒让德
Liouville	刘维 (又译刘维尔)
Maxwell	麦克斯韦
Mellin	梅林
Möbius	默比乌斯 (又译麦比乌斯)
Morera	摩列拉
Navier	纳维
Neumann	诺埃曼
Newton	牛顿
Ohm	欧姆
Parseval	帕塞瓦尔
Poisson	泊松
Rayleigh	瑞利
Riemann	黎曼
Ritz	里兹 (又译里茨)
Rodrigues	罗巨格 (又译罗德里格斯)
Rolle	罗尔
Saint-Venant	圣 - 维南
Schmidt	施密特
Schrödinger	薛定谔

Schwarz	施瓦茨
Stefan	斯特藩
Stirling	斯特林
Stokes	斯托克斯
Sturm	斯图姆
Taylor	泰勒
Thomson	汤姆孙
Weber	韦伯
Weierstrass	外尔斯特拉斯
Whittaker	惠特克
Wronski	朗斯基
Young	杨氏
Chebyshev(Чебышев)	切比雪夫